Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Traducciones parciales entre lenguajes lógicos

Tesis presentada para optar al título de
Licenciado en Ciencias de la Computación

Agustín Eloy Martinez Suñé

Director: Prof. Dr. Gustavo Carlos Lopez Pombo

Buenos Aires, 2017

TRADUCCIONES PARCIALES ENTRE LENGUAJES LÓGICOS

La naturaleza del software es intrínsecamente heterogénea. Dicha heterogeneidad deriva de la diversidad de propiedades y características que tienen los sistemas, que a su vez es demostrado por la diversidad de formalismos y lenguajes utilizados para describirlos. La teoría de las Instituciones fue introducida como una formalización de la teoría de modelos abstracta de un formalismo lógico. La posibilidad de relacionar instituciones a través de funciones apropiadas, que pueden ser interpretadas como traducciones que conservan la semántica, permitió la consideración de diagramas de instituciones como ambientes lógicos heterogéneos y su uso como fundamento formal de herramientas como HETS o CafeOBJ.

Siguiendo la definición original de estas conexiones entre lenguajes lógicos, estas funciones entre signaturas, sentencias y modelos, son forzadas a ser totales. Sin embargo, es bien conocido que muchas lógicas se relacionan en forma parcial. Entre otras, la relación entre CTL y LTL es un ejemplo clásico de lógicas que comparten un fragmento propio equipolente, mientras que no existe ninguna traducción conservadora de la semántica total en ninguna de las direcciones.

En este trabajo exploramos la noción de comorfismo parcial (aun cuando nuestra consideraciones también aplican a morfismos) como un medio para proveer este tipo de relación entre instituciones.

Palabras claves: Instituciones, Especificación heterogénea, Especificación algebraica, Métodos formales, Ingeniería de software.

PARTIAL TRANSLATIONS BETWEEN LOGIC LANGUAGES

The nature of modern software is intrinsically heterogeneous. Such heterogeneity is derived from the diversity of properties and characteristics that software systems have, which is in turn witnessed by the diversity of specification formalisms and languages that are used to describe them. The theory of Institutions was introduced as a formalisation of the abstract model-theory of logical formalisms. The possibility to relate institutions via suitable mappings, which can be interpreted as semantics-preserving translations, allowed to consider diagrams of institutions as heterogeneous logical environments and to use them as formal foundations for tools like HETS or CafeOBJ.

Following the original definitions of such connections between logical languages, those mappings between signatures, sentences and models are forced to be total. However, it is well-known that many logics relate in a partial way. Among others, the relation between CTL and LTL is a classical example of logics that share an equipollent proper fragment, while there is no total semantics-preserving mapping in either direction.

In this work we explore the notion of partial co-morphism (even if our considerations could be applied to morphisms as well) as a mean for providing this kind of relation between institutions.

Keywords: Institutions, Heterogeneous specifications, Algebraic specification, Formal methods, Software engineering.

AGRADECIMIENTOS

Es difícil poder expresar en un par de lineas los agradecimientos a quienes fueron parte de este proceso tan importante en mi vida. Sin embargo, voy a hacer el intento.

En primer lugar a toda mi familia, que es en gran parte responsable de quien soy hoy. A mi vieja que siempre me bancó en todas y nunca cuestionó mis decisiones ni mis intereses, ni siquiera cuando implicaban prácticamente vivir afuera de casa la mayor parte del tiempo. A mi viejo que desde chico siempre alimentó mi curiosidad y fue eventualmente él quien me hizo conocer esta hermosa carrera y, así, emprender este viaje. A Facu y Mili, a quienes quiero un montón y muy pocas veces se los digo.

También a mis compañeros de cursada y amigos de la facultad, sin quienes avanzar en la carrera hubiese sido mucho más aburrido. Charlie, Laski, Gonza, Partu, Bariloche, Fede, Pato, Marco y todos los que me estoy olvidando. Cursar no hubiese sido lo mismo sin ustedes.

Especialmente a todo el FEM!, ese grupo increíble de personas que dan todo para transformar su realidad. De todos aprendí y sigo aprendiendo un montón, no me imagino la facultad sin ellos. En particular a una compañera gigante como Lupi, que juntos con Eze y Tavo enfrentamos grandes desafíos que me dejan con recuerdos que voy a llevar siempre. También a quienes me enseñaron qué era esto de militar y me entusiasmaron a cambiar el mundo: Axel, Flor, Fiore, Cani, Manu, Euge, Pau, Santi. Casi me olvido de Ale, que trajo su alegría desde el principio. A los del presente y a los del futuro: Santi Sosa, Marce, Pablo, Somodi, Rombo, Caro, Maia, Flai, Jess con quienes comparto grandes experiencias y tienen un potencial enorme. A todos de los que me olvidé, desde los más nuevos hasta los más viejos, gracias!

A la Universidad pública y gratuita, que me dio la posibilidad de formarme, me voló la cabeza e hizo que conozca personas muy valiosas. En particular al Departamento de Computación, mi segunda casa todos estos años, a todos los docentes y las personas que aportaron a mi formación.

A Charlie, mi director, sin él probablemente no hubiese sido posible esta locura de recibirme siendo presidente del Centro de Estudiantes. Con él tuve una experiencia de inicio a la investigación excelente pero también pude entablar una relación con una gran persona y estoy muy contento de que empecemos a trabajar juntos.

A Santi y Pablo, mis jurados, por leer mi tesis, comentarla y adaptarse a los tiempos que yo necesitaba para recibirme. Gracias!

A todos mis amigos de afuera de la facu (sí, tengo!), aunque no nos veamos tanto y esté siempre a mil con otras cosas, fueron y son una parte importante de mi vida. En particular el grupete de Kaploud no podría faltar en estos agradecimientos.

A Maia por sus abrazos, sus mates y sus formas de ver el mundo que comparte todos los días conmigo. Gracias por bancarme en todas y en particular bancarme en esta, sos muy importante para mí.

A todos los que me apoyaron, me bancaron, me ayudaron. Seguro hay muchos que no

están en estas lineas pero que fueron muy importantes para que yo pueda llegar hasta acá.

