

# Tesis de Licenciatura

Modelos Hidrodinámicos Unidimensionales  
con Fondo Móvil

---



Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

---

**Tesista**

Ariel Sergio Yankelevich

**Director**

Pablo Miguel Jacovkis

12 de diciembre de 2007

## Resumen

En esta tesis se presenta un modelo matemático hidrodinámico unidimensional de aguas poco profundas con superficie libre y fondo móvil que utiliza un esquema numérico implícito resuelto mediante el método de diferencias finitas; el mismo se basa en un modelo desarrollado previamente por Jacovkis. Este nuevo modelo fue implementado en el lenguaje de programación Java, junto con una rutina de graficación que permite visualizar con facilidad los fenómenos físicos que ocurren sobre un flujo en un intervalo de tiempo determinado.

Se plantean distintos experimentos numéricos para estudiar el funcionamiento del modelo y la robustez del mismo bajo distintos regímenes del flujo, ya sea subcrítico, supercrítico o transicional; y utilizando distintas combinaciones de condiciones de contorno que resulten aceptables en dichos regímenes. Se muestran diversas pruebas para alcanzar flujos en estado permanente, tanto en régimen subcrítico como supercrítico, de forma de obtener pendientes estacionarias; y posteriormente, su comparación con sus respectivas pendientes estacionarias calculadas analíticamente. También se presentan experimentos para simular fenómenos que ocurren con frecuencia en la naturaleza, como una antiduna en régimen supercrítico o tener un dique de material no erosionable en una sección transversal de un tramo, es decir, que se comprobó el funcionamiento del modelo como modelo de fondo fijo local y de igual forma se plantea su funcionamiento como modelo de fondo fijo global, mediante la comparación de los resultados con los de un modelo de fondo fijo, desarrollado con anterioridad por Jacovkis; éstos últimos dos experimentos se realizaron con el fin de analizar la sensibilidad del modelo a las variaciones en la tensión de corte crítica (a partir de la cual el modelo comienza a funcionar como de fondo móvil).

## **Abstract**

In this thesis we show a mathematical one-dimensional hydrodynamic model of shallow waters over a free surface with mobile bed that uses an implicit numerical schema solved by a finite difference method, which is based on a model previously developed by Jacovkis. This new model was implemented in the Java programming language, together with the graphical routines that allow to easily visualize the physical phenomena that occur over a flow in a particular period of time.

Several numerical experiments are proposed to study the behavior and robustness of the model under different flow conditions, namely subcritical, supercritical or transitional regime; and using several combinations of boundary conditions that are admissible on those types of flow. We show different tests to reach a steady state flow, under subcritical and supercritical regimes, getting their correspondent steady state slopes; and subsequently, comparing them with their respective analytical steady state slopes. We also present some experiments to simulate phenomena that occur frequently in nature, like antidunes in supercritical flow or having a dam of non-erodible material in a cross-section of a reach, that is, we verify that the model could work as a locally fixed bed model, and in the same way, we propose that it could work as a globally fixed bed model, by means of the comparison of the numerical results with those of a fixed bed model previously developed by Jacovkis; these two last experiments were carried out with the objective of analyzing the sensitivity of the model to variations in the threshold shear stress (from which it starts working as a mobile bed model).

## Agradecimientos

Esta tesis es el punto culmine de muchos años de trabajo y estudio, durante los cuales he pasado por distintas situaciones que me han hecho madurar, no sólo en el ámbito académico o profesional, sino también en el personal. Es por ello que han sido muchas las personas que de alguna manera y en algún momento me ayudaron a llegar a este punto de mi vida y a las cuales tengo mucho que agradecer.

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia, por su apoyo incondicional durante todos estos años, que por más distancia que nos separe siempre estuvieron conmigo y son parte de este logro. También a mis amigos y compañeros durante estos ocho años de facultad Guillermo y Hernán, que estuvieron conmigo tanto en las buenas como en las malas. Y en particular quiero agradecer a mi novia Gisela, que estuvo a mi lado mientras trabajaba en esta tesis, me apoyó para continuar trabajando todos estos días, inclusive hasta altas horas de la noche.

Hago un agradecimiento especial a mi director de tesis Pablo Jacovkis, autor de las ideas a partir de las cuales se ha desarrollado todo el trabajo de esta tesis. Muchísimas gracias por la predisposición, dedicación, paciencia y esfuerzo realizado durante el transcurso de este año.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Clasificación de un Flujo . . . . .	1
<b>2. Modelo Hidrodinámico Unidimensional de Fondo Fijo</b>	<b>7</b>
2.1. Condiciones Iniciales y de Contorno . . . . .	11
<b>3. Modelo Hidrodinámico Unidimensional de Fondo Móvil</b>	<b>15</b>
<b>4. Los Métodos en Diferencias Finitas</b>	<b>19</b>
<b>5. El Método de Preissmann</b>	<b>22</b>
<b>6. Discretización de las Ecuaciones de Saint-Venant</b>	<b>25</b>
<b>7. Resolución del Método de Preissmann Mediante Generación de una Matriz Banda</b>	<b>27</b>
7.1. Tratamiento Numérico de las Condiciones de Contorno . . . . .	29
<b>8. Implementación Computacional</b>	<b>29</b>
8.1. Rutina de Resolución Computacional . . . . .	30
8.2. Rutina de Graficación . . . . .	34
8.3. Eficiencia Computacional . . . . .	40
<b>9. Experimentos Numéricos</b>	<b>42</b>
9.1. Transición de Régimen Subcrítico a Supercrítico . . . . .	44
9.2. Régimen Supercrítico Estacionario . . . . .	46
9.3. Régimen Subcrítico sin Transición . . . . .	47
9.4. Régimen Supercrítico sin Transición . . . . .	50
9.5. Transición de Régimen Supercrítico a Subcrítico . . . . .	52
9.6. Régimen Subcrítico Estacionario . . . . .	57
9.7. Antiduna . . . . .	57
9.8. Funcionamiento como Modelo de Fondo Fijo Local . . . . .	61
9.9. Funcionamiento como Modelo de Fondo Fijo Global . . . . .	64
9.9.1. Relación entre el coeficiente de resistencia $c_b$ y el coeficiente de conducción $D$ . . . . .	65
<b>10. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>11. Bibliografía</b>	<b>69</b>

## 1. Introducción

Los ríos y canales aluviales son auto-reguladores, es decir, ajustan sus características en respuesta a cualquier cambio en el ambiente. Estos cambios modifican el cuasi-equilibrio natural de un río; por lo tanto, en el proceso de restauración del equilibrio, el río se ajustará a las nuevas condiciones cambiando su pendiente, rugosidad, tamaño del material del lecho, forma de la sección transversal o morfología.

Dentro de las restricciones existentes, cualquiera de las características mencionadas puede ajustarse a medida que el río intenta mantener el equilibrio entre su capacidad de transportar el sedimento y la carga de sedimento proporcionado. Y entre dichas restricciones figuran los principios de continuidad, de resistencia del flujo y de transporte del sedimento en relación con el tiempo y variaciones espaciales de las configuraciones del canal. Por lo general, ocurren ajustes en el ancho simultáneamente con cambios en el lecho del río, pendiente, morfología y rugosidad. Estos cambios se encuentran fuertemente relacionados y se ajustan delicadamente para establecer o mantener el estado dinámico del equilibrio.

### 1.1. Clasificación de un Flujo

Para determinar cuales son los principios que se aplican en una situación particular en la mecánica de ríos, primero es necesario clasificar correctamente un flujo. Las distintas categorías en las cuales puede clasificarse un flujo favorecen diversas suposiciones, datos requeridos y métodos de análisis; una vez que se asumen estas características, es posible identificar los datos, condiciones de contorno y técnicas de simulación apropiadas para dicha situación. A continuación se presentan los distintos criterios para clasificar un flujo.

**Efectos de los bordes del canal** El agua puede ser transportada en dos tipos de conductos: canales abiertos y tuberías. La medida en la cual la geometría de los bordes confina el flujo es una base importante para clasificar los problemas hidráulicos. El flujo en canales abiertos se caracteriza porque la superficie del agua es libre (sujeta a la presión atmosférica); en cambio, en el flujo transportando en conductos, tuberías y alcantarillas, la presión ocurre dentro del conducto y el agua fluye llenando por completo el mismo; por lo tanto, no tienen superficie de agua libre. Sin embargo, el flujo en un conducto cerrado no es necesariamente un flujo de tubería. Si el mismo se encuentra fluyendo por el conducto completándolo de forma

parcial, entonces debe ser clasificado y analizado como un flujo en canal abierto.

El análisis del flujo en canales abiertos es más complicado debido a que la superficie del agua está libre de cambiar con el tiempo y espacio; por lo tanto, la altura del agua desde el fondo del canal, el caudal, la velocidad y la pendiente del lecho se encuentran todos interrelacionados. También, las condiciones físicas (rugosidad y morfología) de canales abiertos varían mucho más (en espacio y tiempo) que las de las tuberías, las cuales generalmente tienen una morfología y rugosidad constantes.

Por otro lado, el flujo en un canal aluvial (un canal con límites móviles) se comporta de forma diferente a un flujo en un canal de límites rígidos. En los canales aluviales (la mayoría de los ríos naturales) las relaciones rígidas en los bordes se aplican solamente si el movimiento en el lecho es insignificante durante el período del interés. Una vez que ocurre la movilización de los materiales del lecho, las características del flujo, su comportamiento y la forma de los límites del canal se encuentran correlacionados, con lo cual requieren métodos mucho más complejos para el análisis de flujo.

**Flujo permanente e impermanente** El flujo permanente, también llamado flujo estacionario, se caracteriza porque las condiciones de velocidad del flujo en cualquier punto no cambian en magnitud o dirección con el paso del tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o las variaciones en ellas son muy pequeñas con respecto a los valores medios. Asimismo, en cualquier punto de un flujo permanente, no existen cambios en la densidad, presión o temperatura al pasar el tiempo. El flujo impermanente, también llamado flujo no estacionario, se caracteriza porque las propiedades del fluido y las características mecánicas del mismo serán diferentes de un punto a otro dentro de su campo; en otras palabras, se dice que es un flujo no permanente si las características en un punto determinado varían de un instante a otro.

Los métodos para analizar problemas de flujo impermanente toman explícitamente al tiempo como variable, mientras que los métodos de flujo permanente no incluyen al tiempo como variable. Obviamente, la situación del mundo real es el flujo impermanente; las observaciones desde la orilla de una corriente pequeña por un período de tiempo significativo muestran variaciones en la profundidad y velocidad; sin embargo, los cambios para estas variables en un punto dado, por lo general, ocurren de forma muy

lenta, incluso durante una inundación. El cambio lento en estas variables a menudo brinda soluciones satisfactorias a problemas hidráulicos de canal abierto, asumiendo que el flujo es permanente.

**Flujo uniforme y variado** El flujo uniforme raramente ocurre en ríos naturales debido a que, por definición, el flujo uniforme implica que la profundidad del agua, la velocidad y el caudal no cambian con la distancia a lo largo del canal. Esto también implica que para un flujo uniforme la línea de energía, la superficie del agua y el lecho del canal son todos paralelos. Por línea de energía se interpreta a la línea que representa la cantidad total de energía disponible en un punto cualquiera del canal; su cálculo se realiza sumando la energía potencial (altura con respecto a un punto fijo de referencia u origen) y la energía cinética del agua en un punto cualquiera del canal. En los puntos donde el agua se encuentra inmóvil esta línea coincide con la superficie libre del agua.

La profundidad asociada a flujo uniforme se llama “profundidad normal”. El flujo uniforme se puede considerar solamente como flujo permanente, ya que el flujo impermanente uniforme es casi imposible de demostrar fuera de un laboratorio. Solo un flujo corriendo durante mucho tiempo en un canal prismático de gran longitud, de aspereza uniforme y que no ha sido perturbado en los bordes del canal podría ser considerado como un flujo uniforme.

En la mayoría de los ríos y canales naturales el flujo característico es el flujo no uniforme o espacialmente variado. Aquí, el término “espacialmente variado” debe ser interpretado en el sentido unidimensional; es decir, las variables hidráulicas varían solamente a lo largo de la longitud del río. Incluso si el flujo es permanente, la variación en el espacio puede darse a partir de cambios que ocurren en los bordes del canal (por ejemplo, cambios en la geometría del canal), a partir de afluencias laterales al canal, o de ambos.

A pesar de que el flujo uniforme raramente ocurre en realidad en canales artificiales o naturales, la suposición de que el flujo es uniforme es a menudo adecuada, dado que la misma entrega una estimación razonable del caudal transportado para un sistema de condiciones geométricas y de rugosidad del canal dados. Sin embargo, no resulta en una solución tan exacta o defendible como la suposición de que el flujo es permanente variado. Las estructuras más pequeñas, tales como alcantarillas de tormenta y conductos de desagüe

de una autopista, se pueden diseñar adecuadamente suponiendo que el flujo es uniforme. Para estructuras más grandes, y relativamente más costosas, como por ejemplo el canal de San Luis en California, es necesario suponer que el flujo es gradualmente variado para diseñar una estructura adecuada con un costo mínimo.

**Flujo gradual y rápidamente variado** Un flujo puede ser clasificado como gradual o rápidamente variado dependiendo del grado de variación con respecto a la distancia. Un flujo se dice rápidamente variado cuando los cambios en él ocurren de forma brusca en la profundidad y/o en la velocidad y la distribución de la presión no es hidrostática. Este tipo de flujo generalmente es un fenómeno local. Típicamente ocurre en estructuras hidráulicas como desbordes en diques, en los cuales la profundidad y velocidad del flujo cambian de forma repentina sobre distancias relativamente pequeñas. La apertura de compuertas que contienen fuertemente el agua también pueden provocar un flujo rápidamente variado. La ocurrencia de un salto hidráulico, donde el flujo cambia de forma brusca de una alta velocidad y una profundidad relativamente pequeña a una profundidad mayor, es posiblemente el ejemplo más notorio de un flujo rápidamente variado.

En un flujo gradualmente variado, los cambios en la profundidad y velocidad son relativamente pequeños y se dan en forma gradual con la distancia. Como regla general, si la pendiente de la superficie del agua de superficie es imperceptible al ojo humano, entonces, el flujo es considerado como gradualmente variado. El flujo impermanente en un canal abierto (en contraste con el caso de una tubería rígida cerrada que fluye por completo) implica la no uniformidad del mismo, dado que las perturbaciones en el flujo siempre se propagan como ondas. En principio, en cualquier instante, un cierto punto del flujo es influenciado por una perturbación, otros puntos todavía no han sido alcanzados, y por lo tanto, se cumplen las condiciones para un flujo variado. De igual forma, cualquier característica no uniforme del canal (por ejemplo, expansiones y contracciones en la forma de la sección transversal, así como también cambios en la pendiente o rugosidad) produce que el flujo se acelere y desacelere como respuesta.

La influencia de estas dos características en la no uniformidad del flujo, en la impermanencia del mismo, y en la geometría irregular del canal, se relaciona con la posibilidad de aplicar una de las varias técnicas existentes para simular flujos en ríos. En general, el flujo en un río que está sujeto

a variaciones en afluencia, salida o a la acción de marea, debe suponerse como impermanente y no uniforme. El flujo gradualmente variado implica que las líneas de corriente son prácticamente paralelas (por ejemplo, la distribución de la presión hidrostática se da por completo en la sección del canal). En el cuadro 1 puede observarse la clasificación del flujo en función de la variación de la velocidad con respecto al tiempo y al espacio.

Flujo Permanente	Uniforme	Clásico en canales “Flujo uniforme”	
	No Uniforme o Variado	Gradualmente variado	
		Rápidamente variado	
Flujo Impermanente	Uniforme	Teórico, no ocurre generalmente	
	No Uniforme o Variado	Gradualmente variado	Ondas de crecida
			Flujo uniformemente progresivo
		Rápidamente variado “Flujo discontinuo”	Olas

Cuadro 1: Clasificación de un flujo en función de la variación de la velocidad con respecto al tiempo y al espacio

**Flujo subcrítico y supercrítico** Un flujo puede ser clasificado como subcrítico o supercrítico comparando la relación entre las fuerzas gravitacionales e inerciales en una sección determinada de un canal. Las fuerzas de inercia se caracterizan por el factor de velocidad  $u$  (medida en  $m/s$ ), mientras que las fuerzas gravitacionales están representadas por los factores de gravedad  $g$  (constante gravitacional  $9,81 m/s^2$ ) y altura  $h$  (o profundidad) del agua desde el lecho (medida en  $m$ ). Esta relación adimensional entre las fuerzas de inercia y gravedad es representada por el número de Froude  $Fr$ :

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$$

Cuando  $Fr > 1$ , el flujo es supercrítico y las fuerzas inerciales son las dominantes. Como resultado, la velocidad del canal es alta y la profundidad es pequeña, con el flujo descrito como rápido. El flujo supercrítico generalmente es asociado con pendientes empinadas; por lo general, ocurre en

canales hechos por el hombre, así como también el flujo sobre un río de una montaña empinada. El flujo sobre una cuneta durante una precipitación es con frecuencia supercrítico, dada la usual poca profundidad (solo unos pocos centímetros de agua) combinada con una velocidad de  $0,3 - 0,6 \text{ m/s}$ . Para  $Fr < 1$ , el flujo es considerado subcrítico, con las fuerzas gravitacionales dominando. Consecuentemente, el flujo tiene una velocidad relativa baja y una profundidad alta, por lo que este flujo puede ser descrito como calmado o tranquilo. Este tipo de flujo es generalmente asociado a canales de llanuras con pendiente pequeña; éste es el tipo de régimen más común en canales naturales. Sin embargo, el flujo puede tener una velocidad promedio de  $3 \text{ m/s}$  y el mismo sería subcrítico si la profundidad del agua fuese de  $1 \text{ m}$  o más. Para  $Fr = 1$ , tanto la profundidad como el flujo se consideran como críticos.

El régimen crítico es un estado teórico en canales, donde ninguna de las fuerzas (gravitacionales e inerciales) es la dominante. Sólo un pequeño cambio en la velocidad o profundidad del agua puede causar que el flujo cambie a subcrítico o supercrítico; en otras palabras, representa el punto de transición entre dichos regímenes. En el mundo real, el régimen de un flujo es normalmente subcrítico y en la mayoría de los ríos el número de Froude es menor a  $0,5$ , inclusive durante grandes inundaciones. De forma similar, los canales hechos por el hombre normalmente tiene un régimen subcrítico del flujo.

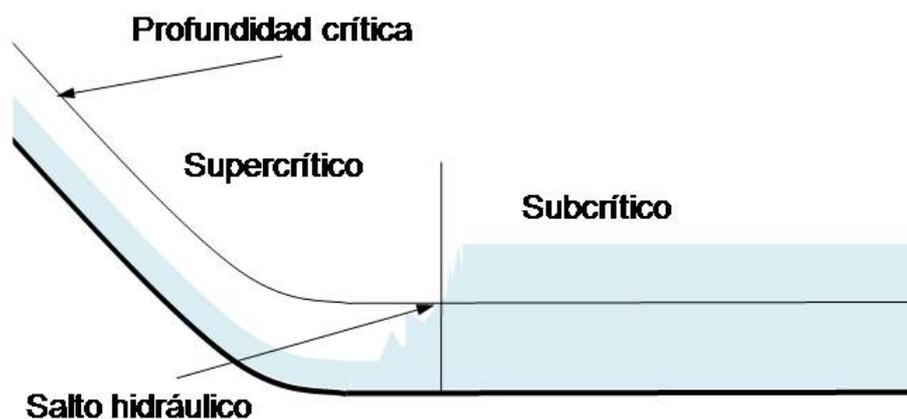


Figura 1: Salto hidráulico cuando un flujo cambia de régimen supercrítico a subcrítico.

Cuando un flujo en régimen supercrítico se encuentra con una corriente subcrítica, se presenta un choque. El paso de un régimen de flujo al otro se realiza mediante un fenómeno de transición conocido como “salto hidráulico” como se puede apreciar en la figura 1. Este fenómeno se observa con mucha frecuencia en flujos sobre canales abiertos. Cuando el líquido a alta velocidad se descarga en una zona de velocidad menor, se produce una elevación algo brusca en la superficie del líquido (es decir, una elevación o una ola sobresaliente).

Este fenómeno depende de la velocidad inicial del flujo. Si la velocidad inicial del mismo se encuentra por debajo de la velocidad crítica, entonces el salto no es posible. Mientras que para un flujo cuya velocidad está relativamente por sobre la velocidad crítica aparece una ola ondulada. A medida que la velocidad del flujo aumenta, la transición crece de forma brusca; y a velocidades lo suficientemente altas, el frente se romperá y formará una ola hacia atrás, que luego caerá sobre sí mismo. Este aumento de la velocidad puede estar acompañado por turbulencia violenta, remolinos, arrastre del aire y ondulaciones superficiales.

En esta tesis se analizarán los flujos hidrodinámicos impermanentes unidimensionales de aguas poco profundas y canal abierto de morfología prismática con fondo móvil. Veremos que estos tipos de flujos se rigen por un sistema cuasi-lineal de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Se realizarán distintos ensayos para estudiar el funcionamiento del modelo en régimen subcrítico, supercrítico y transicional; para esto utilizaremos distintas condiciones de contorno en régimen subcrítico y supercrítico; pendientes estacionarias en régimen subcrítico y supercrítico; simularemos el fenómeno de antiduna en régimen supercrítico y verificaremos la robustez del modelo en el sentido de que pueda funcionar como modelo de fondo fijo de forma local o globalmente. Como primera medida, comenzaremos por introducirnos en el modelo hidrodinámico unidimensional de fondo fijo.