Muchas gracias, en serio.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

La naturaleza del software moderno es intrínsecamente heterogénea. Dicha heterogeneidad deriva de la diversidad de propiedades y características que tienen los sistemas, que a su vez es demostrado por la diversidad de formalismos y lenguajes utilizados para describirlos. La teoría de las Instituciones, *Institutions* [GB84], fue introducida con la ambición de resolver lo que ya en su momento se perfilaba como un problema; el crecimiento desmedido de la cantidad de lenguajes de especificación diferentes, cada uno de ellos soportado por una o más herramientas que permite el análisis de especificaciones escritas en dicho lenguaje. En palabras de sus creadores Goguen y Burstall [GB84]:

> There is a population explosion among the logical systems being used in computer science. Examples include first order logic (with and without equality), equational logic, Horn clause logic, second order logic, higher order logic, infinitary logic, dynamic logic, process logic, temporal logic, and modal logic; moreover, there is a tendency for each theorem prover to have its own idiosyncratic logical system. Yet it is usual to give many of the same results and applications for each logical system; of course, this is natural in so far as there are basic results in computer science that are independent of the logical system in which they happen to be expressed.

A su vez, las instituciones redundaron en una formalización adecuada de la teoría de modelos abstracta de un formalismo lógico [GB92] y, consecuentemente, de un lenguaje de especificación. En este trabajo, Goguen y Burstall reintroducen, en mucha mayor profundidad, el concepto de instituciones y enuncian la utilidad de contar con elementos que permitan relacionar diferentes lenguajes lógicos. Estos elementos fueron introducidos bajo el nombre de *institution morphisms* con el objetivo de definir las *"duplex" institutions* y las *"multiplex" instiutions* que se explican a efecto de permitir el uso simultáneo de más de un lenguaje lógico, uno para especificar la clase de modelos y otro(s) para establecer restricciones pero preservando cierta coherencia entre las nociones de satisfacibilidad de los diferentes lenguajes.

En [Mes89], José Meseguer realizó un extenso estudio sobre la caracterización categórica de los distintos elementos que componen un sistema lógico; entre ellos, la posibilidad de relacionar lenguajes lógicos a partir del uso de traducciones que preservan la semántica de los elementos lingüísticos traducidos. Así, introdujo los llamados *maps of intitutions (entailment systems, logics, logical systems, proof calculi, proof subcalculi and effective proof subcalculi)* como una herramienta que permite la representación de un lenguaje lógico en otro.

El trabajo de Meseguer fue extendido por Tarlecki en [Tar96] en donde el autor introduce, y estudia extensamente, los *institution semimorphisms*, *institutution morphisms* e *institution representations* (denominados *maps of intitutions* por Meseguer en el trabajo mencionado en el párrafo anterior). Estos dos últimos aparecen como relaciones en "direcciones opuestas" en las que lo que se formaliza es, en el caso de los morfismos, la forma en la que una institución (potencialmente más expresiva) contiene un fragmento equipolente a otra institución (potencialmente menos expresiva); y en el caso de las representaciones (posteriormente llamadas co-morfismos [GR02]) la forma en la que una institución (potencialmente menos expresiva) es representada en un fragmento equipolente de otra institución (potencialmente más expresiva). Luego, en [GR02] Goguen y Roçu ampliaron aun más la diversidad de relaciones que podían trazarse entre lenguajes lógicos a partir de alterar la dirección de las relaciones entre signaturas, sentencias y clases de modelos.

La posibilidad de relacionar instituciones a través de este tipo de funciones, que pueden ser interpretadas como traducciones que conservan la semántica, permitió la consideración de diagramas de instituciones como ambientes lógicos heterogéneos [MT09] y su uso como fundamento formal de herramientas como HETS [Mos05, MML07], o las *Grothendiek institutions* [Dia02], cuyos fundamentos son los *extra theory morphisms* [Dia98], y su uso como fundamento de la herramienta CafeOBJ [DF02].

Adicionalmente, en [AC91] Astesiano y Cerioli, y en [Cer93, Cap. 3, Sec 3.3] Maura Cerioli, realizan un estudio de un tipo particular de relación entre instituciones, que es la noción de simulación, caracterizándola como equivalente a un *map of institutions* suryectivo. En esta misma línea de trabajo, en [MW97, MW98], Martini y Wolter ahondan sobre la construcción de una taxonomía que permite comprender en un marco conceptual unificado esta diversidad de relaciones entre instituciones.

A su vez, en [Mos96], Mossakowski introduce tres nuevas clases de relaciones entre instituciones a saber, *conjunctive maps of institutions*, *weak maps of institutions* and *semi maps of institutions*, derivadas de la observación de que la distinción entre signaturas y sentencias puede resultar en un factor limitante a la hora de considerar relaciones de traducción entre instituciones. A modo de ejemplo, *conjunctive maps of institutions* representa una manera de sobrepasar el límite impuesto por el hecho de que los *maps of institutions* o *institution co-morphisms* se basan fuertemente en la idea de que la traducción de una teoría es la extensión a conjuntos de la traducción de sentencias.

A pesar del extenso campo de trabajo mencionado anteriormente, si seguimos la definición original de estas conexiones entre lenguajes lógicos, las funciones entre signaturas, sentencias y modelos, son forzadas a ser totales; es decir que se entiende que dos lenguajes lógicos pueden relacionarse solo si uno de ellos es capaz de subsumir completamente al otro, en tanto a la expresividad de su teoría de modelos. Sin embargo, es bien conocido que muchas lógicas se relacionan en forma parcial. Entre otras, la relación entre CTL [BAMP81] y LTL [Pnu81] es un ejemplo clásico de lógicas que comparten un fragmento propio equipolente, mientras que no existe ninguna traducción conservadora de la semántica total en ninguna de las direcciones.

Otro ejemplo de este tipo de relaciones, y que desarrollaremos por extenso en el presente trabajo a modo de caso de estudio en la Sección 4, es la relación entre el álgebra relacional con clausura reflexo-transitiva (RA^*), una extensión del álgebra relacional [JT51, JT52] con dicho operador de clausura, presentado en [Kle56] y extensamente estudiado en [HKT00], y la lógica de primer orden con igualdad ($\mathsf{FOL}_=$) [End72]. Sin ánimo de adentrarnos en dicho ejemplo, si bien el reducto correspondiente a las álgebras relacionales es equipolente al fragmento de tres variables de la lógica de primer orden con igualdad [TG87], la clausura reflexo-transitiva no lo es [Lib04, Teorema 7.26], presentando un excelente ejemplo del tipo de relaciones sobre las que versa este trabajo.

En este trabajo exploramos la noción de comorfismo parcial (aun cuando nuestras consideraciones también aplican a morfismos) como un medio para proveer este tipo de relación entre instituciones. Para ello daremos una definición abstracta que luego instanciaremos en analogía con las funciones parciales de teoría de conjuntos, obteniendo una clase de comorfismos parciales con propiedades interesantes desde la una perspectiva metateórica.

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma. En la Sección 2 se presentan las definiciones preliminares, en la Sección 3 presentaremos el aporte principal de este trabajo que es la definición de comorfismos parciales entre instituciones y estudiaremos brevemente algunas propiedades de la categoría que generan. En la Sección 4 mostraremos un ejemplo con el objeto de clarificar la utilización de los resultados teóricos presentados en la Sección 3 y finalmente, en la Sección 5 presentaremos algunas conclusiones del presente trabajo y detallaremos algunas líneas de investigación que se abren a partir del presente trabajo.

2. DEFINICIONES PRELIMINARES

A continuación presentaremos las definiciones preliminares que usaremos a lo largo de la presente tesis. La tesis no asume ninguna familiaridad con definiciones de teoría de categorías y en este sentido los temas serán presentados en forma autocontenida. Las definiciones básicas fueron tomadas principalmente de [McL71, Pie91, Fia05].

Definiciones básicas

Definición 1 (Grafo)**.** *Un* grafo *es una estructura* $\langle G_0, G_1 \rangle$ *donde*

- G_0 *es una colección (de nodos),*
- G_1 *es una colección (de flechas),*
- $src : G_1 \to G_0$ *mapea cada flecha a un nodo (el origen de la flecha),*
- $trg : G_1 \to G_0$ *mapea cada flecha a un nodo (el destino de la flecha).*

Si $f \in G_1$ *es una flecha de* x *a* y*, será denotada como* $f : x \to y$ *o* $x \xrightarrow{f} y$*.*

Definición 2 (Homomorfismo de grafos)**.** *Dados dos grafos* G *y* H*. Un* homomorfismo *de grafos* $\phi : G \to H$ *es un par de mappings* $\phi_0 : G_0 \to H_0$ *y* $\phi_1 : G_1 \to H_1$ *tal que para cada flecha* $f : x \to y \in G_1$*, tenemos* $\phi_1(f) : \phi_0(x) \to \phi_0(y) \in H_1$*.*

Definición 3 (Camino en un grafo)**.** *Sea* $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ *un grafo y* $x, y \in G_0$*. Un* camino *desde* x *hacia* y *de longitud* $k > 0$ *es una sequencia* $f_1, \ldots, f_k$ *tal que:*

- $f_i \in G_1$ $(1 \leq i \leq k)$*,*
- $src(f_1) = x$*,*
- $trg(f_i) = src(f_{i+1})$ $(1 < i < k)$*,*
- $trg(f_k) = y$*.*

Denotaremos G_i *la colección de caminos de longitud* i*.*

Definición 4 (Categoría)**.** *Una* categoría *es una estructura* $\langle G, \circ, id \rangle$ *donde:*

- $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ *es un grafo,*
- $\circ : G_2 \to G_1$ *es un mapping desde* G_2 *hacia* G_1 *(llamado composición). Si* $f : x \to y, g : y \to z \in G_1$*, entonces la composición de* f *y* g *se denota* $g \circ f : x \to z$*,*
- $id : G_0 \to G_1$ *es un mapping desde* G_0 *hasta* G_1 *(llamado identidad). Si* $x \in G_0$*,* $id_x : x \to x$ *es la flecha identidad de* x*,*

tal que para todo $x, y \in G_0$ *y* $f, g, h \in G_1$*:*

- *si* $f : x \to y$*, entonces* $f = f \circ id_x = id_y \circ f$*,*
- *si* $src(g) = trg(f)$ *y* $src(h) = trg(g)$*, entonces* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

Dada una categoría $\mathsf{C} = \langle G, \circ, id\rangle$*,* $graph(\mathsf{C})$ *denota a* G*, el grafo de* C*. A su vez,* G_0 *serán llamados los objetos de* C *(denotado de aquí en más como* $|\mathsf{C}|$*) y* G_1 *los morfismos de* C *(denotado de aquí en más como* $||\mathsf{C}||$*). Dados dos objetos* $x, y \in |\mathsf{C}|$ *llamamos* $hom_{\mathsf{C}}(x, y)$ *a la colección de morfismos* $f \in ||\mathsf{C}||$ *tal que* $src(f) = x$ *e* $trg(f) = y$*.*

Diremos que una categoría C *es* pequeña *si tanto* $|\mathsf{C}|$ *como* $||\mathsf{C}||$ *son conjuntos. A su vez, diremos que es* localmente pequeña *si para todo* $x, y \in |\mathsf{C}|$*,* $hom_{\mathsf{C}}(x, y)$ *es un conjunto.*

A partir de ahora definiremos una categoría simplemente declarando cuáles son sus objetos y sus morfismos, definiendo la composición y las identidades, omitiendo cualquier mención al grafo subyacente. Presentaremos una categoría como una estructura $\langle \mathcal{O}, \mathcal{A}\rangle$ donde $\mathcal{O}$ es la colección de objetos y $\mathcal{A}$ es la colección de morfismos, junto con la definición de $id_x \in \mathcal{A}$ para cada objeto $x \in \mathcal{O}$ y $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Definición 5 (Subcategoría)**.** *Dadas dos categorías* $\mathsf{C} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathcal{A}_{\mathsf{C}}\rangle$ *y* $\mathsf{D} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{D}}, \mathcal{A}_{\mathsf{D}}\rangle$*. Decimos que* D *es* subcategoría *de* C *si y sólo si:*

- $\mathcal{O}_{\mathsf{D}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$*,*
- $\mathcal{A}_{\mathsf{D}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathsf{C}}$ *tal que:*
  - *si* $x \in \mathcal{O}_{\mathsf{D}}$*, entonces* $id_{\mathsf{D}x} = id_{\mathsf{C}x}$*,*
  - *si* $f : x \to y, g : y \to z \in \mathcal{A}_{\mathsf{D}}$*, entonces* $g \circ_{\mathsf{D}} f = g \circ_{\mathsf{C}} f$*.*

Cuando D *es subcategoría de* C *se denota* $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C}$*.*

Definición 6 (Categoría discreta)**.** *Dada una categoría* C*, decimos que* C *es una* categoría discreta *si los únicos morfismos que tiene son las identidades de cada objeto. Es decir si:*

- $hom_C(x, x) = \{id_x\}$ *para todo* $x \in |\mathsf{C}|$*, y*
- $hom_C(x, y) = \emptyset$ *para todo* $x, y \in |\mathsf{C}|$ *tal que* $x \neq y$*.*

En general, la noción de categoría cociente está dada solo en relación al cociente de cada uno de los conjuntos de morfismos entre objetos a través de una relación manteniendo el mismo conjunto de objetos. La siguiente definición generaliza este concepto de forma que el cociente también es tomado sobre el conjunto de objetos, lo que hace la definición levemente más compleja.