## **2. Modelo Hidrodinámico Unidimensional de Fondo Fijo**

Los conocimientos fundamentales y las hipótesis utilizadas en los modelos matemáticos de ríos son formalizados en las ecuaciones de flujo variable en canales abiertos. Estas ecuaciones son simples modelos de un fenómeno

extremadamente complejo. Las mismas incorporan sólo las influencias más importantes de la vida real que afectan a un flujo, desechando aquéllas que se consideran de segunda importancia en vista del propósito del modelado. A lo largo de esta sección y las subsiguientes supondremos que el flujo sobre un canal es estrictamente unidimensional, a pesar de que el verdadero flujo unidimensional no exista en la naturaleza.

El flujo impermanente unidimensional sobre canales se puede describir con dos variables dependientes, suponiendo que la densidad es constante; por ejemplo con las variables de la cota  $Z$  y del caudal  $Q$  en cualquier sección transversal del río dada. Estas variables dependientes definen el estado del movimiento del fluido a lo largo del curso del agua y del tiempo; es decir, en función de las dos variables independientes  $x$  para la distancia y  $t$  para el tiempo. Dependiendo de la naturaleza del problema uno podría definir otros pares de variables dependientes, por lo cual las ecuaciones serán diferentes, pero las suposiciones físicas serán las mismas. Ya que sólo dos variables dependientes son suficientes para describir un flujo unidimensional se necesitan sólo dos ecuaciones, de forma tal que cada una de ellas represente una ley física.

El modelo más general de aguas poco profundas utilizado para el análisis de secciones transversales irregulares, es decir para el modelado de ríos y canales, es descrito aceptablemente por dos ecuaciones diferenciales parciales conocidas comúnmente como “ecuaciones de Saint-Venant” en honor a quien las formuló en 1871. Estas ecuaciones son denominadas individualmente “ecuación de continuidad” y “ecuación de cantidad de movimiento”.

Existen distintos modos de deducir estas ecuaciones. En el caso de la ecuación de continuidad, ésta se desprende a partir del principio de conservación de la masa, mientras que la ecuación de movimiento puede ser deducida a partir de la aplicación directa de la segunda ley de Newton, a partir del principio de conservación de la energía o a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento (ver [CHV/80]).

Normalmente se realizan algunas simplificaciones previas, a fin de facilitar el proceso deductivo, sin que por ello se afecte la validez de las mismas en la mayoría de los casos. Estas hipótesis son las siguientes:

- El flujo es unidimensional (en el sentido del eje longitudinal del río). La velocidad sobre la sección es uniforme y el nivel del agua que cruza la misma es horizontal.

## 2. MODELO HIDRODINÁMICO UNIDIMENSIONAL DE FONDO FIJO

---

- La curvatura de la línea de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables; por lo tanto la presión es hidrostática.
- Los efectos de fricción y turbulencia en los bordes pueden ser tenidos en cuenta como leyes de resistencia análogas a las que se utilizan para el estado de flujo estable.
- La pendiente del fondo del canal es pequeña en promedio por lo que el coseno del ángulo que se forma con la horizontal puede ser reemplazado por la unidad.

Las ecuaciones que generalmente se utilizan son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial(h+e)}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{D^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $x$  es la variable de espacio sobre el eje longitudinal del canal,  $u = u(t, x)$  es la velocidad longitudinal del flujo,  $h = h(t, x)$  es la profundidad del agua (o altura de la misma; los ingenieros hidráulicos utilizan la denominación “tirante”),  $e = e(x)$  es la elevación del fondo medida desde un nivel de referencia fijo,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $S = S(h(t, x), x)$  es la sección transversal mojada,  $Q = Q(t, x) = uS$  es el caudal, y  $D = D(h(t, x), x)$  es el coeficiente de conducción.

La figura 2 muestra un corte longitudinal de un río o canal. Se observa que las secciones transversales del canal que transporta el flujo son de figura arbitraria (ver figura 3) y pueden variar a lo largo del eje del canal, aunque esta variación está limitada por la condición de que la curvatura aerodinámica es pequeña.

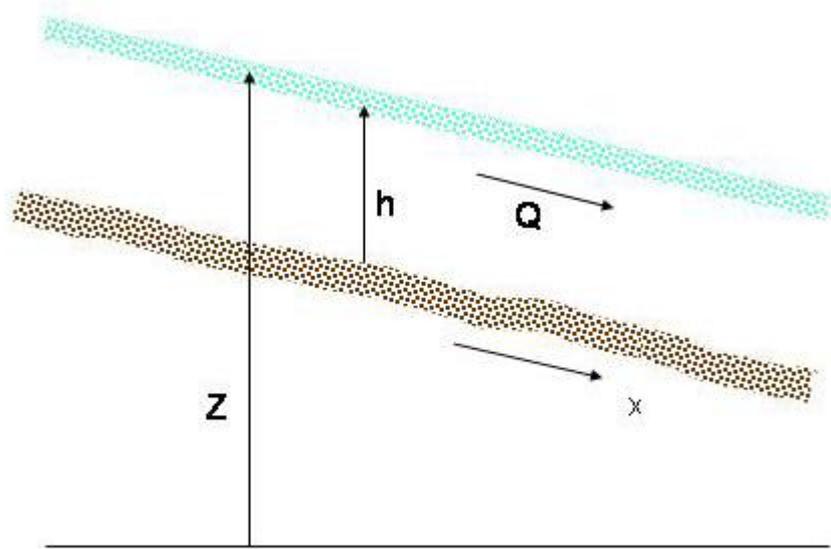


Figura 2: Flujo unidimensional sobre un canal.

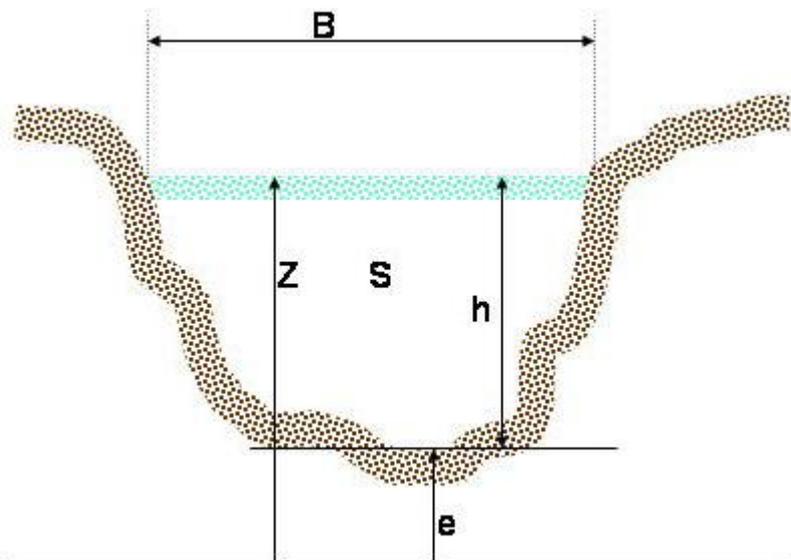


Figura 3: Geometría de una sección transversal irregular.

## 2.1. Condiciones Iniciales y de Contorno

Ya hemos descrito en forma general las ecuaciones que rigen el flujo impermanente en canales y cauces con fondo fijo; a continuación nos introduciremos, de forma muy intuitiva, en la teoría de las características, la cual es muy útil para el entendimiento de las condiciones iniciales y de contorno requeridas, así como también para el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

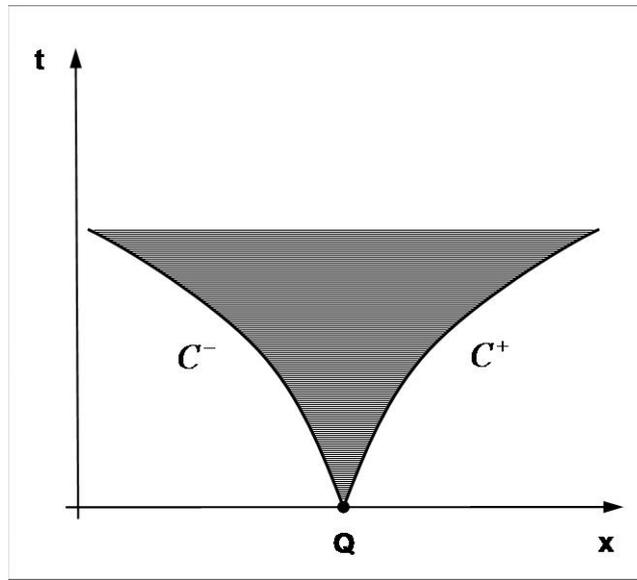


Figura 4: Rango de influencia de una perturbación en el punto  $Q$ .

Cualquier perturbación que ocurre en algún punto en el tiempo  $t = 0$  en flujos de canales abiertos se propaga a lo largo del canal en el tiempo y en dos direcciones. Por lo tanto, la perturbación que tiene lugar en el punto  $Q$ , como se puede ver en la figura 4, tiene influencia en la región sombreada limitada por las curvas  $C^+$  y  $C^-$ , las cuales representan los caminos por donde se propaga la perturbación. De forma inversa, tomando un punto  $P$ , uno puede definir hacia atrás en el tiempo el dominio en el cual las perturbaciones pueden influenciar las condiciones en el punto  $P$ , como se puede ver en la figura 5. Cualquier cosa que sucede por fuera de la región sombreada no afectará el estado en el punto  $P$ . Si las perturbaciones forman olas de una pequeña amplitud en aguas poco profundas, las líneas que forman el contorno de estas regiones son llamadas “características”. Éstas pueden ser definidas como líneas en el plano  $(x, t)$  a lo largo del cual las perturbaciones se propagan. Matemáticamente, podemos definir las perturbaciones como

discontinuidades en la primera derivada y las siguientes de las variables dependientes y de los parámetros físicos que aparecen en las ecuaciones del flujo.

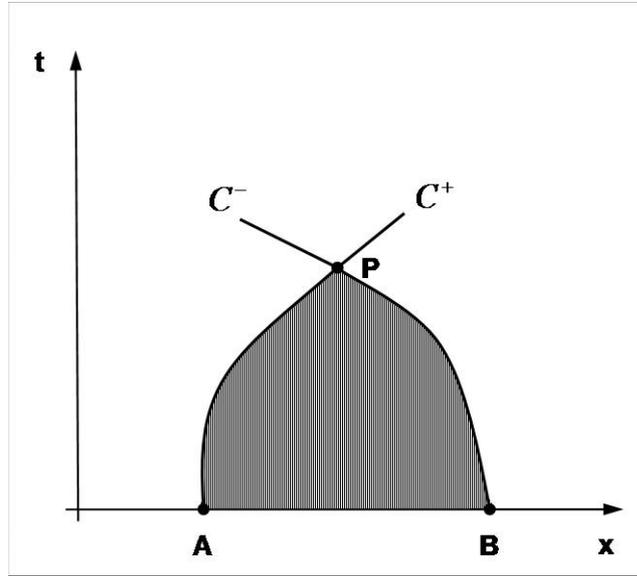


Figura 5: Dominio de influencia determinado por el punto  $P$ .

Dependiendo de la dirección de las dos características, uno puede distinguir tres diferentes estados del movimiento del fluido. En un flujo subcrítico, las fuerzas gravitacionales  $\sqrt{gh}$  son mayores que el valor absoluto de la velocidad del flujo  $|u|$ ; por lo tanto, las dos características tienen signos opuestos y el estado en cualquier punto  $P$  es influenciado por ambas desde las condiciones aguas arriba y aguas abajo, como se puede ver en la figura 6. En un flujo crítico  $\sqrt{gh} = |u|$  y una de las velocidades características de la propagación se convierte en cero; por ejemplo, como se muestra en la figura 7, la característica negativa  $C^-$  se transforma en una línea vertical, donde  $x = x_p = \text{constante}$ . En un flujo supercrítico  $\sqrt{gh} < |u|$  y las dos características tienen el mismo signo (figuras 8 y 9). En los últimos dos casos el estado en el punto  $P$  no depende de las condiciones del flujo aguas abajo. Estas afirmaciones sobre la dependencia de las condiciones de flujo del punto  $P$  se refieren sólo a un entorno del punto  $P$ . Resumiendo lo anterior, puede verse que, para un modelo de fondo fijo, se necesitan dos condiciones de contorno aguas arriba cuando el flujo es supercrítico, y una aguas arriba y la otra aguas abajo cuando el flujo es subcrítico.

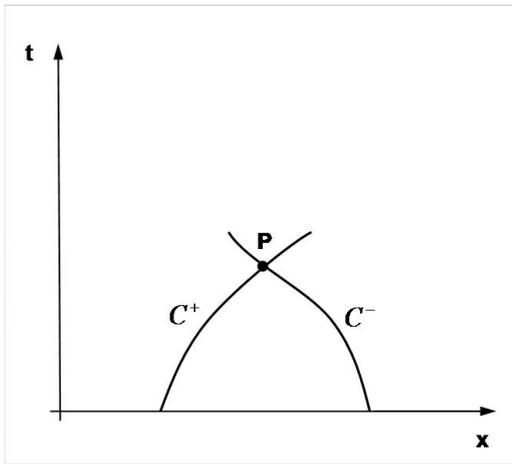


Figura 6: Características de un flujo subcrítico.

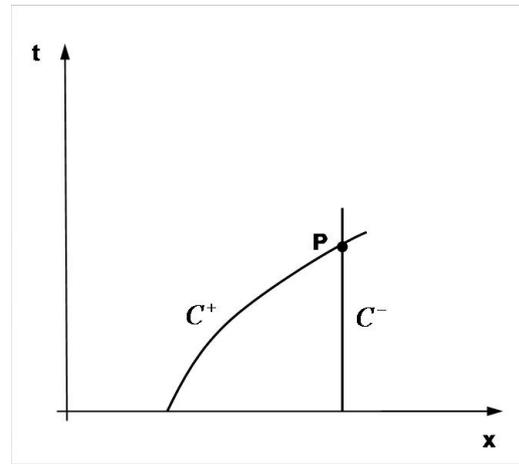


Figura 7: Características de un flujo crítico.

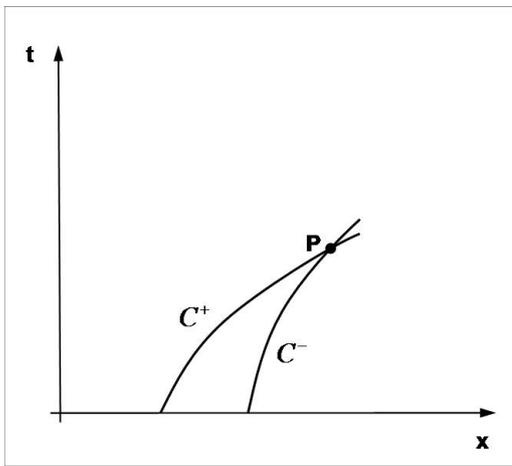


Figura 8: Características de un flujo supercrítico en dirección positiva.

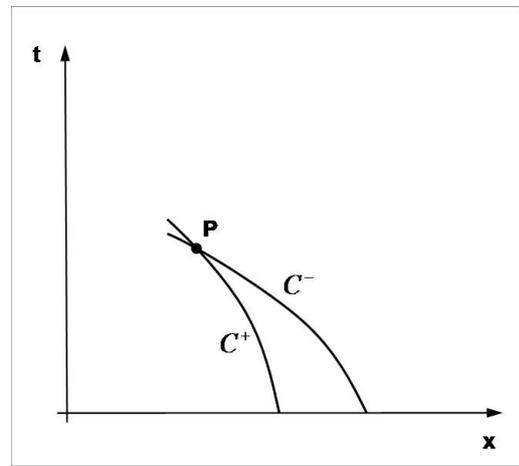


Figura 9: Características de un flujo supercrítico en dirección negativa.

## 2. MODELO HIDRODINÁMICO UNIDIMENSIONAL DE FONDO FIJO

---

Si queremos explicar con mayor formalidad esta última definición, podemos escribir el sistema de ecuaciones (1), (2) en forma vectorial (como un sistema no homogéneo de leyes de conservación); de esta forma, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{d},$$

donde  $\mathbf{w} = (u, h)^t$ ,  $\mathbf{F} = (\frac{u^2}{2+gh}, uh)^t$ ,  $\mathbf{d} = (\frac{-c_b u |u|}{h-g \frac{\partial e}{\partial x}}, 0)^t$ .

Si ahora tomamos  $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{w}}$ , estas ecuaciones también puede ser escritas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{d}$$

Hay que remarcar que el sistema de ecuaciones (1) y (2) forman un sistema estrictamente hiperbólico de ecuaciones en derivadas parciales; por lo tanto, el mismo tiene dos características reales, es decir, los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} u & g \\ h & u \end{vmatrix}$$

son reales (de hecho, los mismos son  $\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh}$ , como es bien conocido; entonces, los mismos son distintos -suponemos  $h > 0$ - y el sistema (1), (2) es estrictamente hiperbólico). Si los autovalores tienen distinto signo, el flujo es subcrítico, y, para el problema de las condiciones de contorno se necesita una condición de contorno en cada extremo del tramo en cuestión; si los autovalores tienen el mismo signo el flujo es supercrítico, y ambas condiciones de contorno son necesarias en uno de los puntos extremos (el izquierdo, si  $u$  es positivo, y el derecho, si  $u$  es negativo). Ocurre una transición cuando el flujo pasa de un régimen supercrítico a uno subcrítico o viceversa. Como ya hemos visto, cuando se mantiene  $u = \pm \sqrt{gh}$  el flujo es crítico. En este caso, ocurre un fenómeno especial; en particular, uno de los autovalores es cero, y la matriz  $\mathbf{A}$  es singular.

Desde el punto de vista experimental y numérico, una transición de un flujo subcrítico a uno supercrítico (o de uno supercrítico a uno subcrítico) modifica el número de condiciones de contorno en un punto extremo de una a dos o de una a cero (o de cero a una o de dos a una), con lo cual este fenómeno aparenta ser muy inconveniente. Por un lado, si uno, con un método numérico lo suficientemente bueno, está tratando de modelar un río o canal en régimen “casi” crítico, no conociendo, a priori, si el tipo de flujo cambiará o no, y, si el régimen se modifica, tener certeza de cuándo sucederá

este cambio, resulta muy difícil implementar un conjunto de condiciones de contorno distintas durante la ejecución de una simulación en modo automático. Por otro lado, la construcción de tales condiciones de contorno puede resultar poco trivial y generalmente se hace difícil obtener datos realistas.

### 3. Modelo Hidrodinámico Unidimensional de Fondo Móvil

El transporte del sedimento y el flujo del agua están interrelacionados de forma tal que no pueden ser completamente disociados. Existen numerosas formulaciones que expresan la interrelación de estos dos fenómenos en situaciones de inestabilidad; la descripción matemática más simple para representar el flujo de aguas poco profundas unidimensional inestable gradualmente variado sobre canales prismáticos rectangulares de ancho unitario con superficie libre (ver figura 10) es la que se resume en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial(h+e)}{\partial x} + c_b \frac{u|u|}{h} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

donde ahora  $G = G(u(t, x), h(t, x))$  es el caudal sólido por unidad de ancho y  $c_b$  es un coeficiente de resistencia adimensional, el cual depende de la rugosidad del fondo y se relaciona convenientemente con  $D$ , como se podrá ver en la subsección 9.9.1.

Las ecuaciones (3) y (4) representan la conservación de cantidad de movimiento y de continuidad, respectivamente, para un canal prismático rectangular y se obtienen realizando unos pocos cambios algebraicos en las ecuaciones (1) y (2), mientras que la ecuación (5) representa la conservación de la masa sólida.

El conjunto de ecuaciones (3)-(5) une las tres funciones de incógnitas  $u(t, x)$ ,  $h(t, x)$  y  $e(t, x)$  con las variables independientes  $x$  y  $t$ . Las mismas incorporan una serie de hipótesis que involucran tanto al transporte del

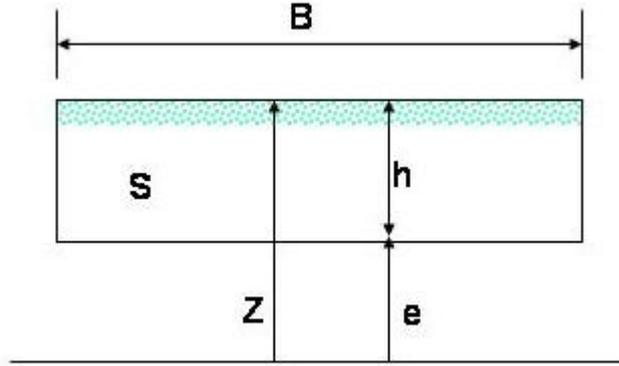


Figura 10: Sección transversal de un canal rectangular.

flujo del agua (hipótesis de Saint-Venant presentadas en la sección anterior) como del sedimento. El fenómeno de la erosión y el depósito del material sólido son de naturaleza tridimensional debido a las corrientes secundarias, pero la simulación de este fenómeno es compleja, por lo que el transporte del sedimento, así como el del flujo de agua, es esquematizado como un fenómeno unidimensional para el propósito del modelado.

Se puede observar que si el canal es rectangular, pero no necesariamente prismático, las ecuaciones se mantienen con una leve modificación originada en la introducción en la sección transversal de  $B(x)$ , el ancho del canal, en las ecuaciones (4) y (5); más concretamente, tenemos

$$\frac{\partial Bh}{\partial t} + \frac{\partial Buh}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Be}{\partial t} + \frac{\partial BG}{\partial x} = 0.$$

A pesar de que este caso es más general, vamos a utilizar la forma más simple (3), (4), (5) para facilitar los cálculos. Si el canal no es rectangular (representado por las ecuaciones (1) y (2)), la situación es más complicada. Hay que tener en cuenta que este sistema de ecuaciones asume que las partículas no pueden estar en suspensión, ni pueden ser resuspendidas o depositarse; tal modelo necesita una ecuación adicional para la difusión de

partículas suspendidas, como se puede ver en [GRJ/84].