Definición 7 (Categoría cociente)**.** *Dadas* C *una categoría pequeña y,* $R \subseteq |\mathsf{C}| \times |\mathsf{C}|$ *y* $R' = \{R'_{x,y}\}_{x,y \in |\mathsf{C}|} \subseteq hom_{\mathsf{C}}(x, y) \times hom_{\mathsf{C}}(x, y)$ *congruencias, se define* $\mathsf{C}\big|_{R,R'}$ *la* categoría cociente *de* C *por* R *y* R' *de la siguiente forma:*

- $|\mathsf{C}|_{R,R'}| = |\mathsf{C}||_R$, *dado* $x \in |\mathsf{C}|$, $[x]_R$ *denota la clase de los objetos* $y \in |\mathsf{C}|$ *tal que* $R(x,y)$, *y*

- *para todo* $x, y \in |\mathsf{C}|$, $hom_{\mathsf{C}|_{R,R'}}([x]_R, [y]_R) = hom_{\mathsf{C}}(x,y)|_{R'_{x,y}}$.

Una de las particularidades distintivas de la teoría de categorías es la posibilidad de inferir propiedades de una cierta subcolección de objetos y morfismos por su disposición en alguna estructura particular en la categoría a la que pertenecen. La forma de indentificar estas subcolecciones de objetos y morfismos es a partir del concepto de diagrama.

Definición 8 (Diagrama)**.** *Sea* C *una categoría y* I *un grafo. Un* diagrama *con forma* I *en* C *es un homomorfismo* $\delta = \langle \delta_0, \delta_1 \rangle : I \to graph(\mathsf{C})$.

Definición 9 (Diagrama conmutativo)**.** *Sea* C *una categoría y* $I = \langle G_0, G_1 \rangle$ *un grafo. Entonces un diagrama* $\delta = \langle \delta_0, \delta_1 \rangle : I \to graph(\mathsf{C})$ *conmuta si y sólo si para* $f_1, \ldots, f_i \in G_i$, $g_1, \ldots, g_j \in G_j$ *tal que* $src(f_1) = src(g_1)$ *y* $trg(f_i) = trg(g_j)$, *vale en* C *la siguiente igualdad*

$$\delta_1(f_i) \circ \cdots \circ \delta_1(f_1) = \delta_1(g_j) \circ \cdots \circ \delta_1(g_1)$$

Se suele decir que la teoría de categorías es el estudio de una clase de individuos pero a partir de los aspectos sociales que los vinculan; así, a diferencia de la teoría de conjuntos, las propiedades de estos individuos son caracterizadas por los morfismos entre ellos más que por la posibilidad de hacer observaciones sobre su estructura. Intuitivamente, el concepto de functor en teoría de categorías juega el rol relación entre dos categorías.

Definición 10 (Functor)**.** *Dadas dos categorías* $\mathsf{C} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathcal{A}_{\mathsf{C}} \rangle$ *y* $\mathsf{D} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{D}}, \mathcal{A}_{\mathsf{D}} \rangle$. *Entonces* $\delta : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *es un* functor *si y sólo si:*

- *si* $x \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, *entonces* $\delta(x) \in \mathcal{O}_{\mathsf{D}}$,

- *si* $f : x \to y \in \mathcal{A}_{\mathsf{C}}$, *entonces* $\delta(f) : \delta(x) \to \delta(y) \in \mathcal{A}_{\mathsf{D}}$, *tal que:*

  - *si* $x \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$, $\delta(id^{\mathsf{C}}{}_x) = id^{\mathsf{D}}{}_{\delta(x)}$,
  - *si* $f : x \to y, g : y \to z \in \mathcal{A}_{\mathsf{C}}$, *entonces* $\delta(g \circ_{\mathsf{C}} f) = \delta(g) \circ_{\mathsf{D}} \delta(f)$.

Dadas dos categorías localmente pequeñas C *y* D *y* $\psi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, *para todo* $x, y \in |\mathsf{C}|$ ψ *induce una función* $\psi_{x,y} : hom_{\mathsf{C}}(x,y) \to hom_{\mathsf{D}}(\psi(x), \psi(y))$; *así diremos que* ψ *es* faithful *si* $\psi_{x,y}$ *es inyectiva,* full *si* $\psi_{x,y}$ *es suryectiva y* fully faithful *(i.e. full y faithful) si* $\psi_{x,y}$ *es biyectiva.*

Denotaremos Cat a la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas (i.e. categorías en las que tanto sus objetos como sus morfismos son conjuntos y no clases propias) y cuyos morfismos son los functores entre dichas categorías.

Las siguientes definiciones formalizan algunas particularidades del concepto de functor que serán de utilidad en las secciones venideras.

Proposición 1 (Functor inverso)**.** *Sean* C *y* D *categorías; si* $\psi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *es un functor biyectivo en objetos y fully faithful, entonces existe* $\phi : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ *tal que:*

$$\phi \circ \psi = \mathbf{1}_{\mathsf{C}} \quad y \quad \psi \circ \phi = \mathbf{1}_{\mathsf{D}}$$

En este caso, ϕ *se denomina el functor inverso de* ψ *y se lo nota* ψ^{-1}.

Demostración. Sea $\phi : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ un morfismo definido como sigue:

- $\phi(x) = x'$ para todo $x \in |\mathsf{D}|$, donde $x' \in |\mathsf{C}|$ y verifica $\psi(x') = x$. Como ψ es biyectivo en objetos tenemos que x' existe y es único.
- $\phi(f) = f'$ para todo $f \in ||\mathsf{D}||$, donde f' verifica $\psi(f') = f$. Como ψ es fully faithful tenemos que f' existe y es única.

Se puede observar, por definición de functor, que dado $x \in |\mathsf{D}|$, existe $x' \in |\mathsf{C}|$ tal que $\phi(x) = x'$ y lo mismo vale dado $f : x \to y \in ||\mathsf{D}||$ arrojando $\phi(f : x \to y) = f' : x' \to y'$ tal que se verifica $\phi(f) = f'$. Por definición de ϕ es claro ver que $\phi(f) \in ||\mathsf{C}||$. Como ψ es functor tenemos que $\psi(f') : \psi(x') \to \psi(y') \in ||\mathsf{D}||$. Entonces, como $\psi(f') = f$, tenemos que necesariamente $x = \psi(x')$ e $y = \psi(y')$. Por lo tanto, por definición de ϕ, tenemos que $x' = \phi(x)$ e $y' = \phi(y)$. Veamos que ϕ preserva identidades. Sea $x \in |\mathsf{D}|$ tenemos que