Existen varias fórmulas empíricas para  $G$ , ya que la física de la interfaz entre el líquido y el lecho del canal aún no ha sido totalmente comprendida; en términos de ingeniería, estas ecuaciones reciben el nombre de “bedload equations”; básicamente toman en consideración que hay un umbral de tensión de corte en el lecho del canal, debajo del cual el fondo es fijo, y que el caudal sólido aumenta de forma monótona cuando esta tensión se encuentra por sobre dicho umbral. Además, el caudal sólido y la tensión de corte tienen el mismo signo que el de la velocidad. Una ecuación de transporte simple y comúnmente utilizada es la ecuación de Meyer-Peter y Müller

$$\begin{cases} G = \chi(|\tau| - \tau_0)^{\frac{3}{2}} \text{ signo } \tau & \text{si } |\tau| \geq \tau_0, \\ G = 0 & \text{si } |\tau| < \tau_0, \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\chi = \frac{8}{(g\rho^{\frac{1}{2}}\Delta\rho p)}$ ,  $\rho$  es la densidad del agua,  $\Delta\rho = \rho_b - \rho$ ,  $\rho_b$  y  $p$  son la densidad y porosidad del material del lecho, respectivamente,  $\tau$  es la tensión de corte transmitida por el fluido hacia el lecho y  $\tau_0$  el umbral de tensión de corte del material del lecho.  $\tau$  es computado de la siguiente forma:

$$\tau = \rho c_b u |u|.$$

Para el coeficiente de resistencia  $c_b$  se puede utilizar la fórmula de Strickler, la cual es

$$c_b = \Lambda \left( \frac{d_m}{h} \right)^{\frac{1}{3}},$$

donde  $\Lambda \approx \frac{g}{441}$  es una constante empírica adimensional, y  $d_m$  es el diámetro representativo de las partículas del lecho. Meyer-Peter y Müller [MPM/48] desarrollaron en 1948 esta ecuación de transporte de sedimento basándose en datos experimentales utilizando sedimentos uniformes y heterogéneos con diámetros comprendidos entre 0,4 mm y 28,65 mm. Dicha fórmula se dedujo a partir de la siguiente

$$Q_s^* = 8(\tau^* - \tau_{cr}^*)^{\frac{3}{2}},$$

donde los términos y factores están adimensionalizados y donde  $Q_s^*$  es el caudal sólido por unidad de ancho adimensionalizado;  $\tau^*$  es la tensión de corte adimensionalizada,  $\tau_{cr}^*$  es la tensión de corte crítica adimensional a partir de la cual comienza el movimiento del suelo. Meyer-Peter y Müller asignan a  $\tau_{cr}^*$  el valor 0,047.

La adimensionalización del caudal sólido por unidad de ancho  $Q_s$  se obtiene, según la propuesta de Hans Albert Einstein [EIN/42], [EIN/50], dividiendo por  $(\frac{\Delta\rho}{\rho})^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}d_m^{\frac{3}{2}}$ , donde  $\Delta\rho = \rho_b - \rho$  es la diferencia entre la densidad del material sólido y la densidad del agua; en nuestro caso incorporamos también el factor  $p$ , porosidad del material, para tener en cuenta dicha porosidad (ver [GRA/68]).

La adimensionalización de la tensión de corte se obtiene, según propuso Shields, dividiendo la tensión de corte por  $\Delta\rho g d_m$ . Por consiguiente, la formula de Meyer-Peter y Müller, escrita ya en unidades SI, es

$$Q_s = \frac{8(\Delta\rho)^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}d_m^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}p} \left( \frac{\tau}{\Delta\rho g d_m} - 0,047 \right)^{\frac{3}{2}},$$

o sea

$$Q_s = \frac{8(\Delta\rho)^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}d_m^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}p} \left( \frac{\tau}{\Delta\rho g d_m} - \frac{\Delta\rho g d_m}{\Delta\rho g d_m} 0,047 \right)^{\frac{3}{2}},$$

y tomando factor común tenemos

$$Q_s = \frac{8(\Delta\rho)^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}d_m^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}(\Delta\rho)^{\frac{3}{2}}g^{\frac{3}{2}}d_m^{\frac{3}{2}}p} (\tau - \Delta\rho g d_m 0,047)^{\frac{3}{2}},$$

finalmente simplificando tenemos

$$Q_s = \frac{8}{\Delta\rho g \rho^{\frac{1}{2}}p} (\tau - \Delta\rho g d_m 0,047)^{\frac{3}{2}}.$$

Si ahora escribimos el sistema de ecuaciones (3), (4), (5) en forma vectorial,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = c(\mathbf{w}), \quad (7)$$

donde  $\mathbf{w} = (u(t, x), h(t, x), e(t, x))^t$ , es el vector de funciones incógnita, con condicion inicial

$$\mathbf{w}(t_0, x) = \mathbf{w}_0(x), \quad (8)$$

donde ahora  $\mathbf{w}_0(x) = (u_0(x), h_0(x), e_0(x))^t$ , se quiere probar que el sistema es hiperbólico, es decir que los tres autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  son reales, con

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} u & g & g \\ h & u & 0 \\ G_u & G_h & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

El sistema (7) también puede ser escrito en forma de ley de conservación,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial x} = c(\mathbf{w}),$$

donde ahora  $\mathbf{F} = (\frac{u^2}{2} + g(h + e), uh, G)^t$ . El lado derecho  $c$  es  $(\frac{-c_b u |u|}{h}, 0, 0)^t$ .

En [JAC/96] puede verse que el sistema (7), (8) es estrictamente hiperbólico y su matriz (9) siempre tiene dos autovalores positivos y uno negativo, cualquiera sea el tipo de flujo (subcrítico, crítico o supercrítico), y la matriz  $\mathbf{A}$  nunca es singular. Como siempre hay dos autovalores positivos y uno negativo, son siempre necesarias dos condiciones de contorno en el punto extremo izquierdo y una en el punto extremo derecho (suponiendo que el flujo va de izquierda a derecha), y no es necesario un cambio en el número de las condiciones de contorno al cambiar el tipo de flujo, ya sea de subcrítico a supercrítico o de supercrítico a subcrítico. Por lo tanto, se puede utilizar el mismo modelo numérico para los modelos subcrítico, supercríticos y de transición, siempre que exista movimiento en el lecho, es decir, siempre y cuando la tensión de corte transmitida por el fluido hacia el lecho sea mayor que el umbral.

## 4. Los Métodos en Diferencias Finitas

El origen del método de diferencias finitas es el siguiente: las funciones de argumentos continuos que describen el estado de un flujo son representadas por funciones definidas en un número finito de puntos de una grilla dentro del dominio considerado. Las derivadas son reemplazadas por divisiones de diferencias. Así las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo las leyes que describen la evolución de la ley de continuidad, son reemplazadas por relaciones algebraicas de diferencias finitas. Las diferentes maneras en las cuales las derivadas y las integrales son expresadas por funciones discretas son llamadas *esquemas de diferencias finitas*. La “grilla computacional” es un conjunto finito de puntos que comparten el mismo dominio en el plano  $(x, t)$  como argumentos de las funciones continuas. Este conjunto es el dominio de los argumentos discretizados de las funciones a las que llamamos *funciones de grilla*. Una grilla computacional típica para problemas unidimensionales

simples es la que se muestra en la figura 11. Esta grilla computacional puede ser equiespaciada (a lo largo del eje  $x$ ) en cuyo caso hay  $N - 1$  intervalos de espacio  $\Delta x$  iguales. Si la grilla no es uniforme, los intervalos de espacio  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$  son de longitud variable. En general la discretización a lo largo del eje  $x$  puede ser descrita simbólicamente por el conjunto de puntos  $w_j = \{x_j = j\Delta x, j = 1, 2, \dots, N; \Delta x_j = x_{j+1} - x_j\}$ . De la misma forma la discretización en el tiempo esta definida por el conjunto de puntos  $w_n = \{t_n = n\Delta t, n = 1, 2, \dots; \Delta t_n = t_{n+1} - t_n\}$ . La grilla computacional en el plano  $(x, t)$  para el problema unidimensional de flujo impermanente está entonces definida por el conjunto  $w = w_j \times w_n = \{(x_j, t_n); x_{j+1} = x_j + \Delta x_j; t_{n+1} = t_n + \Delta t_n; j = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots; \}$ . Este conjunto define los *puntos de discretización*. Una grilla computacional no uniforme es conveniente cuando uno desea refinar la representación de un fenómeno de interés en ciertas partes del dominio donde los parámetros del flujo y/o la geometría del canal pueden variar más rápidamente.

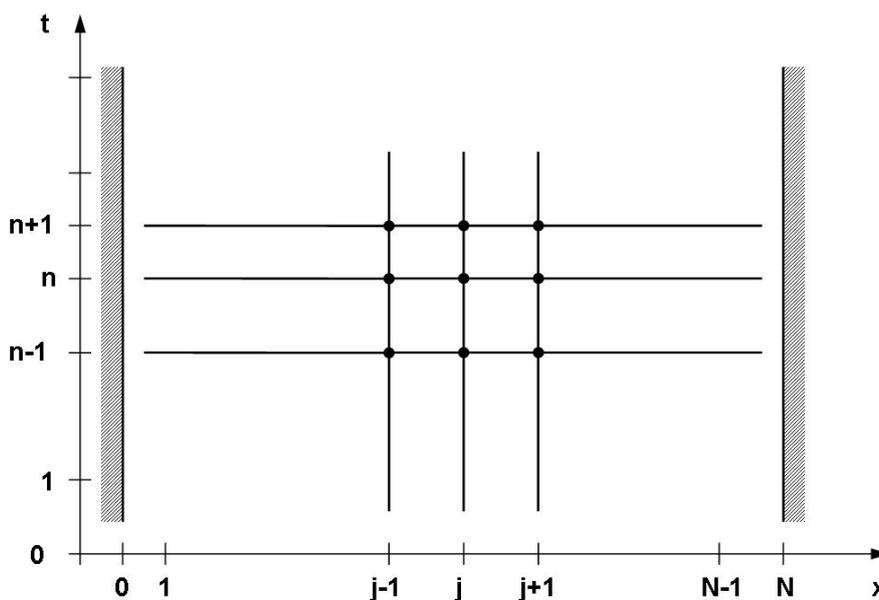


Figura 11: Grilla computacional de diferencias finitas.

Matemáticamente la definición de la derivada de una función continua  $f(x, t)$  es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x}. \quad (10)$$

Sin embargo, en diferencias finitas,  $\Delta x$  nunca es infinitamente pequeño; de hecho éste representa una longitud física finita de cierta importancia. El reemplazo de las expresiones diferenciales por sus análogas diferencias finitas es una aproximación; el grado de dicha aproximación es el usualmente llamado “error de truncamiento” u “orden de aproximación”. Consideremos la función suficientemente derivable  $f(x, t)$ ; utilizando el desarrollo de la serie de Taylor hasta el tercer orden con resto de cuarto orden, uno puede encontrar el valor de la función en el punto  $x_j + \Delta x$  conociendo su valor en el punto  $x_j$ :

$$f(x_j + \Delta x, t_n) = f(x_j, t_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4), \quad (11)$$

donde  $O(\Delta x^4)$  agrupa todos los términos restantes, el primero de los cuales (intuitivamente el más grande) es una derivada de la función  $f$  multiplicada por  $\Delta x^4$ . Llamamos a estos términos “términos de mayor orden”, en este caso “términos de cuarto orden”.

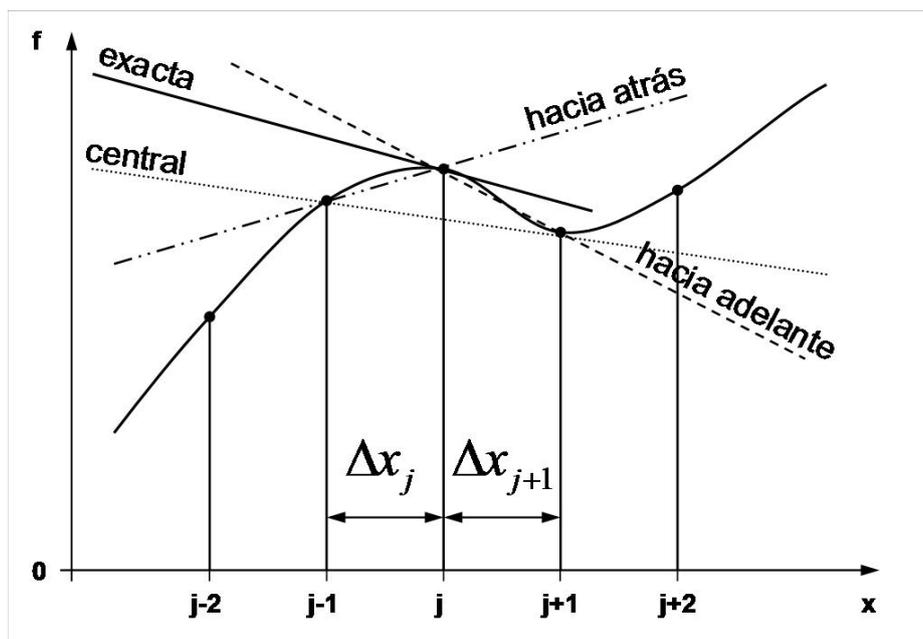


Figura 12: Derivada de una función y sus distintas aproximaciones.

La idea detrás de las aproximaciones de diferencias finitas es tomada directamente de la definición de la derivada (10). Una interpretación geométrica es la que se puede apreciar en la figura 12, donde la primera

derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}$  es la pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en el punto  $j$ ; gráficamente es la línea marcada como “exacta” en la figura. Su pendiente puede ser aproximada por la pendiente de la línea que pasa a través de dos puntos cercanos en la misma curva. La derivada en  $x_i$  es aproximada por la pendiente de la línea que pasa por el punto  $x_i$  y por el punto  $x_i + \Delta x$  (representado por la línea de nombre “hacia adelante” en la figura). De la misma forma, la línea de nombre “hacia atrás” tiene como segundo punto  $x_i - \Delta x$ . Mientras que la línea de nombre “central” utiliza la pendiente de una línea que pasa por dos puntos ubicados en lados opuestos al punto sobre el cual la derivada es aproximada. Se hace evidente en la figura (12) que unas aproximaciones son mejores que otras; también es notorio que la calidad de la aproximación mejora cuando los puntos adicionales están cerca de  $x_i$ .

Para formalizar las aproximaciones antes mencionadas de la primera derivada en el punto  $x_i$ , se realiza una manipulación algebraica del desarrollo de la serie de Taylor descrito en la ecuación (11), obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}, t) - f(x_i, t)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_i, t) - f(x_{i-1}, t)}{x_i - x_{i-1}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}, t) - f(x_{i-1}, t)}{x_{i+1} - x_{i-1}},$$

las cuales representan las aproximaciones de diferencia hacia adelante (de orden  $O(\Delta x)$ ), hacia atrás (también de orden  $O(\Delta x)$ ) y centrales (de orden  $O(\Delta x^2)$ ), respectivamente.

## 5. El Método de Preissmann

Entre los métodos en diferencias finitas implícitas se destaca el esquema de Preissmann [PRE/61]; un esquema de cuatro puntos, extensamente utilizado en ríos desde su formulación en los años 60. Es un esquema que proporciona resultados extraordinariamente precisos en régimen lento, con una gran velocidad de cálculo, y que permite utilizar grandes incrementos de espacio y de tiempo. Los esquemas implícitos se han utilizado también para flujo rápidamente variable, aunque entonces el incremento de tiempo

debe reducirse hasta valores similares a los de los esquemas explícitos para representar las discontinuidades. De todos modos, no es recomendable utilizar métodos en diferencias finitas implícitas cuando se quiere modelizar discontinuidades (por ejemplo, una onda de choque en el caso de rotura de brusca de dique), dado que los métodos implícitos suavizan discontinuidades.

Sea  $f_i^n$  la aproximación de una función suficientemente derivable  $f$  en el punto  $(x_i, t^n)$  de una grilla. El método de Preissmann consiste en discretizar una función y sus derivadas del siguiente modo:

$$f(x, t) \approx \frac{\theta(f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1})}{2} + \frac{(1 - \theta)(f_i^n + f_{i+1}^n)}{2} = \frac{\theta}{2}(\Delta f_i^n + \Delta f_{i+1}^n) + \frac{(f_i^n + f_{i+1}^n)}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\theta(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})}{\Delta x} + \frac{(1 - \theta)(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x} = \theta \left( \frac{\Delta f_{i+1}^n - \Delta f_i^n}{\Delta x} \right) + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1} - f_{i+1}^n - f_i^n}{2\Delta t} = \frac{\Delta f_{i+1}^n + \Delta f_i^n}{2\Delta t},$$

donde  $\Delta f_i^n = f_i^{n+1} - f_i^n$  y  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Teniendo en cuenta que si uno tiene una función no lineal de la incógnita  $f$  dada por  $g(f)$  uno puede hacer un desarrollo de Taylor de primer orden, entonces se puede reemplazar  $\Delta g(f)_i^n$  por  $(\frac{\partial g}{\partial f})_i^n \Delta f_i^n$ ; si la función es de dos variables, por ejemplo  $g(f, h)$ , se tendrá  $\Delta g(f, h)_i^n = (\frac{\partial g}{\partial f})_i^n \Delta f_i^n + (\frac{\partial g}{\partial h})_i^n \Delta h_i^n$ .

Para sistemas hiperbólicos lineales discretizados de acuerdo con el método de Preissmann puede probarse que  $\theta$  debe ser mayor o igual que  $1/2$  de forma de garantizar la estabilidad del método, la demostración puede verse, por ejemplo, en [JAC/88]. Este argumento se extiende a los sistemas hiperbólicos lineales de cualquier número de variables. A pesar de que para el caso general no-lineal la estabilidad del método de Preissmann con  $\theta \geq 1/2$  no está asegurado, sin embargo, existe evidencia empírica que muestra que en la mayoría de los casos normales el método es estable para las ecuaciones de Saint-Venant con  $\theta \geq 1/2$ .

Dado que tenemos un sistema hiperbólico con valores de condiciones de contorno, resulta útil mencionar algunos comentarios sobre las características de un método numérico de diferencias finitas utilizado como método implícito y su relación con las condiciones de contorno. Un esquema de diferencias

finitas lineal para un sistema mixto de valores de contorno iniciales de ecuaciones diferenciales parciales puede ser representado por medio de un sistema lineal de la forma

$$B_1^{n+1}w^{n+1} = B_0^n w^n + p^n \quad (12)$$

donde  $w^n$  es el vector de variables conocidas (en nuestro caso,  $e_i^n$ ,  $h_i^n$  y  $u_i^n$  en los puntos de discretización  $x_i$  donde los estamos computando) en el tiempo actual  $t^n$ ,  $B_1^{n+1} = B_1^{n+1}(\Delta x, \Delta t)$  y  $B_0^n = B_0^n(\Delta x, \Delta t)$  son funciones lineales originadas del reemplazo de las derivadas por diferencias finitas, y  $p^n$  es un vector conocido que incluye la discretización de las condiciones de borde y el lado derecho  $c(w)$  de la ecuación (7) (en nuestro caso, el término de resistencia). Se utilizó la notación de Richtmyer y Morton [RIM/67]. El sistema es definido como explícito si  $B_1^{n+1} = I$ , la matriz identidad, para todo  $n$  e implícito si  $B_1^{n+1} \neq I$ . Generalmente, para un método implícito es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones en cada paso del tiempo (el sistema (12)) y este inconveniente es compensado con el hecho de que la condición de Courant [CFL/67] se satisface; por lo tanto, podemos utilizar un intervalo de tiempo mayor que con un método explícito. Pero la condición de Courant no se satisface necesariamente para el problema de valores de contorno iniciales, a pesar de que el método sea implícito: se debe tener cuidado en consideración a las condiciones de contorno. Sí, por ejemplo, tenemos una ecuación escalar lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

con  $a > 0$ , la condición de contorno debe darse en el punto extremo izquierdo, por que las características van hacia la derecha cuando el tiempo incrementa. El método de Preissmann es implícito, con la definición usualmente aceptada; aplicada a la ecuación (13) obtendremos

$$u_{i+1}^{n+1} \left(1 + \frac{2a\theta\Delta t}{\Delta x}\right) + u_i^{n+1} \left(1 - \frac{2a\theta\Delta t}{\Delta x}\right) = u_{i+1}^n \left(1 - (1-\theta) \frac{2a\Delta t}{\Delta x}\right) + u_i^n \left(1 + (1-\theta) \frac{2a\Delta t}{\Delta x}\right).$$

Con una condición de contorno dada en el punto de borde derecho podríamos resolver el problema numérico utilizando el final aguas abajo  $x_N$ , donde el valor es la condición de contorno impuesta, recursivamente para los valores de  $i$  decrecientes. Pero el esquema sería inestable, ya que el dominio de dependencia del punto dado  $(x_i, t^n)$  (el cual es, en nuestra ecuación escalar (13), la característica  $x - x_i = a(t - t^n)$  con  $x < x_i$ ,  $t_0 \leq t < t^n$ ) no estaría incluido en el dominio numérico de dependencia, el cual es el rectángulo  $x_i \leq x \leq x_N$ ,  $t_0 \leq t \leq t^n$ .

Para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, diagonalizamos el sistema: las condiciones de contorno deben ser dadas en los puntos extremos adecuados en teoría; si no, tendríamos el mismo problema que tuvimos con la ecuación (13). El análisis no lineal es en general muy difícil, sobre todo para sistemas con más de dos ecuaciones, como el nuestro. (en los Lemas 1 y 2 citados en [JAC/91], se garantiza cuántas condiciones de contorno son necesarias en los puntos extremos aguas arriba y aguas abajo, pero no dicen nada al respecto de cuáles son esas condiciones, dado que no todas las condiciones de contorno son necesariamente admisibles). Por esta razón, nuestra aproximación es numérica: se desarrolló un esquema numérico que admite diferentes condiciones de contorno y se analizaron los resultados numéricos.

## 6. Discretización de las Ecuaciones de Saint-Venant

Utilizando el método de Preissmann descrito en el apartado anterior, podemos discretizar las ecuaciones de Saint-Venant para fondo móvil; por consiguiente la ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial (h + e)}{\partial x} + c_b \frac{u|u|}{h} = 0$$

con  $c_b = \Lambda(d_m/h)^{1/3}$ , se discretiza como

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta u_{i+1}^n + \Delta u_i^n}{2\Delta t} + \frac{\theta(2u_{i+1}^n \Delta u_{i+1}^n - 2u_i^n \Delta u_i^n)}{\Delta x} + \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_i^n)^2}{\Delta x} + \\ & \quad g\theta \frac{\Delta h_{i+1}^n - \Delta h_i^n + \Delta e_{i+1}^n - \Delta e_i^n}{\Delta x} + \\ & \quad g \frac{h_{i+1}^n - h_i^n + e_{i+1}^n - e_i^n}{\Delta x} + \frac{\theta \Lambda d_m^{1/3}}{2} \left( \frac{2|u_i^n| \Delta u_i^n}{(h_i^n)^{4/3}} + \frac{2|u_{i+1}^n| \Delta u_{i+1}^n}{(h_{i+1}^n)^{4/3}} - \right. \\ & \quad \left. \frac{4u_i^n |u_i^n| \Delta h_i^n}{3(h_i^n)^{7/3}} - \frac{4u_{i+1}^n |u_{i+1}^n| \Delta h_{i+1}^n}{3(h_{i+1}^n)^{7/3}} \right) + \\ & \quad \frac{\Lambda d_m^{1/3}}{2} \left( \frac{u_i^n |u_i^n|}{(h_i^n)^{4/3}} + \frac{u_{i+1}^n |u_{i+1}^n|}{(h_{i+1}^n)^{4/3}} \right) = 0. \end{aligned}$$

De la misma forma, la ecuación de conservación de la masa líquida

$$\frac{B\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Buh}{\partial x} = 0,$$

se discretiza como

$$\frac{B_{i+1}\Delta h_{i+1} + B_i\Delta h_i}{2\Delta t} + \theta \left( \frac{B_{i+1}h_{i+1}^n \Delta u_{i+1}^n - B_i h_i^n \Delta u_i^n}{\Delta x} + \frac{B_{i+1}u_{i+1}^n \Delta h_{i+1}^n - B_i u_i^n \Delta h_i^n}{\Delta x} \right) + \frac{B_{i+1}u_{i+1}^n h_{i+1}^n - B_i h_i^n u_i^n}{\Delta x} = 0.$$

Análogamente la ecuación de conservación de masa sólida

$$\frac{\partial B e}{\partial t} + \frac{\partial B G}{\partial x} = 0,$$

se discretiza como

$$\frac{B_{i+1}\Delta e_{i+1} + B_i\Delta e_i}{2\Delta t} + \theta \left( \frac{B_{i+1}\Delta G_{i+1}^n - B_i\Delta G_i^n}{\Delta x} \right) + \frac{B_{i+1}\Delta G_{i+1}^n - B_i\Delta G_i^n}{\Delta x} = 0,$$

y como  $G = G(u(t, x), h(t, x))$ , esta última ecuación se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{B_{i+1}\Delta e_{i+1} + B_i\Delta e_i}{2\Delta t} + \theta \left( \frac{B_{i+1}(\frac{\partial G}{\partial u})_{i+1} \Delta u_{i+1}^n - B_i(\frac{\partial G}{\partial u})_i \Delta u_i^n}{\Delta x} + \frac{B_{i+1}(\frac{\partial G}{\partial h})_{i+1} \Delta h_{i+1}^n - B_i(\frac{\partial G}{\partial h})_i \Delta h_i^n}{\Delta x} \right) + \frac{B_{i+1}\Delta G_{i+1}^n - B_i\Delta G_i^n}{\Delta x} = 0,$$

donde en todas las ecuaciones  $\Delta x$  representa la distancia entre los puntos  $x_{i+1}$  y  $x_i$ , y  $\Delta t$  es el intervalo temporal entre los instantes  $t_{n+1}$  y  $t_n$ .

Las incógnitas a resolver al pasar del tiempo  $t^n$  al tiempo  $t^{n+1}$  son entonces  $\Delta u_i^n, \Delta h_i^n, \Delta e_i^n$ , para todos los valores  $i$ . Para cada intervalo  $i, i + 1$  hay tres ecuaciones (las discretizaciones de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, de conservación de masa líquida y de conservación de material de fondo) que involucran las seis variables  $\Delta u_i^n, \Delta h_i^n, \Delta e_i^n, \Delta u_{i+1}^n, \Delta h_{i+1}^n, \Delta e_{i+1}^n$ . Por lo tanto, si ahora multiplicamos por  $2\Delta t$  estas tres ecuaciones discretizadas, de forma de disminuir el error numérico que se puede producir al dividir un número muy grande por otro muy pequeño, al reagruparlas nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{i,1,1}\Delta e_i + a_{i,2,1}\Delta h_i + a_{i,3,1}\Delta u_i + a_{i,4,1}\Delta e_{i+1} + a_{i,5,1}\Delta h_{i+1} + a_{i,6,1}\Delta u_{i+1} &= a_{i,7,1}, \\ a_{i,1,2}\Delta e_i + a_{i,2,2}\Delta h_i + a_{i,3,2}\Delta u_i + a_{i,4,2}\Delta e_{i+1} + a_{i,5,2}\Delta h_{i+1} + a_{i,6,2}\Delta u_{i+1} &= a_{i,7,2}, \\ a_{i,1,3}\Delta e_i + a_{i,2,3}\Delta h_i + a_{i,3,3}\Delta u_i + a_{i,4,3}\Delta e_{i+1} + a_{i,5,3}\Delta h_{i+1} + a_{i,6,3}\Delta u_{i+1} &= a_{i,7,3}; \end{aligned}$$

donde los valores de los coeficientes  $a_{i,k,j}$  son, por ejemplo, para la segunda ecuación (o sea los coeficientes  $a_{i,k,2}$ ):

$$a_{i,1,2} = 0,$$

debido a que  $\Delta e$  no figura en el desarrollo,

$$a_{i,2,2} = \left(1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x}\theta u_i^n\right)B_i,$$

y continuando

$$a_{i,3,2} = -2\frac{\Delta t}{\Delta x}\theta h_i^n B_i,$$

y así sucesivamente para el resto de los coeficientes.

## 7. Resolución del Método de Preissmann Mediante Generación de una Matriz Banda

En este tipo de aplicaciones, con frecuencia hay que resolver sistemas lineales de gran dimensión, donde la matriz del sistema suele ser una *matriz rala* (con muchos ceros). En ocasiones, además, la matriz tiene todos sus elementos nulos fuera de una estrecha banda en torno a la diagonal principal; es decir, los elementos no nulos se encuentran en la diagonal principal y en las diagonales próximas por encima y por debajo; este tipo de matrices recibe el nombre de “matrices banda”. Es el caso de la matriz  $B_1^{n+1}$  de la ecuación (12), la cual posee una estructura simple de bloques diagonales: cada bloque contiene 3 filas y 6 columnas, con la excepción del primer bloque que contiene 4 columnas (dadas por el hecho de que hay dos condiciones de contorno correspondientes a dos columnas), y del último bloque, el cual contiene 5 columnas (dado por el hecho que sólo hay una condición de contorno, correspondiente a una columna); por lo que,  $B_1^{n+1}$  tiene la forma



donde  $y$  denota una de las incógnitas en el punto 0 *no* dada como condición de contorno, y  $A'_{0k3}$  y  $A'_{0k7}$  dependen de las condiciones de borde utilizadas. Análogamente, el ultimo bloque tiene la forma

$$A_{Nk1}\Delta e_N + A_{Nk2}\Delta h_N + A_{Nk3}\Delta u_N + A'_{Nk4}y_1 + A'_{Nk5}y_2 = A'_{Nk7},$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  denotan dos incógnitas *no* dadas como condiciones de contorno aguas abajo y  $A'_{Nk4}$ ,  $A'_{Nk5}$  y  $A'_{Nk7}$  dependen de las condiciones de borde aguas abajo utilizadas.

### 7.1. Tratamiento Numérico de las Condiciones de Contorno

Podemos apreciar cómo fueron introducidas las diferentes condiciones de contorno en las ecuaciones linearizadas (12). Si, por ejemplo, las condiciones de contorno son  $e$  y  $h$  aguas arriba y  $u$  aguas abajo, no es necesaria ninguna modificación de la matriz (14) en las primeras tres y últimas tres filas; los valores de las variables conocidas están incluidos en el lado derecho. Para las otras combinaciones de variables, se hace necesaria alguna manipulación; por ejemplo, si las condiciones de contorno dadas aguas arriba son  $e$  y  $Q$ , donde el caudal  $Q$  está dado por la fórmula  $Q(t, x) = u(t, x)h(t, x)$ , su aproximación de primer orden es de la forma

$$\Delta Q = u\Delta h + h\Delta u$$

de modo que  $A'_{0k7} = A_{0k7} - A_{0k2}\Delta Q/u$ ,  $A'_{0k3} = A_{0k3} - A_{0k2}h\Delta u/u$ . Se procede de la misma forma para otras condiciones.

## 8. Implementación Computacional

Se realizó un programa en lenguaje de programación Java versión 1.6.0\_01, el cual resuelve las ecuaciones de Saint-Venant para fondo móvil utilizando el método de Preissmann expuesto en las secciones anteriores, dadas unas condiciones iniciales, unas condiciones de contorno, una rugosidad y unos parámetros de cálculo. Luego, con los resultados obtenidos se genera una visualización que permite apreciar gráficamente la simulación del modelo para cada una de las variables calculadas a lo largo del tiempo de cálculo.

En líneas generales el programa cuenta con 2 rutinas principales:

- I. Rutina de resolución computacional;
- II. Rutina de graficación.

Haciendo una breve mención sobre Java, podemos decir que el mismo es un lenguaje de programación orientado a objetos desarrollado por Sun Microsystems a principios de los años 1990. El lenguaje en sí mismo toma mucha de su sintaxis de otros lenguajes como son C y C++. Pero Java se distingue de éstos últimos, ya que posee un modelo de objetos más simple y no hace uso de herramientas de bajo nivel como punteros.

Las aplicaciones Java están típicamente compiladas en un bytecode (un código intermedio más abstracto que el código máquina), aunque la compilación en código máquina nativo también es posible. En tiempo de ejecución, el bytecode es normalmente interpretado o compilado a código nativo para su ejecución por una “máquina virtual”, es decir, un software que crea un entorno virtual entre la plataforma de la computadora y el usuario final, permitiendo que se ejecute un software determinado.

### 8.1. Rutina de Resolución Computacional

Esta rutina está basada en el modelo matemático hidrodinámico unidimensional de aguas poco profundas con superficie libre y fondo móvil desarrollado por Jacovkis [JAC/96] y [JAC/00]. El mismo resuelve las ecuaciones de Saint-Venant para fondo móvil (3), (4), (5) mediante el esquema implícito de Preissmann ya descrito en secciones anteriores. La estructura de cálculo puede verse en la figura 13.

Entre los parámetros de entrada más relevantes que recibe el programa para realizar los cálculos se puede mencionar: tiempo inicial y final de cálculo, intervalo de tiempo  $\Delta t$ , número de puntos de discretización, es decir, la cantidad de secciones transversales del canal; y por cada una de éstas, se tiene:

- Posición (en  $km$ )
- Velocidad (en  $m/s$ )
- Tirante o altura desde el lecho hasta la superficie libre (en  $m$ )
- Cota de fondo (en  $m$ )

- Ancho del canal (en  $m$ )
- Umbral de tensión crítica de corte (en  $N/m^2$ )

Esta forma de representar el tramo del canal que se desea estudiar (por medio de cortes transversales) nos brinda la posibilidad de tener un  $\Delta x$  variable, utilizando la posición de cada sección en el tramo, sin la necesidad que las distancias entre dichas posiciones sean siempre las mismas.

Los archivos que contienen estos parámetros de entrada, así como también los archivos que contienen los resultados de la simulación (que luego serán leídos en la rutina gráfica), han sido estructurados cumpliendo el estándar XML, sigla en inglés de eXtensible Markup Language (lenguaje de marcas extensible); es un metalenguaje extensible de etiquetas desarrollado por el World Wide Web Consortium (W3C). El mismo no es realmente un lenguaje en particular, sino una manera de definir lenguajes para diferentes necesidades.

Para trabajar con estos archivos de forma más sencilla se ha utilizado una biblioteca de código fuente llamada JDOM (<http://www.jdom.org/>), desarrollada por el JDOM<sup>TM</sup>Project, y cuya funcionalidad principal es la manipulación de datos XML optimizados para el lenguaje Java, es decir, se utiliza para el modelado de documentos XML en objetos de Java y puede por lo tanto beneficiarse de las características dicho lenguaje, incluyendo sobrecarga de métodos, colecciones, etc. De esta forma, JDOM proporciona una manera simple de representar dicho documento para una lectura, manipulación y escritura eficientes.

Esta biblioteca nos facilitó el análisis sintáctico o “parsing” de los archivos de entrada, los cuales contienen las condiciones iniciales del sistema, condiciones de contorno, intervalo de tiempo, etc. ya mencionadas anteriormente. De igual forma, se utilizó esta biblioteca para la escritura del archivo XML con la salida de la simulación.

Para la construcción de los archivos de entrada se utilizó el programa Microsoft Excel, donde a partir de los datos de una corrida madre y la utilización de fórmulas propias de dicho programa que hacían referencia a otras celdas, se obtuvo la salida en formato XML. Esto también nos facilitó la construcción de corridas para las cuales se necesitaba insertar puntos intermedios, con una técnica de interpolación lineal, para lograr una mejor resolución alrededor del fenómeno que se deseaba observar, como es el caso

de la antiduna o de la prueba del funcionamiento del modelo como modelo de fondo fijo local.

Este archivo de salida contiene los datos que luego podrán ser leídos por la rutina de graficación. Entre los datos que contiene este archivo se destaca cada uno de los intervalos de tiempo de simulación (desde el tiempo inicial hasta tiempo final de cálculo o hasta el tiempo en el que el sistema finalice porque se volvió inestable), donde cada uno de ellos contiene, por cada punto de discretización las siguientes variables:

- Posición (en  $km$ )
- Velocidad (en  $m/s$ )
- Tirante (en  $m$ )
- Cota de fondo (en  $m$ )
- Caudal (en  $m^3/s$ )
- Cota (en  $m$ )
- Caudal sólido por unidad de ancho (en  $dm^2/s$ )
- Número de Froude (adimensional)
- Tensión crítica de corte (en  $N/m^2$ )

Por otro lado, este archivo también incluye los valores máximos y mínimos para cada una de las variables antes mencionadas a lo largo de todo el tiempo de simulación. Estos se utilizan para optimizar la visualización que se realiza en la rutina de graficación.

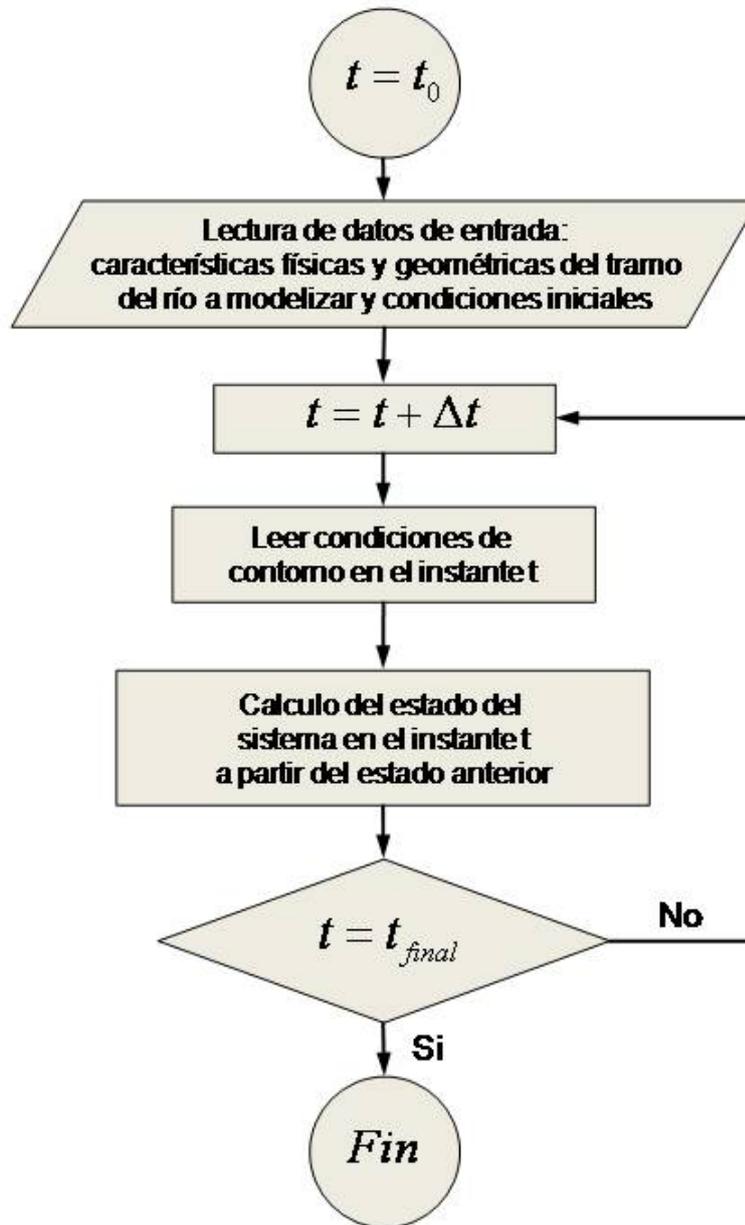


Figura 13: Diagrama de flujo mostrando los pasos principales de la rutina de resolución computacional.

## 8.2. Rutina de Graficación

El objetivo de la rutina de graficación es generar una visualización que permita apreciar y analizar gráficamente los resultados de la simulación para cada una de las variables calculadas, que fueron mencionadas en la sección anterior. El resultado de esta rutina puede apreciarse en la figura 14.

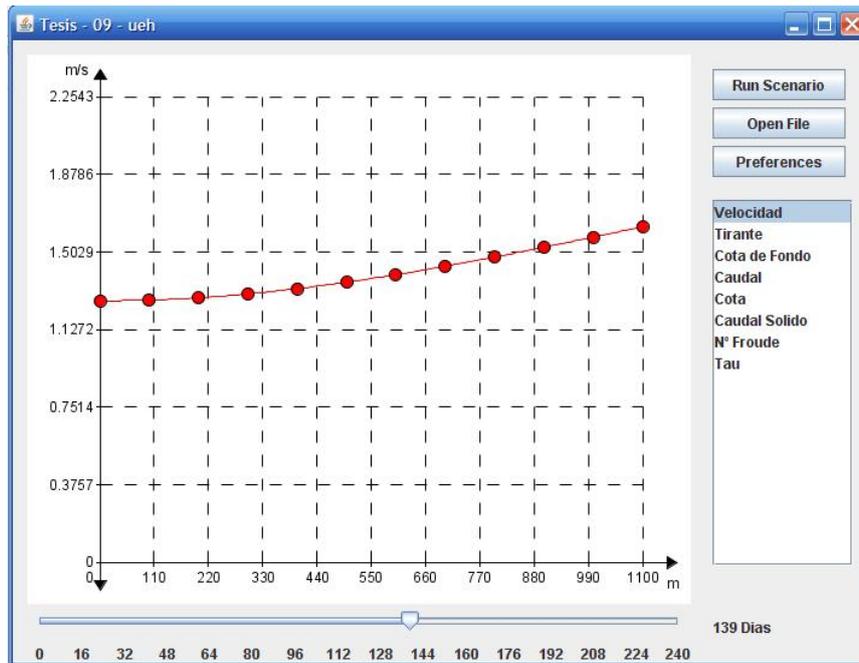


Figura 14: Imagen de la ventana que es resultado de la rutina de graficación.

A diferencia de la rutina de resolución computacional, donde los archivos de entrada con formato XML no resultaban complejos para su lectura, y donde las necesidades de memoria y tiempo de respuesta no eran fundamentales, en la rutina de graficación estos aspectos resultan primordiales para la interacción con el programa, más aun cuando el tamaño físico de los archivos que se deben leer superan con amplitud a los anteriores. Por este motivo, se debió analizar la posibilidad de basarse en una biblioteca de código fuente distinta para la manipulación de archivos XML, que nos brinde el rendimiento esperado.