$\phi(x) = x'$ y se verifica $\psi(x') = x$. Luego, tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} \psi(id^{\mathsf{C}}_{x'}) & = & id^{\mathsf{D}}_{\psi(x')} & [\text{ pues } \psi \text{ es functor }] \\ & = & id^{\mathsf{D}}_{x} & [\text{ pues } \psi(x') = x \text{ }] \end{array}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} \phi(id^{\mathsf{D}}_{x}) & = & id^{\mathsf{C}}_{x'} & [\text{ por definición de } \phi \text{ y ya que } \psi(id^{\mathsf{C}}_{x'}) = id^{\mathsf{D}}_{x} \text{ }] \\ & = & id^{\mathsf{C}}_{\phi(x)} & [\text{ pues } \phi(x) = x' \text{ }] \end{array}$$

Veamos ahora que que ϕ preserva composición. Sean $f : x \to y$, $g : y \to z \in ||\mathsf{D}||$ tenemos que $\phi(f : x \to y) = f' : x' \to y'$ tal que $\psi(f') = f$, $\psi(x') = x$ e $\psi(y') = y$, y que $\phi(g : y \to z) = g' : y' \to z'$ tal que $\psi(g') = g$, $\psi(y') = y$ e $\psi(z') = z$. Tenemos entonces:

$$\begin{array}{rcll} \psi(g' \circ^{\mathsf{C}} f') & = & \psi(g') \circ^{\mathsf{D}} \psi(f') & [\text{ pues } \psi \text{ es functor }] \\ & = & g \circ^{\mathsf{D}} f & [\text{ pues } \psi(f') = f \text{ y } \psi(g') = g \text{ }] \end{array}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} \phi(g \circ^{\mathsf{D}} f) & = & g' \circ^{\mathsf{C}} f' & [\text{ por definición de } \phi \text{ y ya que } \psi(g' \circ^{\mathsf{C}} f') = g \circ^{\mathsf{D}} f \text{ }] \\ & = & \phi(g) \circ^{\mathsf{D}} \phi(f) & [\text{ pues } \phi(f) = f' \text{ y } \phi(g) = g' \text{ }] \end{array}$$

La demostración de que ϕ es único es análoga a la demostración de la unicidad de la función inversa de una función biyectiva en teoría de conjuntos. □

Definición 11 (Imagen de functor)**.** *Dadas dos categorías* $\mathsf{C} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathcal{A}_{\mathsf{C}} \rangle$ *y* $\mathsf{D} = \langle \mathcal{O}_{\mathsf{D}}, \mathcal{A}_{\mathsf{D}} \rangle$ *y un functor* $\delta : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$*, la imagen de* δ *es una estructura* $\langle \mathcal{O}, \mathcal{A} \rangle$ *donde* $\mathcal{O} = \{\delta(x) | x \in \mathcal{O}_{\mathsf{C}}\}$ *y* $\mathcal{A} = \{\delta(\sigma) | \sigma \in \mathcal{A}_{\mathsf{C}}\}$*. La denotamos* $Img(\delta)$*.*

Definición 12 (Categoría opuesta)**.** *Dada una categoría* $\mathsf{C} = \langle \mathcal{O}_\mathsf{C}, \mathcal{A}_\mathsf{C} \rangle$ *decimos que la categoría opuesta de* C *es* C^{op} *definida como:*

- $\mathcal{O}_{\mathsf{C}^{\mathsf{op}}} = \mathcal{O}_\mathsf{C}$
- $\mathcal{A}_{\mathsf{C}^{\mathsf{op}}} = \{\, f^{\mathsf{op}} : y \to x \mid f : x \to y \in \mathcal{A}_\mathsf{C} \,\}$

Lema 1. *Sean* C *y* D *categorías, y un functor* $\phi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$*. Si* ϕ *es inyectivo en objetos y faithful, entonces* $Img(\phi)$ *es una categoría. En particular* $Img(\phi)$ *es subcategoría de* D*.*

Demostración. Sea $x \in |Img(\phi)|$, luego, existe $x' \in |\mathsf{C}|$ tal que $\phi(x') = x$. Como ϕ es functor, entonces sabemos que $\phi(id^{\mathsf{C}}_{x'}) = id^{D}_{x}$ pertenece a $||Img(\phi)||$.

Sean ahora $f : x \to y, g : y \to z \in ||Img(\phi)||$, luego existen $f' : x' \to y'_0, g' : y'_1 \to z' \in ||\mathsf{C}||$ tal que $f = \phi(f'), g = \phi(g')$. Como ϕ es inyectivo en objetos y sabemos que $\phi(y'_0) = y$ y $\phi(y'_1) = y$ tenemos que $y'_0 = y'_1$. Luego, en vista que existen $f' : x' \to y', g' : y' \to z' \in ||\mathsf{C}||$, se tiene que existe $g' \circ^{\mathsf{C}} f' : x' \to z' \in ||\mathsf{C}||$ tal que $\phi(g' \circ^{\mathsf{C}} f') = \phi(g') \circ^{\mathsf{D}} \phi(f')$ debido a que ϕ es functor y consecuentemente preserva la composición.

Ahora probamos que las identidades en $Img(\phi)$ se comporta como el neutro de la composición: sea $f : x \to y \in ||Img(\phi)||$ cuya pre imagen es $f' : x' \to y' \in ||\mathsf{C}||$, luego

$$
\begin{array}{rcll}
f & = & \phi(f) & [\text{ por hipótesis. }] \\
 & = & \phi(f' \circ^{\mathsf{C}} id^{\mathsf{C}}_{x}) & [\text{ pues } id^{\mathsf{C}}_{x'} \text{ es identidad en } \mathsf{C}.] \\
 & = & \phi(f') \circ^{\mathsf{D}} \phi(id^{\mathsf{C}}_{x}) & [\text{ pues } \phi \text{ es functor. }] \\
 & = & f \circ^{\mathsf{D}} id^{\mathsf{D}}_{x} & [\text{ por hipótesis y definición de } \phi.]
\end{array}
$$

La demostración de esta propiedad para la composición en la otra dirección es análoga.