El framework que nos permitió alcanzar este objetivo fue VTD-XML (Virtual Token Descriptor, <http://vtd-xml.sourceforge.net/>), creado por XimpleWare, cuyo diseño inicial surgió para mejorar significativamente el

rendimiento de proceso de archivos XML para que los routers y switches puedan inspeccionar a una alta velocidad el contenido XML.

El primer paso de la mayoría de los algoritmos que procesan XML generalmente extrae el contenido del documento fuente en muchos objetos discretos de secuencias de caracteres (en términos de un lenguaje de programación, en objetos de tipo String). En cambio, este framework propone una solución “no-extractiva” del contenido, la cual mantiene el documento fuente intacto en memoria. Utilizando una especificación de codificación binaria llamada “Virtual Token Descriptor” (VTD), este modelo representa cada extracto del documento exclusivamente usando la posición del texto en documento y su longitud, creando un estructura de índices por jerarquía de los extractos encapsulados en el documento XML.

Se ha utilizado, como soporte a la rutina de graficación, un conjunto de bibliotecas que facilitan el tratamiento de imágenes e interacción con las mismas. El framework utilizado recibe el nombre de “Piccolo” (<http://www.cs.umd.edu/hcil/jazz/>). Un conjunto de herramientas desarrollado por el Human-Computer Interaction Lab de la Universidad de Maryland–EEUU, las cuales brindan soporte en el desarrollo de programas gráficos estructurados en 2D y con una interfaz de usuario capaz de hacer “zoom in y zoom out” de la imagen, es decir, permite acercar y alejar el foco de la misma. Este framework de basa en un modelo de “gráfico-escénico”; esto significa que se mantiene una estructura jerárquica de los objetos y cámaras, permitiendo agrupar y manipular los mismos de forma significativa para esta funcionalidad.

El resultado del método descrito en el apartado anterior es una grilla de puntos para cada una de las variables (velocidad, tirante, cota de fondo, etc.). Cada punto representa una coordenada en los ejes horizontal y vertical para un determinado instante de tiempo; por ejemplo, en el caso del caudal, en cada instante de tiempo tenemos una coordenada por cada punto de discretización, las cuales indican la posición en el eje horizontal (espacio) y su respectivo valor en el eje vertical (en este caso, el valor de dicho caudal en ese punto medido en  $m^3/s$ ).

Finalmente, se utilizó una técnica de interpolación para estimar los valores intermedios entre los valores de los puntos conocidos. La técnica utilizada fue interpolar por medio de splines cúbicos, debido a que la misma proporciona una excelente aproximación a los puntos discretizados y su cálculo no resulta excesivamente complejo. Sobre cada intervalo  $\Delta x$ ; es decir,

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , el polinomio  $S$  está definido por un polinomio cúbico diferente. Sea  $S_i$  el polinomio cúbico que representa a  $S$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , por tanto:

$$S(x) \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1), \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2), \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n), \end{cases}$$

Los polinomios  $S_{i-1}$  y  $S_i$  interpolan el mismo valor en el punto  $x_i$ , es decir, se cumple:

$$S_{i-1}(x_i) = y_i = S_i(x_i), 1 \leq i \leq n - 1$$

por lo que se garantiza que  $S$  es continuo en todo el intervalo. Por otro lado, se tiene que  $S'_{i-1}$  y  $S'_i$  tienen el mismo valor en el punto  $x_i$ , por lo cual  $S'$  también es continua en todo el intervalo  $[x_0, x_n]$ , de forma que el polinomio  $S$  no tenga esquinas puntiagudas. Con estas dos propiedades se consigue que los segmentos cúbicos representen una función continua suave; ver figura 15.

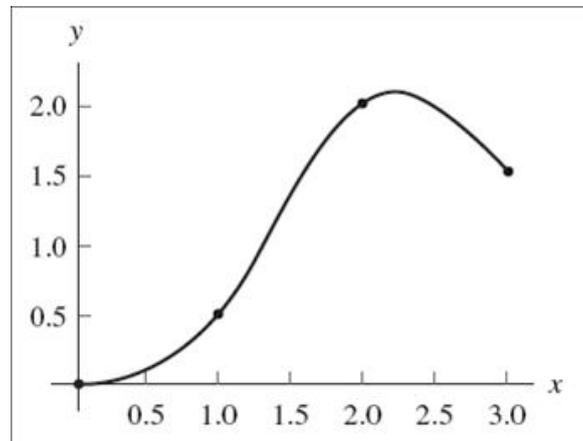


Figura 15: Spline cúbico natural con  $S''(0) = 0$  y  $S''(3) = 0$ .

Por último, se tiene que  $S''_{i-1}$  y  $S''_i$  también poseen el mismo valor en el punto  $x_i$  exceptuando los puntos extremos  $x_0$  y  $x_n$ , en los cuales  $S''_0 = S''_n = 0$ , lo cual implica que  $S''$  es continua en todo el intervalo y el radio de curvatura está definido sobre cada punto de discretización.

Es decir, un spline cúbico es  $C^2$  en todo el intervalo de trabajo y  $C^3$  en cada subintervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ .

Existen dos formas diferentes de visualizar los resultados de los archivos de entrada. La primera de ellas es ejecutando una corrida a partir de los datos de entrada, mencionados en la rutina de resolución computacional (condiciones iniciales, condiciones de contorno,  $\Delta t$ , etc.), y luego tomando el resultado de la misma para mostrarlo por pantalla; mientras que la segunda opción es tomar uno de estos archivos de salida generados por la rutina de resolución computacional y mostrarlo por pantalla.

Por otro lado, se diseñaron distintas opciones para el análisis de los resultados. Se puede elegir visualizar una sola variable o muchas de éstas a la vez, como se puede apreciar en la figura 17. Si la primera es la opción seleccionada, es decir la visualización de una única variable a la vez, se habilitan distintas opciones; como por ejemplo, si se desea ver las etiquetas con los valores de los puntos, si se desea que el gráfico esté dentro de una grilla, y para estas últimas dos opciones se puede definir si los valores y líneas estarán distanciadas por un valor específico (en función de los valores del gráfico en cuestión) o si estarán equiespaciados por un número fijo de puntos (ver figura 16). También se cuenta con una barra desplazable, la cual representa el tiempo de simulación. Esta permite “avanzar y retroceder” en el tiempo (por cada intervalo  $\Delta t$ ), con el fin de analizar los resultados obtenidos a lo largo del mismo con total libertad.

También se han desarrollado “etiquetas flotantes o tooltips”, las cuales se hacen visibles cada vez que uno se sitúa en un punto del gráfico por un pequeño intervalo de tiempo. En las mismas se puede apreciar las coordenadas del punto en función de la posición del punto en el canal (eje horizontal) y su valor en relación a la variable que se esté visualizando en ese momento (eje vertical), como se puede ver en la figura 18.

Por último, cabe mencionar que cada vez que se selecciona una variable para su visualización (con la opción de una única variable seleccionada) o cuando se modifica el tamaño de la ventana, se realiza un cálculo que ajusta el gráfico a los valores máximos y mínimos obtenidos para dicha variable en la rutina de resolución computacional, de forma de obtener una resolución lo más ajustada posible a las dimensiones de la ventana del programa.

En el caso de que la opción de múltiples variables sea la seleccionada, el gráfico de cada una de las variables seleccionadas toma un color diferente,

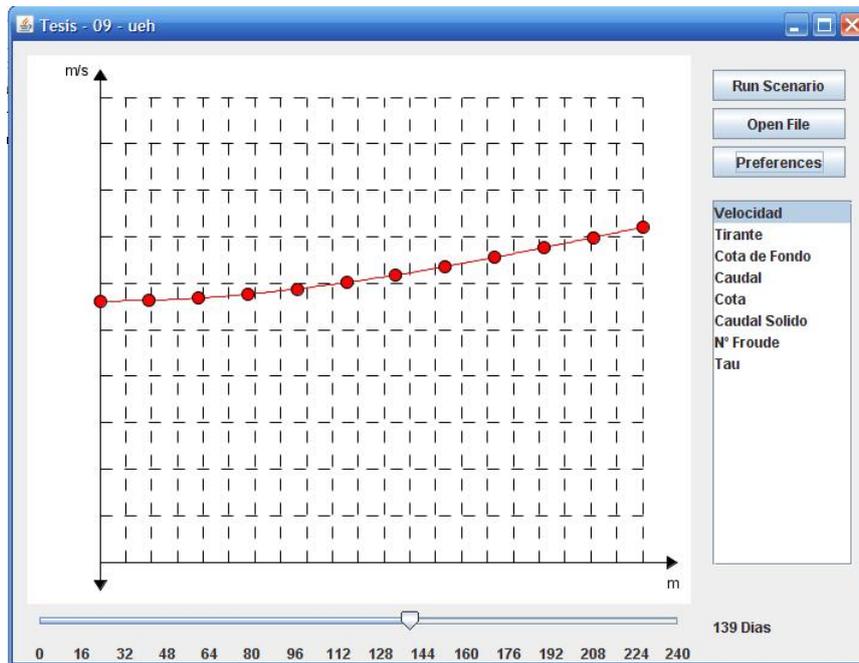


Figura 16: Gráfico con una grilla fija de 21 líneas que cortan el eje horizontal y 10 líneas el eje vertical.

los cuales también “pintan” sus respectivos nombres en la lista de variables; de esta forma se consigue mantener una referencia con el gráfico de cada una de éstas. Por otro lado, se realiza un cálculo para escalar los gráficos de todas las variables seleccionadas y que se puedan visualizar todas juntas en el mismo gráfico, sin que ninguna de éstas quede fuera del mismo. Si las variables seleccionadas tienen todas las mismas unidades, siguen habilitadas las opciones de visualización (etiquetas y grilla), como en el caso de una sola variable.

## 8. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

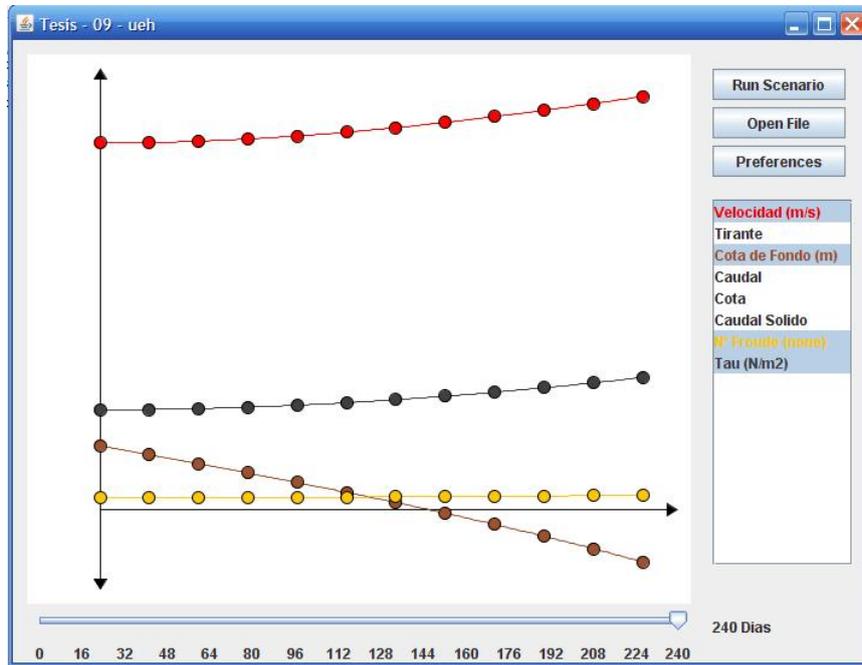


Figura 17: Gráfico con múltiples variables.

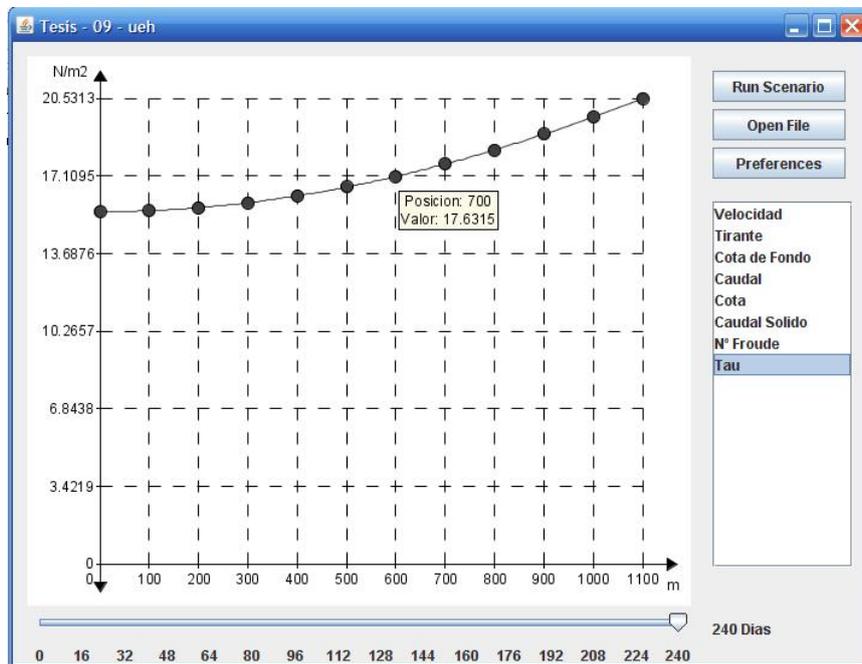


Figura 18: Imagen del tooltip.

### 8.3. Eficiencia Computacional

Si bien hemos mencionado que las necesidades de memoria y los tiempos de respuesta no son un aspecto importante para la rutina de resolución computacional y en cambio sí resultan fundamentales para la rutina de graficación, es bueno mencionar cómo se comportan estas dos rutinas en ambos ámbitos.

Cuando la capacidad de memoria de las computadoras era significativamente menor que la de las computadoras actuales, el procedimiento para manipular las condiciones de contorno era ir leyéndolas de memoria secundaria a medida que se necesitaban. No tiene sentido en este momento, al menos para modelos unidimensionales, ese tipo de enfoque, pues la memoria ha dejado de ser un recurso escaso. Sin embargo, en una generalización de este modelo en dos dimensiones, o eventualmente en tres dimensiones, no está claro si no se tiene que usar dicho procedimiento.

Este comentario vale para la rutina de resolución computacional, pero no para la rutina de graficación, donde los archivos pueden llegar a alcanzar, incluso en los modelos sencillos utilizados en esta tesis, los 100 MB de tamaño en memoria secundaria; y como dijimos, la lectura eficiente y veloz de estos archivos juega un aspecto fundamental a la hora de interactuar con el programa.

En cuanto a la memoria consumida por la rutina de resolución computacional, resulta complejo medirla mediante algún utilitario, debido a que el lenguaje de programación Java posee una herramienta encargada de la administración de la memoria llamado “Garbage Collector”, su nombre surge debido a que el mismo intenta recoger la “basura” (*garbage*), es decir, la memoria utilizada por los objetos que no volverán a ser accedidos o nuevamente reutilizados por la aplicación. El principio básico sobre el que funciona el Garbage Collector es: determinar cuáles son los objetos de un programa que no se accederán en el futuro y recuperar los recursos utilizados por dichos objetos. De esta forma, se hace innecesaria la liberación manual de la memoria, permitiendo al programador despreocuparse de liberar los objetos que ya no son necesarios, de lo contrario significaría un gran esfuerzo de diseño. También se puede decir que colabora con el programador en su esfuerzo de realizar programas más estables, ya que previene distintos tipos de errores en tiempo de ejecución. Por ejemplo, previene tener errores por punteros inválidos, donde se mantiene una referencia a un objeto que ha sido liberado (el puntero todavía hace referencia a una posición de memoria donde



donde *pts* es el número de puntos de discretización utilizados en la corrida, *inter* representa el número de veces que entra el intervalo  $\Delta t$  entre el tiempo inicial y final de simulación, las columnas siguientes del cuadro 2 representan el tiempo consumido por el método numérico (en *seg*), el tiempo consumido para la lectura y preparación del gráfico (en *seg*), el tiempo total de cálculo del programa (en *seg*), y finalmente, el tamaño físico en memoria secundaria del archivo de salida del método numérico (en *KB*), respectivamente. Los experimentos 1, 2, 3 y 4 representan las pruebas realizadas de antiduna, del funcionamiento del programa como modelo de fondo fijo local, una transición de régimen supercrítico a régimen subcrítico y el experimento de un régimen subcrítico sin transición, respectivamente, y los mismos serán analizados en detalle más adelante. Todas las ejecuciones fueron llevadas a cabo en una computadora con las siguientes características: CPU - Intel Pentium 4 2,80 *GHz*, Memoria - 1 *GB* RAM y Sistema Operativo - Windows XP Service Pack 2, y donde en cada caso, el tiempo que se muestra es el promedio de 8 ejecuciones para la misma corrida.

Como podemos apreciar en dicho cuadro, los tiempos de ejecución están relacionados directamente con la cantidad de puntos de discretización y la cantidad de intervalos de tiempo. Uno de los puntos destacables es el tiempo que demora la rutina de graficación en la lectura del archivo de memoria secundaria y la posterior preparación del gráfico final, el cual representa aproximadamente entre el 20 % y el 30 % del total del tiempo consumido.

## 9. Experimentos Numéricos

A continuación describiremos los distintos ensayos realizados para estudiar el funcionamiento del modelo utilizando distintas condiciones de contorno en régimen subcrítico, supercrítico y transicional; estados de flujo con pendientes estacionarias tanto en régimen subcrítico como en régimen supercrítico; la simulación del fenómeno de antiduna en régimen supercrítico y la verificación de la robustez del modelo en el sentido de que pueda funcionar como modelo de fondo fijo de forma local o globalmente.

En el cuadro 3 se pueden apreciar todas las combinaciones de condiciones de contorno aguas arriba y aguas abajo que se probaron en los distintos experimentos como se verá más adelante.

Combinación	Condiciones de Contorno		
	Aguas Arriba		Aguas Abajo
1	u	e	Z
2	u	e	e
3	u	e	u
4	h	e	h
5	u	h	h
6	Q	e	h
7	Z	e	h
8	u	e	h
9	Z	u	h
10	u	h	e
11	h	e	e
12	Z	h	h
13	Z	h	e
14	Q	e	u
15	Q	e	Q
16	Q	h	h
17	Q	u	h
18	h	e	u
19	h	e	Z
20	Q	e	Z
21	Z	e	u
22	Q	h	u
23	u	h	Q
24	u	h	Z
25	Q	e	e
26	u	h	u

Cuadro 3: Combinaciones de condiciones de contorno.

En los experimentos donde se probó más de una combinación de condiciones de contorno, de modo de asegurarnos que las corridas con diferentes combinaciones representan el mismo experimento físico, el procedimiento que se adoptó fue el siguiente: dadas dos corridas con diferentes condiciones de contorno la segunda corrida utilizó como valores para las nuevas condiciones de contorno los resultados obtenidos en la otra (por ejemplo, supongamos dos corridas que difieren en que la condición de contorno aguas abajo son  $u$  y  $h$ , respectivamente: por lo tanto, los resultados que se obtuvieron para  $h$  en el punto extremo aguas abajo con la primer corrida fueron utilizados como datos para  $h$  en la segunda corrida).

### 9.1. Transición de Régimen Subcrítico a Supercrítico

Uno de los experimentos realizados consistió en comenzar con un flujo en régimen subcrítico y luego arribar a un flujo en régimen supercrítico. Se pudo apreciar que, con las condiciones iniciales y de borde adecuadas, la transición de un flujo subcrítico a uno supercrítico fue posible para todas las combinaciones que se probaron, como veremos más adelante. En particular, se probó el modelo con todas las combinaciones “básicas”, es decir, las combinaciones cuyas condiciones de contorno son dos de las tres variables  $u$ ,  $h$ ,  $e$  aguas arriba y una de ellas aguas abajo, es decir, las combinaciones que se utilizaron en este experimento son las combinaciones 8, 10 y 18 del cuadro 3.

El modelo considerado consiste en un tramo de 1100 metros de longitud,  $x_0 = 0 \leq x \leq x_L = 1100$ . Cada sección transversal es rectangular, con un ancho unitario de 1 metro. La densidad relativa  $\rho_g/\rho$  del material sólido es 2,65, la porosidad del material es 0,6 y el diámetro principal de las partículas del fondo es 0,6 mm. El parámetro  $\Lambda$  fue tomado como  $g/441$ , como ya fue mencionado. Las condiciones iniciales para todos los puntos de discretización en el régimen subcrítico fueron:

- velocidad inicial: 0,4 m/s,
- altura inicial: 0,1 m,
- pendiente inicial: ésta se tomó de acuerdo a la fórmula  $-\partial e/\partial x = \Lambda d_m^{1/3} u^2 / (gh^{4/3})$ , la cual representa la pendiente de equilibrio para unos valores de  $u$  y  $h$  dados; en este caso, la pendiente utilizada fue  $6,5927 \times 10^{-4}$ ; con 10 metros de cota de fondo en el punto extremo aguas arriba.

El valor del umbral de tensión de corte crítico utilizado fue el sugerido por Meyer-Peter y Müller  $\tau_0 = 0,45646 N/m^2$ . Los valores de las condiciones iniciales fueron elegidos así, ya que de esta forma la tensión de corte ejercida sobre el lecho supera el umbral definido, y por lo tanto, la simulación comienza con un fondo móvil.

Cada ejecución consistió primero en alcanzar un estado de flujo subcrítico estacionario (en 20 días), y a partir de allí se modificaron las condiciones de borde con el objeto de eventualmente alcanzar un flujo supercrítico. La corrida madre tenía a la velocidad  $u$  y a la cota de fondo  $e$  como condiciones de contorno aguas arriba y a la altura del agua  $h$  como condición de contorno aguas abajo. Se mantuvo fijo el valor de  $e(t, x_0) = 10 m$  y de  $h(t, x_L) = 0,1 m$  durante toda la ejecución, y se mantuvo  $u(t, x_0) = 0,4 m/s$  por 20 días. Este tiempo es suficiente para verificar que con la pendiente inicial utilizada se alcanza un estado de flujo subcrítico estacionario. Luego, a partir de allí, se incrementó gradualmente el valor de  $u$  aguas arriba hasta alcanzar el valor de  $2 m/s$  al final del tiempo de simulación.

Ejecuciones exitosas requirieron de un tiempo de simulación total de un mínimo de 122 días, por el hecho de que, para probar que el modelo es posible, los estados inicial (subcrítico) y final (supercrítico) estaban muy lejos del régimen crítico. Las combinaciones 8 y 18 resultaron satisfactorias, es decir, se alcanzó una transición del flujo. Las mismas utilizaron 12 puntos de discretización ( $\Delta x = 100 m$ ), un tiempo total de simulación de 240 días y un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0,5$  días.

Como se puede apreciar en el cuadro 4, los resultados para estas dos combinaciones son muy similares en el tiempo final de simulación en el punto de discretización  $x = 500$  metros.

Comb.	$h$ ( $m$ )	$u$ ( $m/s$ )	$Z$ ( $m$ )	$e$ ( $m$ )	$Q$ ( $m^3/s$ )	$Q_s$ ( $dm^2/s$ )	Froude -
8	0.1095	2.0589	2.8312	2.7217	0.2254	1.6922	1.9866
18	0.1092	2.0494	2.9116	2.8024	0.2238	1.6706	1.9801

Cuadro 4: Estado final para algunas corridas en  $x = 500$  metros.

En cambio, para la combinación número 10 el modelo falló con las condiciones iniciales dadas. Sospechamos que esta falla se debe al hecho de

que las condiciones iniciales representan una pequeña perturbación de un modelo de fondo fijo, por lo cual la cota de fondo  $e$  no es aceptable como condición de contorno aguas abajo (el flujo inicial es subcrítico). Para esta combinación se cambiaron las condiciones iniciales a nuevas condiciones para las cuales no podemos decir que representan una perturbación de un modelo de fondo fijo, y los resultados fueron satisfactorios para las condiciones iniciales modificadas: se obtuvo la transición deseada. Como nuevas condiciones iniciales se tomaron, para todos los puntos de discretización, la velocidad  $u$  y la altura del agua  $h$  como  $1 \text{ m/s}$  y  $0,2 \text{ m}$ , respectivamente; para la pendiente del lecho se utilizó nuevamente la fórmula  $-\partial e/\partial x = \Lambda d_m^{1/3} u^2 / (gh^{4/3})$ , es decir, el correspondiente estado de pendiente estacionario. El nivel del lecho  $e$  decreció linealmente desde  $10 \text{ m}$  a  $8,2 \text{ m}$ , para estos datos. Se utilizaron 45 puntos de discretización y el intervalo de tiempo  $\Delta t$  fue  $0,01$  días. La simulación fue ejecutada por un lapso de 240 días y como valores de condiciones de contorno en el tiempo final, se utilizaron los valores obtenidos a partir de la combinación número 9. Finalmente, se obtuvo la transición de régimen subcrítico a supercrítico. En la figura 19 puede apreciarse el gráfico del número de Froude a los 240 días, y cómo todos los puntos de discretización superan la unidad; con lo cual el flujo es supercrítico.

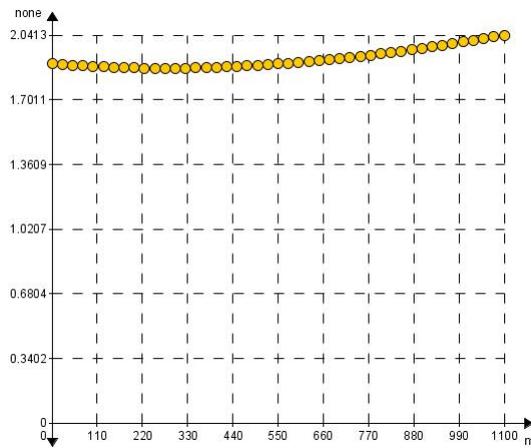


Figura 19: N° Froude a los 240 días.

## 9.2. Régimen Supercrítico Estacionario

Otra de las pruebas realizadas consistió en probar que el modelo pueda alcanzar un estado supercrítico estacionario; para ello se utilizó la combinación de condiciones de contorno número 8 (descrita en el cuadro 3).

Para llevar a cabo este experimento se continuó con la simulación realizada con dicha combinación en la sección 9.1 (transición de régimen subcrítico a supercrítico). La misma se ejecutó por un período de 330 días, manteniendo constante las condiciones de contorno a partir del día 240 en adelante. En la figura 20 se puede ver que la pendiente del lecho ha convergido a una pendiente constante, la cual es la pendiente de equilibrio para un flujo supercrítico estacionario con  $h = 0,10 \text{ m}$  y  $u = 2 \text{ m/s}$ . De hecho, la pendiente computada fue  $1,6482 \times 10^{-2}$ , y el estado estacionario teórico que se obtiene para la pendiente al aplicar la fórmula  $-\partial e/\partial x = \Lambda d_m^{1/3} u^2 / (gh^{4/3})$  es  $1,6481 \times 10^{-2}$ . El número de Froude es 2,0193 para todos los puntos de discretización. El número de Froude inicial era 0,4039 para todos los puntos de discretización.

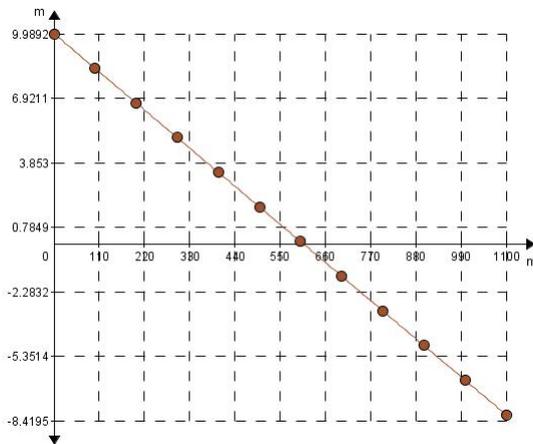


Figura 20: Cota de fondo con pendiente estacionaria para un régimen supercrítico.

### 9.3. Régimen Subcrítico sin Transición

Este experimento consistió en comenzar todas las corridas en régimen subcrítico y luego modificar las variables necesarias para que el número de Froude aumente, pero manteniendo el mismo por debajo de la unidad; es decir, no se las hizo transicionar a un régimen supercrítico.

El tramo analizado tenía una longitud de 10 kilómetros, y cada sección transversal consistía en un ancho de 100 metros; el umbral de tensión de corte crítico utilizado fue el sugerido por Meyer-Peter y Müller  $\tau_0 = 0,45646 \text{ N/m}^2$ . La velocidad y altura del agua iniciales tenían un valor de  $0,8 \text{ m/s}$  y  $1 \text{ m}$ ,

respectivamente, para todos los puntos de discretización, y cuya pendiente inicial era la pendiente de equilibrio para dichos valores, es decir,  $1,224 \times 10^{-4}$ , con una cota de fondo de 10 metros de altura en el punto extremo aguas arriba. Para estos valores iniciales, el número de Froude tenía un valor aproximado de 0,2554 en todos los puntos de discretización.

Todas las combinaciones que se probaron se basaron en una corrida inicial, cuyas condiciones de contorno eran la altura del agua y la cota de fondo aguas arriba y la velocidad aguas abajo, es decir, la combinación número 18 del cuadro 3. Dicha corrida consistió primero en alcanzar un estado de flujo subcrítico estacionario por un período de 10 días, y luego, a partir de allí, se aumentó el valor de la velocidad ( $u$ ) aguas abajo, hasta alcanzar los  $2 \text{ m/s}$  a los 360 días de simulación, manteniendo constantes los valores de la cota de fondo y altura del agua aguas arriba.

Se utilizaron 21 puntos de discretización para todas las combinaciones ( $\Delta x = 500$  metros), y exceptuando las combinaciones 2, 11, 13 y 25, para las cuales fue necesario utilizar un intervalo de tiempo de  $\Delta t = 0,01$  días, se utilizó un intervalo de tiempo de  $\Delta t = 0,5$  días.

Salvo para la combinación de condiciones de contorno número 10 del cuadro 3, para todo el resto de las combinaciones se obtuvieron resultados satisfactorios, como puede observarse en el cuadro 5. En dicho cuadro se han ordenado los resultados de las combinaciones en distintos grupos, de acuerdo a las variables que las mismas tienen en el punto extremo aguas abajo; por ejemplo, las combinaciones 2, 11, 13 y 25 tienen a la cota de fondo  $e$  como variable en dicho extremo o las combinaciones 3, 14, 18, 21, 22 y 26 tienen a la velocidad  $u$  en el punto mencionado. Se puede ver, que dentro de cada grupo, los resultados obtenidos son muy similares, es decir, que los mismos se rigen por la variable utilizada en el punto extremo aguas abajo.

Comb.	$h$ (m)	$u$ (m/s)	$Z$ (m)	$e$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Q_s$ (dm <sup>2</sup> /s)	Froude -
2	0.7135	1.1429	9.6641	8.9506	81.5439	9.0059	0.4320
11	0.7895	1.2464	9.7037	8.9142	98.4021	11.5423	0.4479
13	0.7895	1.2464	9.7037	8.9142	98.4021	11.5423	0.4479
25	0.7535	1.1978	9.6844	8.9309	90.2467	10.3096	0.4406
4	0.8727	0.9846	10.1607	9.2880	85.9303	4.5356	0.3365
5	0.8796	1.0261	10.1443	9.2648	90.2468	5.2994	0.3493
6	0.8792	1.0265	10.1443	9.2651	90.2468	5.3086	0.3495
7	0.8727	0.9846	10.1607	9.2880	85.9303	4.5356	0.3365
8	0.8744	1.0665	10.1076	9.2333	93.2507	6.1631	0.3641
9	0.8270	0.9085	10.1338	9.3068	75.1293	3.3964	0.3189
12	0.8727	0.9846	10.1607	9.2880	85.9303	4.5356	0.3365
16	0.8796	1.0261	10.1443	9.2648	90.2468	5.2994	0.3493
17	0.8796	1.0261	10.1443	9.2648	90.2468	5.2994	0.3493
15	0.9532	0.9467	10.2784	9.3252	90.2451	3.6519	0.3096
23	0.9589	0.9411	10.2876	9.3287	90.2452	3.5493	0.3068
3	0.8184	1.0998	9.9826	9.1643	90.0050	7.2034	0.3882
14	0.8163	1.1055	9.9795	9.1632	90.2473	7.3541	0.3907
18	0.8139	1.1088	9.9765	9.1626	90.2457	7.4476	0.3924
21	0.8140	1.1085	9.9770	9.1630	90.2322	7.4415	0.3923
22	0.8165	1.1053	9.9793	9.1629	90.2471	7.3479	0.3905
26	0.8165	1.1053	9.9793	9.1629	90.2471	7.3479	0.3905
1	0.7269	1.1427	9.7139	8.9870	83.0626	8.8998	0.4279
19	0.7878	1.2243	9.7550	8.9672	96.4426	10.8509	0.4404
20	0.7600	1.1874	9.7357	8.9757	90.2469	9.9455	0.4349
24	0.7600	1.1875	9.7357	8.9757	90.2465	9.9485	0.4349

Cuadro 5: Estado final para algunas corridas en  $x = 5000$  metros.

#### 9.4. Régimen Supercrítico sin Transición

Este experimento es un caso inverso al que se pudo observar en la sección 9.3; es decir, el mismo consistió en comenzar todas las corridas en régimen supercrítico y luego modificar las variables necesarias para que el número de Froude aumente, y la simulación finalice en un régimen supercrítico con un número de Froude mayor.

El tramo analizado posee las mismas características del experimento antes mencionado (sección 9.3), es decir, el mismo tenía una longitud de 10 kilómetros y cada sección transversal consistía en un ancho de 100 metros; el umbral de tensión de corte crítico utilizado fue el sugerido por Meyer-Peter y Müller  $\tau_0 = 0,45646 N/m^2$ . La velocidad y altura del agua iniciales tenían un valor de 3,5  $m/s$  y 1  $m$  respectivamente, para todos los puntos de discretización, y su pendiente inicial era la pendiente de equilibrio para dichos valores, es decir,  $2,3428 \times 10^{-3}$ , con una cota de fondo de 10 metros de altura en el punto extremo aguas arriba. Para estos valores iniciales, el número de Froude tenía un valor aproximado de 1,1174 en todos los puntos de discretización.

Todas las combinaciones que se probaron se basaron en una corrida inicial, cuyas condiciones de contorno eran la altura del agua y la cota de fondo aguas arriba y la velocidad aguas abajo, es decir, la combinación número 18 del cuadro 3. Dicha corrida consistió primero en alcanzar un estado de flujo supercrítico estacionario por un período de 10 días, y luego, a partir de allí, se aumentó el valor de la velocidad ( $u$ ) aguas abajo, hasta alcanzar los 6  $m/s$  a los 360 días de simulación, manteniendo constantes los valores de la cota de fondo y altura del agua aguas arriba. Se utilizaron 21 puntos de discretización ( $\Delta x = 500$  metros) y un intervalo de tiempo de  $\Delta t = 0,5$  días para todas las combinaciones.

Salvo para la combinación de condiciones de contorno número 9 del cuadro 3, para todo el resto de las combinaciones se obtuvieron resultados satisfactorios, como puede observarse en el cuadro 6. En dicho cuadro, se pueden apreciar diferencias en los resultados obtenidos, los cuales posiblemente se deben a la pérdida de precisión en la linearización de ecuaciones no lineales. Por ejemplo, puede observarse que las combinaciones 11, 13 y 19 son prácticamente iguales, y en ellas las variables que se intercambian son la cota de referencia  $Z$ , la altura del agua  $h$  y la cota de fondo desde un plano de referencia  $e$ , las cuales se encuentran linealmente relacionadas por la ecuación  $Z = h + e$ .

9. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Comb.	$h$ ( $m$ )	$u$ ( $m/s$ )	$Z$ ( $m$ )	$e$ ( $m$ )	$Q$ ( $m^3/s$ )	$Q_s$ ( $dm^2/s$ )	Froude -
1	0.8787	5.0137	-14.6318	-15.5105	440.5748	887.8039	1.7076
2	0.8783	5.0131	-14.6477	-15.5260	440.3259	887.7008	1.7078
3	1.0647	5.0689	-8.6539	-9.7186	539.6982	833.0927	1.5684
4	0.9429	4.1458	-4.7280	-5.6709	390.9054	481.2270	1.3631
5	0.9378	5.0638	-7.7378	-8.6756	474.9088	885.4246	1.6695
6	0.9571	4.9620	-10.1708	-11.1279	474.9106	824.0744	1.6193
7	0.9429	4.1458	-4.7280	-5.6709	390.9054	481.2270	1.3631
8	0.9114	5.0464	-13.3755	-14.2869	459.9200	888.9525	1.6877
10	0.9186	5.1700	-14.4174	-15.3360	474.9073	952.7713	1.7223
11	0.9483	5.2884	-14.7721	-15.7204	501.4976	1,004.0924	1.7339
12	0.9429	4.1458	-4.7280	-5.6709	390.9054	481.2270	1.3631
13	0.9483	5.2884	-14.7721	-15.7204	501.4976	1,004.0924	1.7339
14	0.9419	5.0419	-11.4901	-12.4320	474.9103	871.9655	1.6586
15	1.0370	4.5795	-6.8927	-7.9297	474.9066	620.5067	1.4358
16	0.9378	5.0638	-7.7378	-8.6756	474.9088	885.4246	1.6695
17	0.9378	5.0638	-7.7378	-8.6756	474.9088	885.4246	1.6695
18	0.9259	5.1291	-12.8710	-13.7969	474.9068	926.3935	1.7019
19	0.9478	5.2875	-14.7541	-15.7019	501.1318	1,003.8592	1.7341
20	0.9183	5.1717	-14.7203	-15.6386	474.9083	953.8300	1.7231
21	0.9259	5.1291	-12.8710	-13.7969	474.9068	926.3935	1.7019
22	0.9279	5.1182	-9.3488	-10.2767	474.9084	919.4422	1.6964
23	1.0392	4.5698	-2.1414	-3.1807	474.9068	615.8629	1.4312
24	0.9183	5.1715	-14.3795	-15.2978	474.9073	953.7175	1.7230
25	0.9183	5.1715	-14.7347	-15.6530	474.9083	953.7226	1.7230
26	0.9279	5.1182	-9.3488	-10.2767	474.9084	919.4422	1.6964

Cuadro 6: Estado final para algunas corridas en  $x = 5000$  metros.

### 9.5. Transición de Régimen Supercrítico a Subcrítico

Un caso inverso ha sido incluido en las simulaciones, es decir, una transición desde un flujo supercrítico a uno subcrítico. Para el primer experimento se tomó como condición de contorno aguas abajo la cota de fondo, ya que en régimen supercrítico la característica de pendiente negativa está asociada a dicha variable. La combinación seleccionada fue la combinación de condiciones de contorno número 10 (descrita en el cuadro 3).

El tramo considerado consiste en una longitud de 10 kilómetros; cada sección transversal consiste en un ancho de 100 metros y el umbral de tensión de corte crítico utilizado es el sugerido por Meyer-Peter y Müller  $\tau_0 = 0,45646 N/m^2$ . Para comenzar esta corrida en régimen supercrítico se utilizó en todos los puntos de discretización un valor inicial para la velocidad de 4 m/s y el valor de la altura del agua era de 1 m. La pendiente inicial era la pendiente de equilibrio para dichos valores, es decir,  $3,06 \times 10^{-3}$ , con una cota de fondo de 10 metros de altura en el punto extremo aguas arriba. Por lo tanto, el número de Froude tenía un valor aproximado de 1,2771 en todos los puntos de discretización.

La simulación consistió primero en alcanzar un estado de flujo supercrítico estacionario por un período de 10 días, y luego, a partir de allí, se aumentó el valor de la velocidad ( $u$ ) aguas abajo, hasta alcanzar los 6 m/s a los 360 días de simulación, manteniendo constantes los valores de altura del agua aguas arriba y de la cota de fondo aguas abajo. Los gráficos para la cota de fondo y para el número de Froude en el tiempo  $t = 360$  días se puede observar en las figuras 21 y 22 respectivamente. Desde el tiempo  $t = 360$  días hasta  $t = 1000$  días se redujo el valor de la velocidad aguas arriba hasta el valor de 0,8 m/s (ver figuras 23 y 24), nuevamente, manteniendo constantes los valores de altura del agua aguas arriba y de la cota de fondo aguas abajo. Luego se mantuvieron todos los valores de las condiciones de contorno estables hasta los 3000 días (ver figuras 25 y 26) para conseguir la transición a un flujo subcrítico, el cual se alcanzó a los 1580 días. Es interesante observar que se pudo llegar a régimen subcrítico con utilizando la cota de fondo como condición de contorno aguas abajo, lo cual indica una gran robustez del modelo.

## 9. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

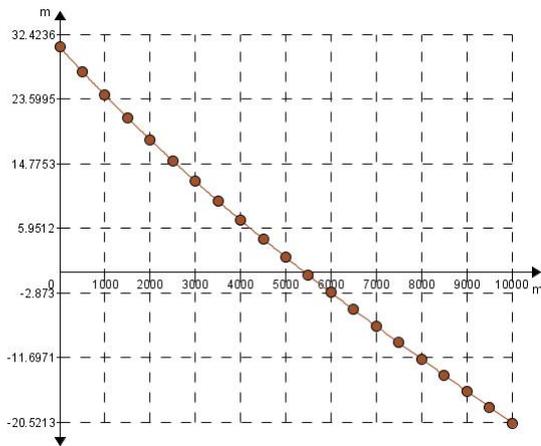


Figura 21: C. fondo a los 360 días.

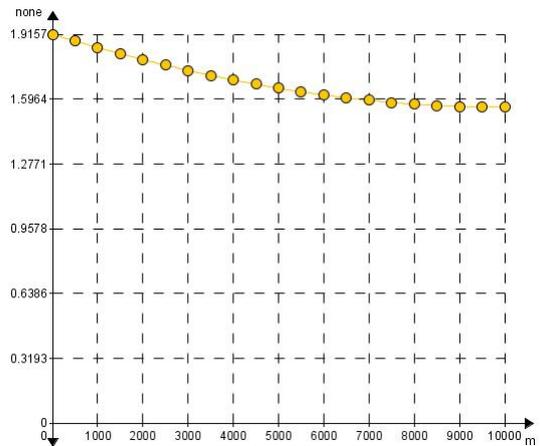


Figura 22: N° Froude a los 360 días.

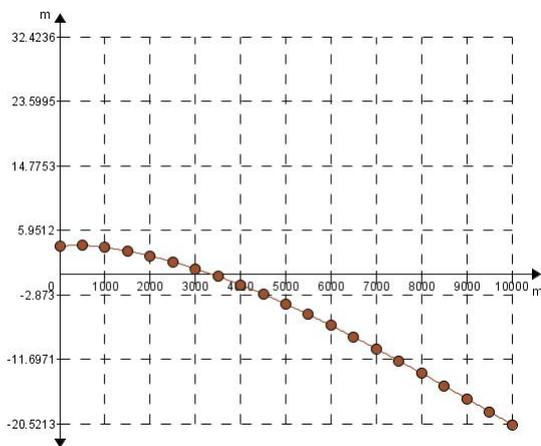


Figura 23: C. fondo a los 1000 días.