Ahora probemos que la composición en $Img(\phi)$ es asociativa: sean $f, g, h \in ||Img(\phi)||$ si $src(g) = trg(f)$ tal que $src(h) = trg(g)$, luego existen $f', g', h' \in ||\mathsf{C}||$ tal que $f = \phi(f')$, $g = \phi(g')$ y $h = \phi(h')$. Entonces tenemos que

$$
\begin{array}{rcll}
\phi(trg(f')) & = & trg(\phi(f')) & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }] \\
 & = & trg(f) & [\text{ pues } \phi(f') = f] \\
 & = & src(g) & [\text{ por hipótesis }] \\
 & = & src(\phi(g')) & [\text{ pues } g = \phi(g')] \\
 & = & \phi(src(g')) & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }]
\end{array}
$$

A partir de esta igual y como ϕ es inyectivo en objetos podemos afirmar que $trg(f') = src(g')$. La demostración de que $src(h') = trg(g')$ es análoga. Por lo tanto, como C es categoría tenemos que $(h' \circ^{\mathsf{C}} g') \circ^{\mathsf{C}} f' = h' \circ^{\mathsf{C}} (g' \circ^{\mathsf{C}} f')$. Luego

$$\begin{array}{rcll}
(h \circ^{\mathsf{D}} g) \circ^{\mathsf{D}} f & = & (\phi(h') \circ^{\mathsf{D}} \phi(g')) \circ^{\mathsf{D}} \phi(f') & [\text{ pues } f = \phi(f'), \\
& & & \;g = \phi(g') \text{ y } h = \phi(h') \;] \\
& = & \phi(h' \circ^{\mathsf{C}} g') \circ^{\mathsf{D}} \phi(f') & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }] \\
& = & \phi((h' \circ^{\mathsf{C}} g') \circ^{\mathsf{C}} f') & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }] \\
& = & \phi(h' \circ^{\mathsf{C}} (g' \circ^{\mathsf{C}} f')) & [\text{ pues } \mathsf{C} \text{ es categoría y, por lo tanto,} \\
& & & \;\text{la composición } \circ^{\mathsf{C}} \text{ es asociativa }] \\
& = & \phi(h') \circ^{\mathsf{D}} \phi(g' \circ^{\mathsf{C}} f') & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }] \\
& = & \phi(h') \circ^{\mathsf{D}} (\phi(g') \circ^{\mathsf{D}} \phi(f')) & [\text{ pues } \phi \text{ es functor }] \\
& = & h \circ^{\mathsf{D}} (g \circ^{\mathsf{D}} f) & [\text{ pues } f = \phi(f'), \\
& & & \;g = \phi(g') \text{ y } h = \phi(h') \;]
\end{array}$$

Probemos ahora que $Img(\phi)$ es subcategoría de D. Como D es el codominio de ϕ es claro ver que $|Img(\phi)| \subseteq |\mathsf{D}|$ y que $||Img(\phi)|| \subseteq ||\mathsf{D}||$. Es claro ver que las identidades son id_x^{D} para $x \in |Img(\phi)|$ y que la composición es $\circ^{\mathsf{D}}$ para morfismos en $||Img(\phi)||$. □

Proposición 2 (Functor inverso parcial)**.** *Sean C y D categorías; si $\psi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un functor inyectivo en objetos y faithful, entonces existe un functor $\phi : Img(\psi) \to \mathsf{C}$ tal que:*

$$\phi \circ \psi = \mathbf{1}_{\mathsf{C}} \quad y \quad \psi \circ \phi = \mathbf{1}_{\mathsf{D}}\big|_{Img(\psi)} = \mathbf{1}_{Img(\psi)}$$

En este caso, ϕ se denomina el functor inverso parcial de ψ y también se lo nota ψ^{-1}.

Demostración. Observando que, como ψ es un functor inyectivo en objetos y faithful, si restringimos su codominio a $Img(\psi)$ obtenemos un functor biyectivo en objetos y fully faithful. Luego la demostración es análoga a la desarrollada en la Proposición 1. □

Definición 13 (Isomorfismo de categorías)**.** *Sean C y D categorías, decimos que C y D son* isomorfas *si existen un functor $\psi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ biyectivo en objetos y fully faithful.*

Dadas C y D categorías, notaremos $\mathsf{C} \cong \mathsf{D}$ cuando C y D sean isomorfas.

Definición 14 (Restricción de functor)**.** *Dado un functor $\alpha : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y una categoría C' tal que $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$. Definimos $\alpha\big|_{\mathsf{C}'}$ como la restricción de dominio del functor α a la categoría C', de la siguiente manera:*

- $\alpha\big|_{\mathsf{C}'}(x) = \alpha(x)$ *para todo* $x \in |\mathsf{C}'|$
- $\alpha\big|_{\mathsf{C}'}(f) = \alpha(f)$ *para todo* $f \in ||\mathsf{C}'||$

El siguiente lema expone cómo un functor restringido preserva las propiedades del functor original.

Lema 2. *Sea $\phi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ functor. Si C^0 es subcategoría de C entonces $\phi^0 = \phi\big|_{\mathsf{C}^0}$ es functor.*

Demostración. Veamos primero que $\phi^0(x) \in |\mathsf{D}|$ para todo $x \in |\mathsf{C}^0|$. Como $\mathsf{C}^0 \subseteq \mathsf{C}$ tengo que $x \in |\mathsf{C}|$. Por definición de ϕ^0 tengo $\phi^0(x) = \phi(x)$ y como ϕ es functor entonces $\phi(x) \in |\mathsf{D}|$. Luego, veamos que si $f : x \to y \in ||\mathsf{C}^0||$ entonces $\phi^0(f) : \phi^0(x) \to \phi^0(y) \in ||\mathsf{D}||$ preservando identidad y composición. Como $f \in ||\mathsf{C}^0||$ tengo que $f \in ||\mathsf{C}||$, además por definición tengo que $\phi^0(f) = \phi(f)$. Luego, como ϕ es functor sabemos que $\phi(f) : \phi(x) \to \phi(y) \in ||\mathsf{D}||$, y como $x, y \in |\mathsf{C}^0|$ tengo que $\phi^0(x) = \phi(x)$ y $\phi^0(y) = \phi(y)$, entonces $\phi^0(f) : \phi^0(x) \to \phi^0(y) \in ||\mathsf{D}||$.