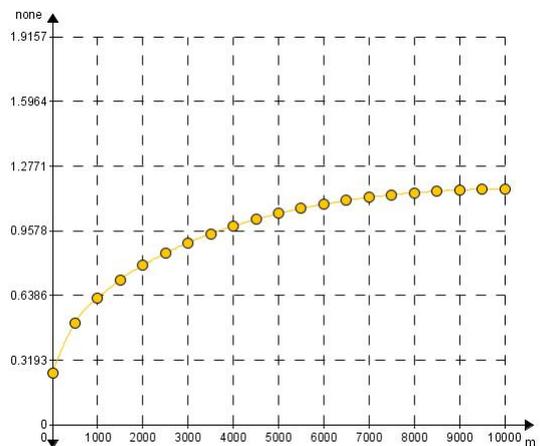


Figura 24: N° Froude a los 1000 días.

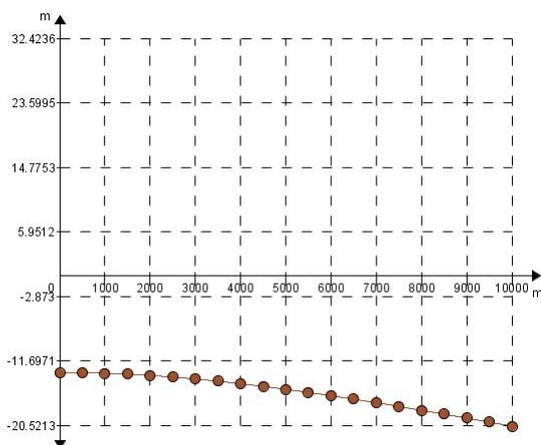


Figura 25: C. fondo a los 3000 días.

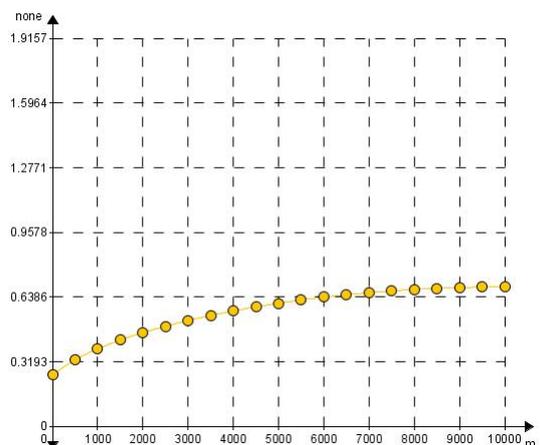


Figura 26: N° Froude a los 3000 días.

Este mismo experimento también fue llevado a cabo con la combinación número 5 (descrita en el cuadro 3). Primeramente, se alcanzó una transición desde un régimen subcrítico a uno supercrítico con un tramo de las mismas características que las de la simulación realizada con la combinación de condiciones de contorno número 8 del cuadro 3 en la sección 9.1. De igual forma, las condiciones iniciales son las mismas que se utilizaron en dicha simulación; mientras que los valores de las condiciones de contorno en el tiempo  $t = 240$  días fueron los resultados de la misma corrida. De esta forma, se obtuvieron las condiciones de un régimen supercrítico (ver figuras 27, 28, 29 y 30) a partir de las cuales se consiguió la transición deseada a un flujo en régimen subcrítico.

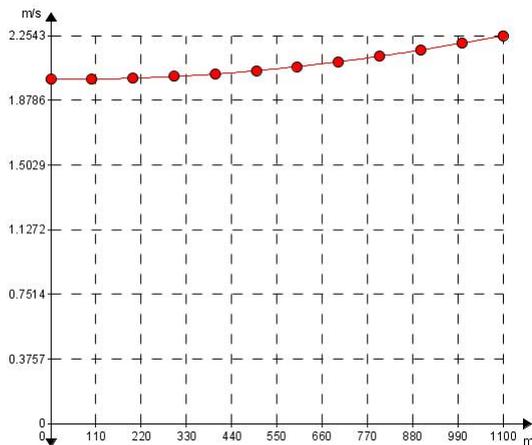


Figura 27: Velocidad a los 240 días.

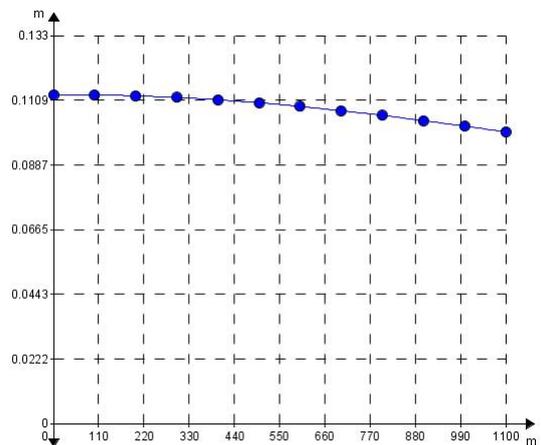


Figura 28: Tirante a los 240 días.

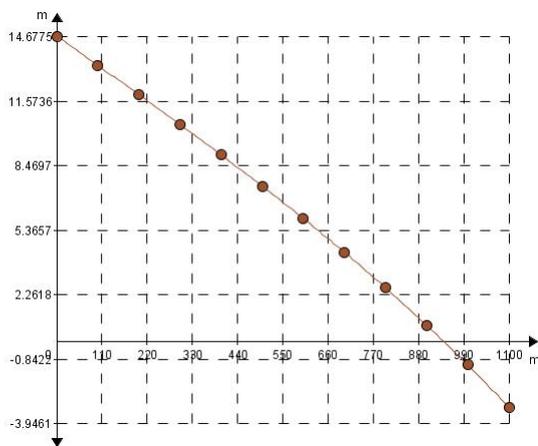


Figura 29: Cota de fondo a los 240 días.

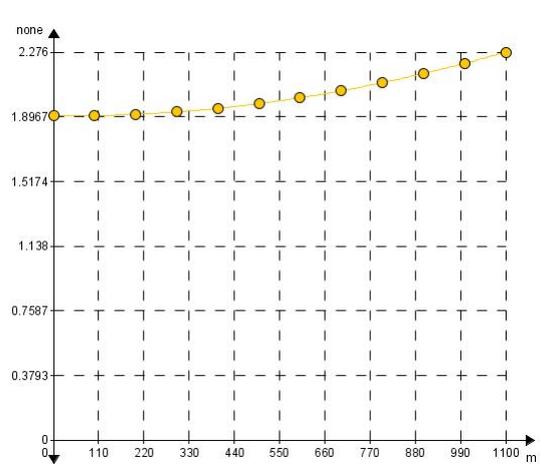


Figura 30: N° Froude a los 240 días.

Luego de los 240 días, se redujo la velocidad  $u$  aguas arriba, desde los  $2\text{ m/s}$  hasta alcanzar los  $0,4\text{ m/s}$  en el tiempo  $t = 480$ . De la misma forma, se ajustaron los valores de la altura de agua  $h$ , tanto aguas arriba, como aguas abajo a  $0,1$  metros en ambos puntos. Finalmente, se obtuvo un flujo en régimen subcrítico al finalizar la simulación, como puede apreciarse en las figuras 31, 32, 33 y 34.

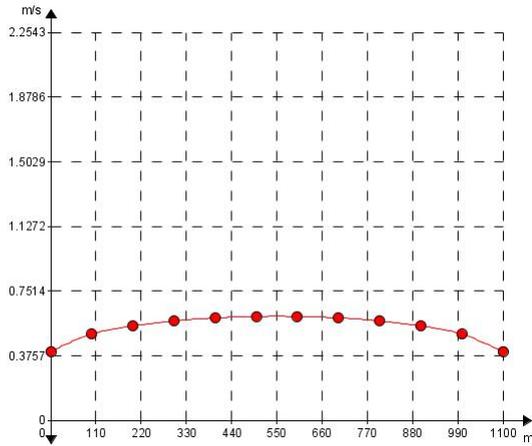


Figura 31: Velocidad a los 480 días.

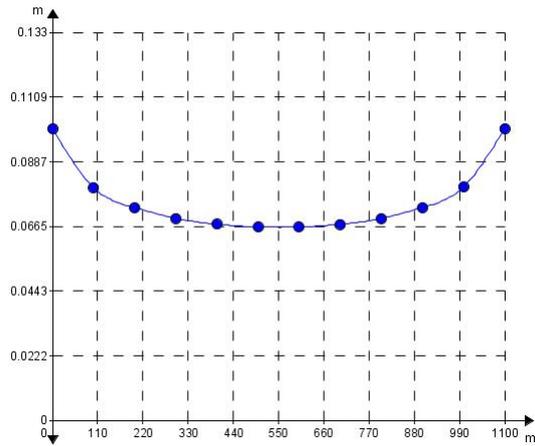


Figura 32: Tirante a los 480 días.

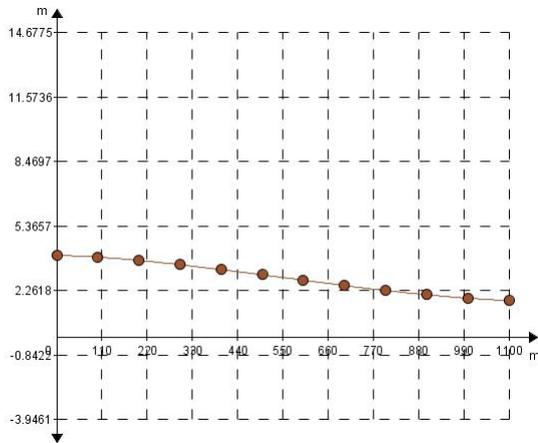


Figura 33: Cota de fondo a los 480 días.

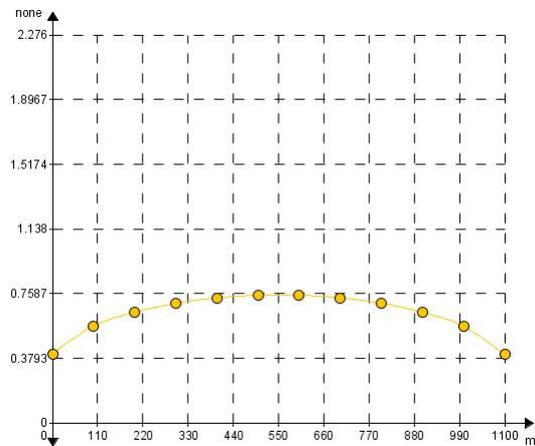


Figura 34: Nº Froude a los 480 días.

## 9.6. Régimen Subcrítico Estacionario

Para conseguir un estado de régimen subcrítico estacionario hemos continuando con el experimento llevado a cabo en la sección 9.5, cuyas condiciones de contorno eran las de número 5 en el cuadro 3. A partir de los 480 días en adelante se han mantenido constantes las condiciones de contorno, para poder alcanzar un estado subcrítico estacionario, el cual se obtuvo a los 1500 días del tiempo de simulación, a pesar de que en el tiempo  $t = 900$  la diferencia con el estado estacionario es casi despreciable. En la figura 35 se puede apreciar que la pendiente del lecho ha convergido a una pendiente de equilibrio para un flujo subcrítico estacionario con  $h = 0,10 \text{ m}$  y  $u = 0,4 \text{ m/s}$ . En este caso, la pendiente computada fue  $6,5953 \times 10^{-4}$ , y el estado estacionario teórico que se obtiene al aplicar la fórmula  $-\partial e/\partial x = \Lambda d_m^{1/3} u^2 / (gh^{4/3})$  es  $6,5927 \times 10^{-4}$ .

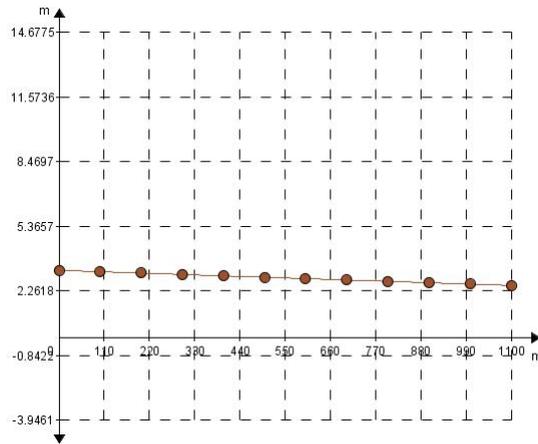


Figura 35: Cota de fondo con pendiente estacionaria para un régimen subcrítico.

## 9.7. Antiduna

El fenómeno de antiduna puede describirse como una duna que se desplaza hacia aguas arriba en ciertos casos de régimen hidrodinámico fluvial supercrítico con fondo móvil (naturalmente lo que se desplaza hacia aguas arriba es la onda, no las partículas de fondo). Éste es un caso en que la observación computacional de un fenómeno físico afianza la confianza en las ecuaciones (en parte empíricas) que se han usado para representar el

fenómeno.

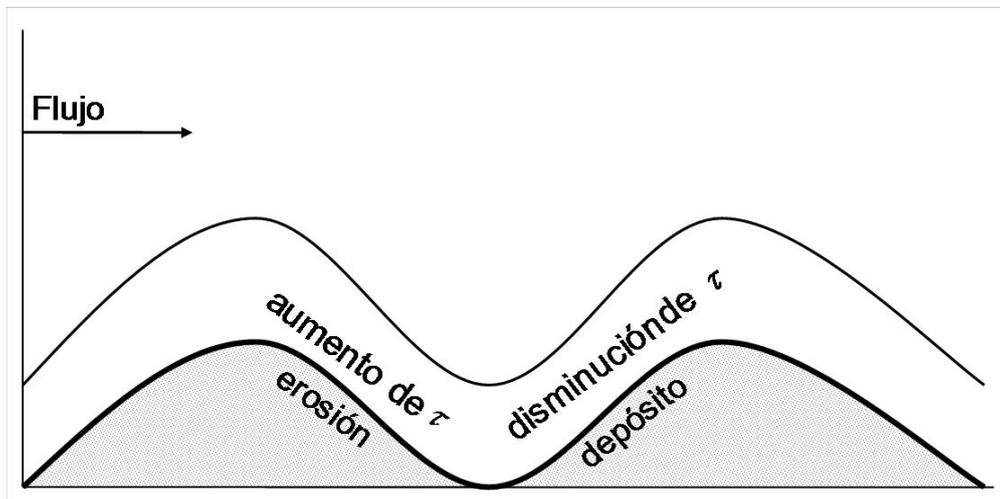


Figura 36: Erosión y depósito de un flujo sobre una antiduna.

Este fenómeno puede entenderse, dado que el transporte del sedimento es conducido por la tensión de corte del lecho; en otras palabras, el caudal sólido se relaciona directamente con la tensión de corte sobre el lecho, los puntos de tensión de corte máximos y mínimos definen puntos de borde entre zonas de aumento y depósito del sedimento sobre el lecho. La erosión (sustracción del sedimento del lecho a lo largo del tiempo) ocurre donde la tensión de corte se incrementa a lo largo del lecho. El depósito del material (adición de sedimento sobre el lecho a lo largo del tiempo) ocurre donde la tensión de corte disminuye a lo largo del lecho. La tensión de corte del flujo sobre el lecho (fuerza por unidad de superficie) es lo que “arranca” la arena del lecho y la arrastra junto con el flujo. Si la tensión de corte del lecho supera el valor del umbral para un tamaño y composición de grano particular, ese grano será arrastrado por el flujo. Si la tensión de corte del lecho cae por debajo de dicho valor de umbral, el grano arrastrado se detendrá de nuevo. Por lo tanto, la tensión de corte del lecho controla tanto si ocurrirá la erosión (movimiento de granos) o el depósito (detención de granos).

Si observamos los patrones de la tensión de corte a lo largo del lecho y las zonas resultantes del depósito y la erosión en la figura 36, se puede ver por qué las antidunas se mueven contra la corriente. Si comenzamos por mirar la cresta de la antiduna que se encuentra aguas arriba, hay un mínimo de

tensión de corte apenas río abajo de la cresta. Para este mínimo, la tensión de corte sobre el lecho aumenta a lo largo de la duna en sentido descendente hacia un máximo apenas río abajo del canal, por lo que ocurre erosión a lo largo de este intervalo.

Continuando por este máximo de tensión de corte, la tensión de corte disminuye a lo largo del lado de la duna aguas arriba, mientras que el flujo disminuye su velocidad y se hace más profundo, hacia el mínimo de tensión de corte justo río abajo de la cresta, por lo que el depósito del sedimento ocurre en este intervalo. El resultado es que el sedimento es agregado sobre el lado de la duna aguas arriba y removiéndolo del lado en sentido descendente. Mientras que esto sucede, la duna se mueve contra la corriente, produciendo el fenómeno de antiduna.

Para reproducir este fenómeno en nuestro modelo, se debió comenzar la simulación a partir de un flujo en régimen supercrítico. El tramo analizado tiene una longitud de 1100 metros; cada sección transversal constaba de un ancho de 10 metros. La altura inicial del agua fue de 1 metro en cada sección, la velocidad fue de 6  $m/s$  y la cota de fondo se tomó de acuerdo a la formula de la pendiente de equilibrio en régimen estacionario  $-\partial e/\partial x = \Lambda d_m^{1/3} u^2 / (gh^{4/3})$ , es decir que la pendiente utilizada fue  $6,8852 \times 10^{-3}$ , con 10 metros de altura en el punto extremo aguas arriba, salvo por un pequeño montículo que representa a la duna ubicada entre los 5400 metros y los 5817 metros, con una altura en su punto más alto de 7,1 metros en relación a la cota de referencia, como se puede apreciar en la figura 37.

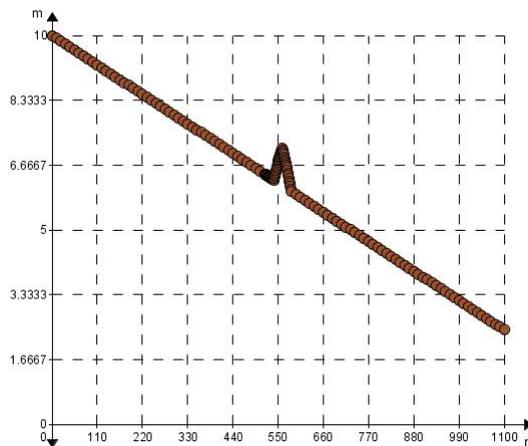


Figura 37: Cota de fondo inicial para representar el fenómeno de antiduna.

Para poder apreciar el movimiento del material sólido del lecho con mayor detalle utilizamos un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño  $\Delta t = 0,005$  días, es decir aproximadamente 7,2 minutos. Por otro lado, se insertaron puntos intermedios (separados por una distancia muy pequeña, de aproximadamente 1,2222 metros) entre los puntos donde se encuentra la duna y también aguas arriba de ésta, con el fin de obtener más precisión en los valores calculados alrededor del fenómeno en cuestión.

Este fenómeno pudo ser apreciado con claridad en nuestro modelo, utilizando la combinación de condiciones de contorno número 18 descrita en la tabla 3, manteniendo las mismas estables por un período suficiente de tiempo. Como se puede ver en las figuras 38, 39, 40 y 41, nuestra duna inicial aparenta desplazarse hacia el extremo aguas arriba a medida que ésta va disminuyendo su tamaño, hasta el punto de casi desaparecer por completo, como se ve en la figura 41 luego de 0,1 días.

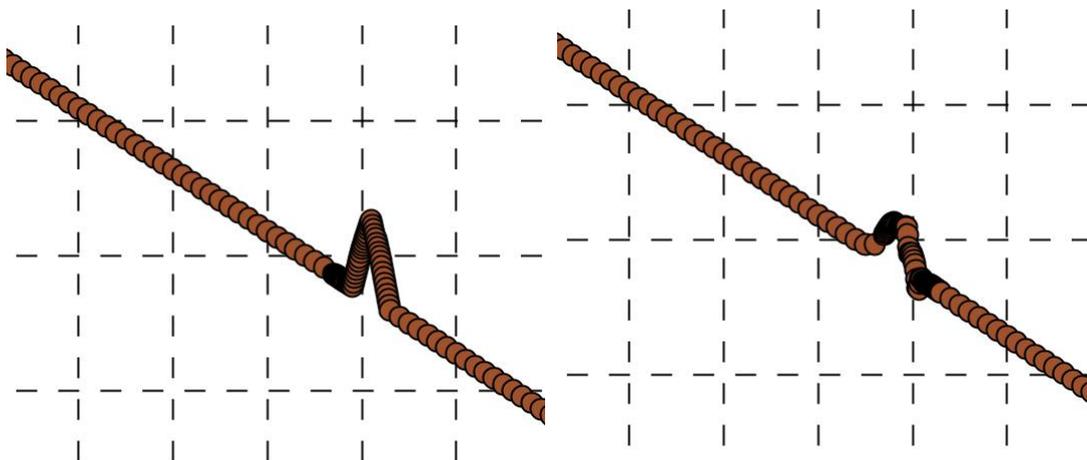


Figura 38: Cota de fondo a los 0 días.

Figura 39: Cota de fondo a los 0,02 días.

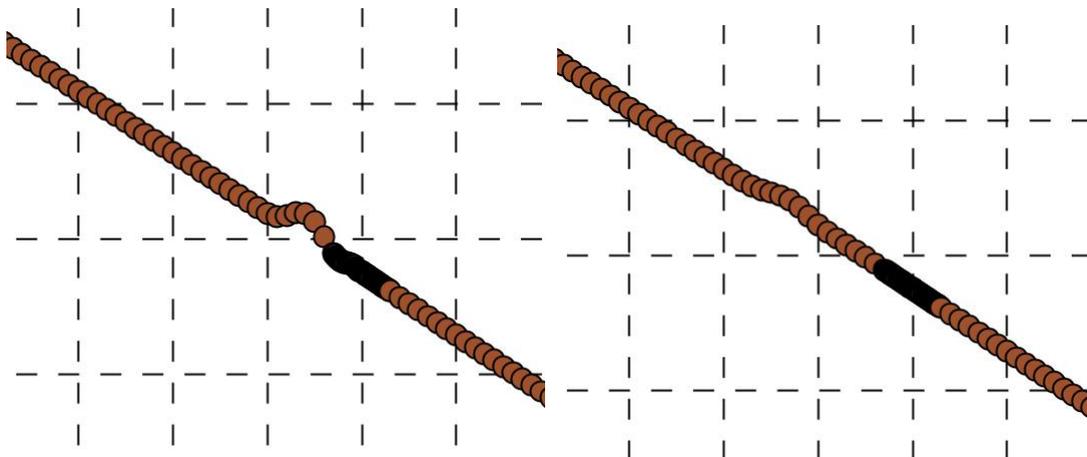


Figura 40: Cota de fondo a los 0,05 días.

Figura 41: Cota de fondo a los 0,1 días.

### 9.8. Funcionamiento como Modelo de Fondo Fijo Local

Este experimento simula una situación en la cual se tiene, por ejemplo, un dique aguas arriba de material no erosionable (y que bloquea el transporte de material sólido desde aguas arriba). En ese caso lo que se produce es una “olla” inmediatamente aguas abajo del extremo aguas arriba, pues no hay aporte de material sólido pero sí hay erosión.

El canal simulado tenía una longitud total de 10 kilómetros y un ancho del canal de 100 metros. Las condiciones iniciales fueron una velocidad de  $0,8 \text{ m/s}$ , una altura del agua de 1 metro y una pendiente para la cota de fondo de  $1,224 \times 10^{-4}$ , es decir la pendiente de equilibrio para estos valores, con una cota de fondo 10 metros de altura en el punto extremo aguas arriba, respecto de un plano de referencia.

Para representar el dique aguas arriba se fijó un umbral de tensión de corte crítico extremadamente alto, cuyo valor era  $\tau_0 = 3000 \text{ N/m}^2$ , mientras que para el resto de los puntos de discretización el umbral de tensión de corte crítico utilizado fue el sugerido por Meyer-Peter y Müller  $\tau_0 = 0,45646 \text{ N/m}^2$ , como ya se mencionó en la sección 3.

La simulación se realizó con la combinación de condiciones de contorno número 8 descrita en la tabla 3, manteniendo dichas condiciones estables por

un período de 20 días. Al igual que en el fenómeno de antiduna, se insertaron puntos intermedios (separados por una distancia de aproximadamente 25 metros) entre el punto extremo aguas arriba y los 500 metros de longitud del canal, con el fin de obtener más precisión en los valores calculados alrededor del fenómeno en cuestión.

Los resultados obtenidos se pueden apreciar en las figuras 42, 43, 44, 45 y 46, las cuales muestran la cota de fondo, cota, caudal, caudal sólido y velocidad en el tiempo final de simulación respectivamente. En la figura 42, y con mayor detalle en la figura 47 se puede ver cómo la altura del punto de discretización inmediatamente posterior al punto extremo aguas arriba disminuye aproximadamente a 9,61 metros y subiendo a partir de allí (simulando la forma de una olla); de la misma forma disminuye la velocidad en dichos puntos, como se ve en la figura 46. También se puede observar cómo el caudal sólido en el punto extremo aguas arriba se mantuvo nulo durante toda la simulación (figura 45); por otro lado, la cota de referencia se mantuvo constante (figura 43), lo cual era lo esperable; esto se relaciona con que el caudal (figura 44) mantiene su valor en todos los puntos de discretización.

9. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

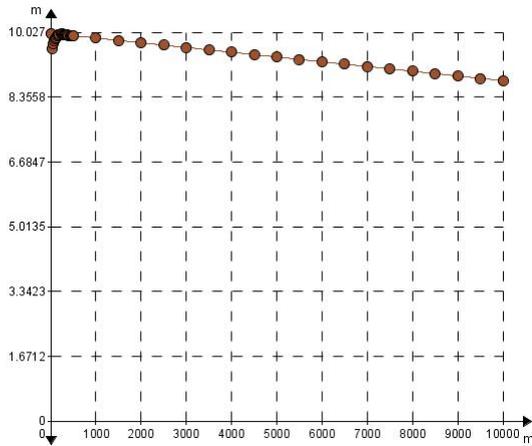


Figura 42: Cota de fondo

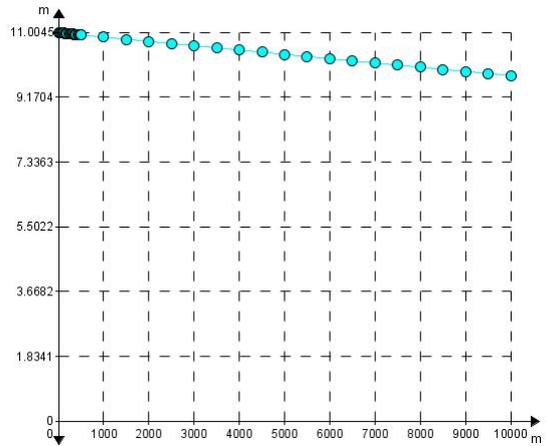


Figura 43: Cota

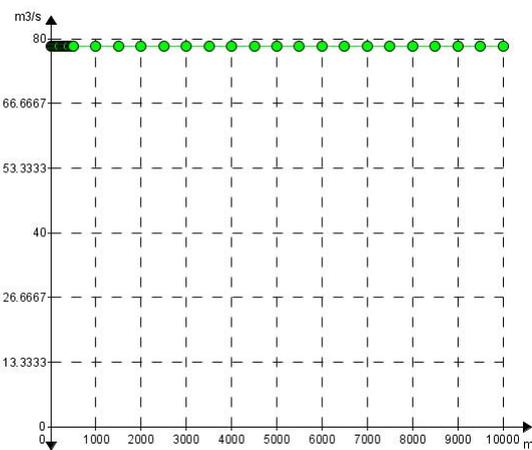


Figura 44: Caudal

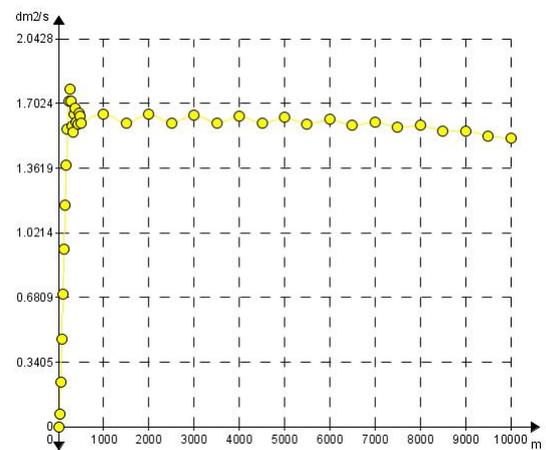


Figura 45: Caudal sólido

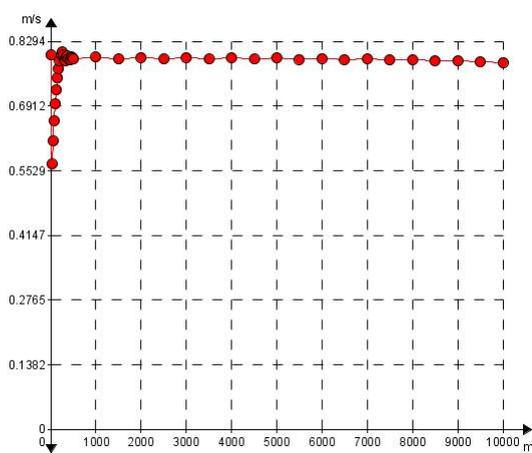


Figura 46: Velocidade

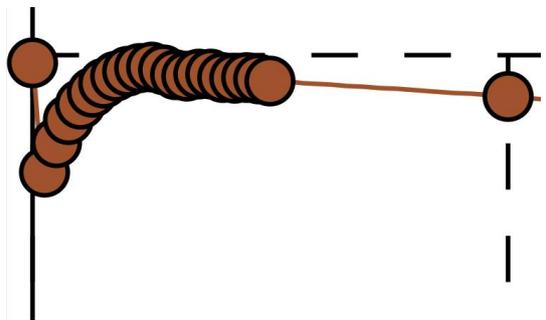


Figura 47: Cota de fundo ampliada

### 9.9. Funcionamiento como Modelo de Fondo Fijo Global

Otro de los experimentos numéricos realizados consistió en verificar si el modelo podía funcionar como un modelo de fondo fijo global, es decir, que se comporte de igual forma que un modelo de fondo fijo, arrojando los mismos resultados que éste para determinadas corridas.

Para realizar esta comparación se utilizó un programa realizado por Jacovkis [JAC/89] y [JAC/90], el cual modela el comportamiento de un flujo en canales irregulares de superficie libre con fondo fijo, representado por el sistema de ecuaciones (1) y (2). Este programa se encontraba escrito en el lenguaje de programación Pascal, y se adaptó al mismo de forma que la salida obtenida sea la misma que se obtiene en el programa realizado para fondo móvil y así poder utilizarla en la rutina de graficación descrita en la subsección 8.2. Para que esta comparación sea posible, nos fue necesario relacionar de forma conveniente el coeficiente de resistencia  $c_b$ , del modelo de fondo móvil, con el coeficiente de conducción  $D$ , del modelo de fondo fijo, como se muestra en la sección 9.9.1.

Dado que el programa de fondo fijo utilizado sólo acepta como condiciones de contorno las combinaciones de variables de contorno  $ZZ$ ,  $ZQ$ ,  $QZ$  y  $QQ$ , hemos utilizado combinaciones análogas a éstas, teniendo en cuenta que el modelo de fondo móvil admite tres condiciones de contorno (dos de ellas aguas arriba y la restante aguas abajo); por lo tanto, las combinaciones de variables de contorno utilizadas para la comparación de los modelos fueron:  $ZeZ$ ,  $ZeQ$ ,  $QeZ$  y  $QeQ$ . En todas éstas, se dejó el mismo valor de la variable  $e$  aguas arriba para mantener fija la cota de fondo durante todo el tiempo de simulación.

Por otro lado, se fijó un umbral de tensión de corte crítico extremadamente alto ( $\tau_0 = 3000 \text{ N/m}^2$  para todos los puntos de discretización) para representar con el modelo de fondo móvil un lecho que permanezca inmóvil durante toda la corrida.

El modelo considerado consistió en un tramo de 10  $km$  de distancia, un ancho de canal de 100 metros, una velocidad inicial de 0,8  $m/s$ , una profundidad de 1  $m$  y una cota de fondo con 10  $m$  de altura aguas arriba y cuya pendiente es la pendiente de equilibrio para los valores mencionados, es decir  $1,224 \times 10^{-4}$ .

Se corrieron ambos modelos por un período de 100 días para todas las

combinaciones con un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0,1$  días. En primer lugar se mantuvieron las condiciones estables por 10 días y a partir de allí se utilizaron los valores obtenidos a partir de una corrida madre, la cual tenía la variable  $Q$  aguas arriba y aguas abajo. La misma se aumentó desde los  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  hasta los  $88 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Los resultados obtenidos fueron extremadamente similares, como se puede apreciar en los cuadros 7 y 8, los cuales comparan los resultados de las combinaciones ejecutadas en ambos modelos en el tiempo final de simulación (100 días), para  $x = 5000$  metros.

Variables	Combinaciones			
	$ZZ$	$ZQ$	$QZ$	$QQ$
$h(m)$	1.0351	1.0360	1.0349	1.0350
$u(m/s)$	0.8504	0.8494	0.8503	0.8502
$Z(m)$	10.4231	10.4240	10.4229	10.4230
$Q(m^3/s)$	88.0179	88.0003	87.9965	87.9967
N° Froude	0.2669	0.2664	0.2668	0.2668

Cuadro 7: Combinaciones para el modelo de fondo fijo a los 100 días en  $x = 5$  kilómetros.

Variables	Combinaciones			
	$ZeZ$	$ZeQ$	$QeZ$	$QeQ$
$h(m)$	1.0352	1.0351	1.0352	1.0352
$u(m/s)$	0.8501	0.8502	0.8501	0.8501
$Z(m)$	10.4232	10.4230	10.4232	10.4232
$Q(m^3/s)$	87.9967	87.9987	87.9965	87.9967
N° Froude	0.2668	0.2668	0.2668	0.2668

Cuadro 8: Combinaciones para el modelo de fondo móvil a los 100 días en  $x = 5$  kilómetros.

### 9.9.1. Relación entre el coeficiente de resistencia $c_b$ y el coeficiente de conducción $D$

**Deducción de la equivalencia** Si tomamos los términos relacionados con el coeficiente de conducción  $D$  de la ecuación (1) relacionada con el modelo

de fondo fijo y el coeficiente de resistencia (adimensional)  $c_b$  de la ecuación (3) relacionada con el modelo de fondo móvil y los igualamos, se tiene que

$$g \frac{Q | Q |}{D^2} = c_b \frac{u | u |}{h}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $m/s^2$ ,  $Q$  es el caudal en  $m^3/s$ ,  $u = Q/S$  es la velocidad en  $m/s$ ,  $S$  es la superficie mojada en  $m^2$  (en nuestro caso  $S = Bh$ , pues es un canal prismático rectangular),  $B$  es el ancho de la sección transversal en  $m$  y  $h$  es la altura desde el fondo en  $m$ .

Por otra parte,  $c_b = \Lambda(d_m/h)^{1/3}$ , con  $d_m$  diámetro medio de las partículas de fondo en  $m$ , y  $\Lambda = g/441$  es también un coeficiente adimensional. (Para ello  $441 = 21^2$  es una constante empírica cuya dimensión es entonces  $m/s^2$ , y la dimensión de 21 es entonces  $m^{1/2}/s$ ).

Reemplazando tenemos

$$\frac{g}{441} \left( \frac{d_m}{h} \right)^{1/3} \frac{u | u |}{h} = g \frac{Q | Q |}{D^2}$$

o sea

$$\frac{g}{441} \left( \frac{d_m^{1/3} Q | Q |}{h^{4/3} S^2} \right) = g \frac{Q | Q |}{D^2}$$

y simplificando y pasando  $S$  al otro término

$$\frac{d_m^{1/3}}{441 h^{4/3}} = \frac{S^2}{D^2}$$

Pasando ahora  $D^2$  al otro lado

$$D^2 = \frac{441 S^2 h^{4/3}}{d_m^{1/3}}$$

y sacando raíz cuadrada

$$D = \frac{21 S h^{2/3}}{d_m^{1/6}}$$

Haciendo una pequeña prueba de consistencia con las unidades, se tiene

$$\frac{[m^{1/2}/s][m^2][m^{2/3}]}{m^{1/6}} = [m^3/s]$$

lo cual está bien pues la dimensión de  $D$  es  $m^3/s$  como la del caudal.

Prosiguiendo se tiene

$$D = 21 \frac{S h^{2/3}}{d_m^{1/6}} = 21 \frac{B h h^{2/3}}{d_m^{1/6}} = 21 \frac{B h^{5/3}}{d_m^{1/6}}$$

## 10. Conclusiones

En esta tesis hemos visto una breve clasificación de los posibles tipos de flujos que se pueden apreciar en la naturaleza y nos hemos introducido en los modelos de fondo móvil. Dichos modelos se basan en sistemas cuasi-lineales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; los mismos son estrictamente hiperbólicos y se pueden reescribir en forma de leyes de conservación vectorial; por consiguiente, se deben dar siempre dos condiciones de contorno en el punto extremo aguas arriba y una en el punto extremo aguas abajo. Debido a que su matriz de hiperbolicidad nunca se hace singular, se posibilita el régimen transicional (o sea pasar de régimen subcrítico a supercrítico y de supercrítico a subcrítico) sin los inconvenientes técnicos que suceden en modelos con fondo fijo, en los cuales la matriz de hiperbolicidad se hace singular en régimen crítico (número de Froude igual a uno); y por consiguiente, en estos modelos, dicha transición implica una disminución del número de condiciones de contorno en un extremo (de dos a una o de una a ninguna) y un aumento del número de condiciones de contorno en el otro extremo (de ninguna a una o de una a dos).

Se han realizado distintos experimentos con el objeto de modelar las diferentes características de un flujo unidimensional con fondo móvil, los cuales demuestran la robustez del método numérico utilizado: el método de Preissmann, un método numérico implícito de primer orden resuelto mediante diferencias finitas, altamente utilizado en el modelado hidrodinámico de ríos. Es destacable el comportamiento de dicho método, sobre todo en los experimentos realizados sobre fenómenos que suceden con frecuencia en la naturaleza, como son la antiduna o tener un dique de material no erosionable en una sección transversal de un tramo. También cabe mencionar el correcto funcionamiento del mismo ante distintas combinaciones de condiciones de contorno en diversos regímenes del flujo (tanto subcrítico como supercrítico o transicional), lo cual proporciona facilidades a la hora de simular el comportamiento de un cauce natural para el que no se tiene un conocimiento preciso de sus condiciones físicas con el correr del tiempo. También se han podido apreciar resultados satisfactorios en los experimentos donde se quiso alcanzar un estado de flujo permanente, tanto en régimen subcrítico como supercrítico, donde los valores de las pendientes computadas fueron casi idénticos que al aplicar la fórmula analítica. De igual forma, es destacable cómo el modelo se adapta a distintos valores de tensión de corte crítica y, de esta forma, se tiene la posibilidad de utilizarlo como modelo de fondo fijo, con resultados extremadamente similares a los de un modelo desarrollado exclusivamente con esa finalidad.

En resumen, se dispone de una herramienta moderna, versátil y de muy buen rendimiento para el estudio de canales y cauces fluviales unidimensionales con fondo móvil, que puede utilizarse tanto en régimen subcrítico como supercrítico, que puede efectuar transiciones de régimen, y que puede funcionar también como modelo de fondo fijo local y globalmente. Las subrutinas de graficación animada utilizadas tienen una interfaz de usuario muy amigable y permiten detectar con facilidad los fenómenos físicos que ocurren en un lapso de tiempo determinado.

De todos modos, cabe mencionar que, como todo método implícito, el método de Preissmann suaviza discontinuidades, por lo cual no es conveniente utilizarlo cuando se intenta modelizar ondas de choque.

Como futuros trabajos, podrían considerarse distintas combinaciones de condiciones de contorno que no han sido tenidas en cuenta en esta tesis (por ejemplo, el caudal sólido), con el fin de realizar un análisis más profundo del comportamiento del modelo analizado; así como también podrían implementarse otros métodos numéricos ya sean implícitos o explícitos, para poder comparar sus resultados con el modelo estudiado en esta tesis.

## 11. Bibliografía

- [CFL/67] R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy: *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal, 11, p.215-234, March 1967. Traducción al inglés del original *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen 100, p.32-74, 1928.
- [CHV/80] J. A. Cunge, F. M. Holly Jr. y A. Verwey: *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman, London, 1980.
- [EIN/42] H. A. Einstein: *Formulas for the transportation of bed-load*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 107, p.561-573, 1942.
- [EIN/50] H. A. Einstein: *The bed-load function for sediment transportation in open channel flows*, Technical Report 1026, US Department of Agriculture, Washington, DC, USA, 1950.
- [GRA/68] M. H. Gradowczyk: *Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 33, p.93-112, 1968.
- [GRJ/84] M. H. Gradowczyk y P. M. Jacovkis: *Un modelo hidrodinámico impermanente de simulación de escurrimiento sobre fondo móvil, transporte de partículas en suspensión, decantación y resuspensión*, Anales del XI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Buenos Aires, 1984.
- [JAC/88] P. M. Jacovkis: *Modelos numéricos para redes fluviales*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1988.
- [JAC/89] P. M. Jacovkis: *Modelos hidrodinámicos en cuencas fluviales*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 5, p.295-319, 1989.
- [JAC/90] P. M. Jacovkis: *Modelos numéricos hidrodinámicos en redes fluviales complejas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 6, p.543-572, 1990.
- [JAC/91] P. M. Jacovkis: *One-dimensional hydrodynamic flow in complex networks and some generalizations*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 51, p.948-966, 1991.

- [JAC/96] P. M. Jacovkis: *The hydrodynamic flow with a mobile bed: general and simplified approaches*, Abstracts of the VI International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, p. 100 (invited lecture), 1995. El trabajo completo fue publicado en: D. Bainov (ed.), *Invited Lectures and Short Communications delivered at the Sixth International Colloquium on Differential Equations*, Plovdiv, p.203-212, 1996.
- [JAC/00] P. M. Jacovkis: *One-dimensional hydrodynamic flow in complex networks: state of the art and some applications and generalizations*, P. P. Smolka y W. Volkheimer (eds.), *Southern Hemisphere Paleo- and Neoclimates*, Springer-Verlag, Berlin, p.17-25, 2000.
- [MPM/48] E. Meyer-Peter y R. Müller: *Formulas for Bed-Load Transport*, International Association for Hydraulic Structures Research, Report on the Second Meeting, Stockholm, p.39-64, June 7-9, 1948.
- [PRE/61] A. Preissmann: *Propagation des intumescences dans les canaux et rivières*, First Congress of the French Association for Computation, Grenoble, France, p.433-442, 1961.
- [RIM/67] R. D. Richtmyer y K. W. Morton: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd edition, Wiley, New York, 1967.