Luego, debemos probar que ϕ^0 preserva las identidades:

$$
\begin{array}{rcll}
\phi^0(id_x) & = & \phi(id_x) & [\text{ por definición de } \phi^0.] \\
& = & id_{\phi(x)} & [\text{ pues } \phi \text{ es functor. }] \\
& = & id_{\phi^0(x)} & [\text{ pues } x \in |\mathsf{C}^0| \text{ y por lo tanto } \phi^0(x) = \phi(x).]
\end{array}
$$

Veamos ahora que ϕ^0 preserva composición: sea $f : x \to y, g : y \to z \in ||\mathsf{C}^0||$

$$
\begin{array}{rcll}
\phi^0(g \circ f) & = & \phi(g \circ f) & [\text{ por definición de } \phi^0.] \\
& = & \phi(g) \circ \phi(f) & [\text{ pues } \phi \text{ es functor. }] \\
& = & \phi^0(g) \circ \phi^0(f) & [\text{ pues } f, g \in ||\mathsf{C}^0|| \text{ y por lo tanto } \phi^0(f) = \phi(f) \\
& & & \quad \text{ y } \phi^0(g) = \phi(g).]
\end{array}
$$

□

Definición 15 (Subfunctor)**.** *Dados dos functores $\alpha, \beta : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$. Decimos que α es* subfunctor *de β si y sólo si:*

- *$\alpha(x) \subseteq \beta(x)$ para todo $x \in |\mathsf{C}|$*
- *$\alpha(f) = \beta(f)\big|_{\alpha(x)}$ para todo $f : x \to y \in ||\mathsf{C}||$*

Adicionalmente necesitaremos una definición análoga a la anterior, pero con el objeto de formalizar la noción de subfunctor para el caso en que el codominio es Cat en lugar de Set.

Definición 16. *Dados dos functores $\alpha, \beta : \mathsf{C} \to \mathsf{Cat}$. Decimos que α es* subfunctor *de β si y sólo si:*

- *$\alpha(x) \subseteq \beta(x)$ para todo $x \in |\mathsf{C}|$*
- *$\alpha(f) = \beta(f)\big|_{\alpha(x)}$ para todo $f : x \to y \in ||\mathsf{C}||$*

Otra categoría conocida, y de gran relevancia en la teoría de categoría, y en particular para este trabajo, es la categoría cuyos objetos son la clase de los functores, y los morfismos son transformaciones naturales entre estos functores.

Definición 17 (Transformación natural)**.** *Sean C y D categorías y $\psi, \phi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ functores, entonces $\tau : \psi \Rightarrow \phi : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es una* transformación natural *si es una función que asigna a cada objeto $c \in |\mathsf{C}|$ un morfismo $\tau_c : \psi(c) \to \phi(c)$ tal que para cada $c, c' \in |\mathsf{C}|$, $f : c \to c' \in \mathcal{A}_{\mathsf{C}}$, el siguiente diagrama conmuta*

$$
\begin{tikzcd}
\psi(c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "\psi(f)"] & \phi(c) \arrow[d, "\phi(f)"] \\
\psi(c') \arrow[r, "\tau_{c'}"] & \phi(c')
\end{tikzcd}
$$

Instituciones y *General logics*

En esta sección formalizaremos algunos tópicos del campo *General logics* [Mes89] haciendo eje particular en las Instituciones [GB84] como caracterización formal y abstracta de la teoría de modelos de un sistema lógico. Las definiciones y resultados que presentamos a continuación fueron tomados principalmente de [GB92, Tar96, Mes89] pero usando una nomenclatura más moderna tomada de [GR02].

Un *entailment system* queda definido a partir de identificar una familia de relaciones de consecuencia sintáctica indexada por los objetos de una categoría que identificaremos como las signaturas del lenguaje lógico. Como es usual, a estas relaciones de consecuencia se les requerirá que satisfagan reflexividad, monotonía[1] y transitividad. Adicionalmente, debe ser considerada una noción de traducción entre signaturas.

Definición 18 (Entailment system [Mes89])**.** *Un* entailment system *es una estructura* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- Sign *es una categoría de signaturas,*
- $\mathbf{Sen} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *es un functor. Sea* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$*; entonces* $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ *retorna el conjunto de* Σ*-sentencias, y*
- $\{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}$*, donde* $\vdash_\Sigma \subseteq 2^{\mathbf{Sen}(\Sigma)} \times \mathbf{Sen}(\Sigma)$*, es una familia de relaciones binarias tal que para cualquier* $\Sigma, \Sigma' \in |\mathsf{Sign}|$, $\{\phi\} \cup \{\phi_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$*,* $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$*, se satisfacen las siguientes condiciones:*
  - *reflexividad:* $\{\phi\} \vdash_\Sigma \phi$*,*
  - *monotonía: si* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$ *y* $\Gamma \subseteq \Gamma'$*, entonces* $\Gamma' \vdash_\Sigma \phi$*,*
  - *transitividad: si* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi_i$ *para todo* $i \in \mathcal{I}$ *y* $\{\phi_i\}_{i \in \mathcal{I}} \vdash_\Sigma \phi$*, entonces* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$*, y*
  - $\vdash$*-traducción: si* $\Gamma \vdash_\Sigma \phi$*, entonces para cualquier morfismo* $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ *en* Sign*,* $\mathbf{Sen}(\sigma)(\Gamma) \vdash_{\Sigma'} \mathbf{Sen}(\sigma)(\phi)$*.*

Las siguientes definiciones formalizan el concepto de *teoría*, es decir un conjunto de fórmulas de una signatura de las que se deriva o no la validez del resto de las fórmulas de la signatura.

Definición 19 (Presentaciones (de teorías) [Mes89])**.** *Sea* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *un* entailment system*. Su categoría de presentaciones (de teorías)* Th *es un par* $\langle \mathcal{O}, \mathcal{A}\rangle$ *tal que:*

- $\mathcal{O} = \{\ \langle \Sigma, \Gamma\rangle \mid \Sigma \in |\mathsf{Sign}| \textit{ and } \Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)\ \}$*, y*
- $\mathcal{A} = \{\ \sigma : \langle \Sigma, \Gamma\rangle \to \langle \Sigma', \Gamma'\rangle \mid \langle \Sigma, \Gamma\rangle, \langle \Sigma', \Gamma'\rangle \in \mathcal{O}, \sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||, \textit{ para toda } \gamma \in \Gamma, \Gamma' \vdash_{\Sigma'} \mathbf{Sen}(\sigma)(\gamma)\ \}$*.*

Adicionalmente, si un morfismo $\sigma : \langle \Sigma, \Gamma\rangle \to \langle \Sigma', \Gamma'\rangle$ satisface $\mathbf{Sen}(\sigma)(\Gamma) \subseteq \Gamma'$, se dice que es *conservador*. Si nos quedamos solo con aquellos morfismos de Th que son conservadores, se obtiene la subcategoría Th_0.

[1] La teoría de las instituciones y *General logics* se enfocan en la caracterización de lógicas monótonas. El lector interesado es referido a [CLM12] para una presentación de *entailment systems* para lógicas no monótonas.

Definición 20 (Teorías [Mes89])**.** *Sea* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *un* entailment system *y* $\langle \Sigma, \Gamma\rangle \in |\mathsf{Th}|$. *Se define* $^\bullet : 2^{\mathbf{Sen}(\Sigma)} \to 2^{\mathbf{Sen}(\Sigma)}$ *como sigue:* $\Gamma^\bullet = \{\, \gamma \mid \Gamma \vdash_\Sigma \gamma \,\}$. *Esta función se extiende a objetos de* Th *como sigue:* $\langle \Sigma, \Gamma\rangle^\bullet = \langle \Sigma, \Gamma^\bullet\rangle$. $\Gamma^\bullet$ *se denomina la teoría generada por* Γ.

Definición 21 (Sensibilidad y simplicidad [Mes89])**.** *Sean* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \{\vdash'^{\Sigma}\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}'|}\rangle$ entailment systems, $\Phi : \mathsf{Th} \to \mathsf{Th}'$ *un functor y* $\alpha : \mathbf{Sen} \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \Phi$ *una transformación natural. Se dice que* Φ *es* α-sensible *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *existe un functor* $\Phi^\diamond : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Sign}'$ *tal que* $\mathbf{sign}' \circ \Phi = \Phi^\diamond \circ \mathbf{sign}$, *donde* $\mathbf{sign} : \mathsf{Th} \to \mathsf{Sign}$ *y* $\mathbf{sign}' : \mathsf{Th}' \to \mathsf{Sign}'$ *son los functores* forgetful *que van de presentaciones a signaturas, y*

2. *if* $\langle \Sigma, \Gamma\rangle \in |\mathsf{Th}|$ *y* $\langle \Sigma', \Gamma'\rangle \in |\mathsf{Th}'|$ *tal que* $\Phi(\langle \Sigma, \Gamma\rangle) = \langle \Sigma', \Gamma'\rangle$, *entonces* $(\Gamma')^\bullet = (\emptyset' \cup \alpha_\Sigma(\Gamma))^\bullet$, *donde* $\emptyset' = \alpha_\Sigma(\emptyset)$[2].

Φ *se dice que es* α-simple *si, en lugar de satisfacer* $(\Gamma')^\bullet = (\emptyset' \cup \alpha_\Sigma(\Gamma))^\bullet$ *en la Condicion 2, se satisface la condición más fuerte* $\Gamma' = \emptyset' \cup \alpha_\Sigma(\Gamma)$.

Es trivial ver que basándonos en la monotonía de $^\bullet$, α-simplicidad implica α-sensibilidad. Un functor α-sensible tiene la propiedad de que su transformación natural asociada α depende solo de las signaturas. Esto es una consecuencia del siguiente lema.

Lema 3 (Lema 22, [Mes89])**.** *Sean* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \{\vdash'^{\Sigma}\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}'|}\rangle$ entailment systems *y* $\Phi : \mathsf{Th} \to \mathsf{Th}'$ *un functor que satisface la Condición 1 de la Definición 21. Entonces cualquier transformación natural* $\alpha : \mathbf{Sen} \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \Phi$ *puede ser obtenida de la transformación natural* $\alpha^\diamond : \mathbf{Sen}(\Sigma) \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \Phi^\diamond$ *a partir de la composición horizontal con el functor* $\mathbf{sign} : \mathsf{Th} \to \mathsf{Sign}$.

A grandes rasgos, una *Institución* es una formalización abstracta de la teoría de modelos de una lógica que hace explícitas las relaciones existentes entre signaturas, sentencias y modelos. Estos aspectos son reflejados a través de la introducción de las signaturas como categoría y de la definición de functores de esta categoría en las categorías Set and Cat, con el objeto de capturar el conjunto de sentencias y la categoría de modelos, respectivamente, para cada signatura.

Definición 22 (Institución [GB84])**.** *Una* institución *es una estructura de la forma* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- Sign *es una categoría de signaturas,*
- $\mathbf{Sen} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *es un functor. Sea* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$*; entonces* $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ *es el conjunto de* Σ*-sentencias, y*
- $\mathbf{Mod} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$ *es un functor. Sea* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, *entonces* $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ *es su correspondiente categoría de* Σ*-modelos,*

[2] $\emptyset'$ no necesariamente es el conjunto vacío de axiomas. Esto será clarificado más adelante.

- $\{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}$ *es una familia de relaciones binarias* $\models_\Sigma\subseteq |\mathbf{Mod}(\Sigma)| \times \mathbf{Sen}(\Sigma)$*, para toda* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$

tal que para todo $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$*,* $\phi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}(\Sigma')|$*, la siguiente condición de* $\models$*-invarianza se satisface:*

$$\mathcal{M}' \models_{\Sigma'} \mathbf{Sen}(\sigma)(\phi) \quad \textit{sii} \quad \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}') \models_\Sigma \phi\ .$$

Intuitivamente, la última condición indica que *la noción de verdad es invariante respecto de cambio de notación.* Dada $\langle\Sigma,\Gamma\rangle \in |\mathsf{Th}|$, $\mathbf{Mod} : \mathsf{Th}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$ se puede extender a un functor $\mathbf{Mod} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$ tal que $\mathbf{Mod}(\langle\Sigma,\Gamma\rangle)$ denota la subcategoría completa de $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ determinada por aquellos modelos $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ tal que $\mathcal{M} \models_\Sigma \gamma$, para toda $\gamma \in \Gamma$. La relación $\models_\Sigma$ entre conjuntos de fórmulas y fórmulas queda definida como sigue: dada $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$ y $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$,

$$\Gamma \models_\Sigma \alpha \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{M} \models_\Sigma \alpha, \text{ para todo } \mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}(\langle\Sigma,\Gamma\rangle)|.$$

Luego, de las Definiciones 18 y 22, es posible dar una definición de *lógica* a partir de relacionar las caracterizaciones basadas en teoría de modelos y teoría de la prueba. Como es costumbre, cierta coherencia entre las relaciones de fuerza sintáctica y semántica es necesaria para reflejar las nociones de corrección y completitud clásicas en sistemas lógicos.

Definición 23 (Lógica [Mes89])**.** *Una* lógica *es una estructura* $\langle\mathsf{Sign},\mathbf{Sen},\mathbf{Mod},\{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|},\{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- $\langle\mathsf{Sign},\mathbf{Sen},\{\vdash_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *es un* entailment system*,*
- $\langle\mathsf{Sign},\mathbf{Sen},\mathbf{Mod},\{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *es una institución, y*
- *la siguiente condición de* corrección *se satisface: para cada* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$*,* $\phi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$*,* $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$*:*
$$\Gamma \vdash_\Sigma \phi \quad \textit{implica} \quad \Gamma \models_\Sigma \phi\ .$$

Adicionalmente, una lógica es completa *si se satisface la siguiente condición: para cada* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$*,* $\phi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$*,* $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$*:*

$$\Gamma \models_\Sigma \phi \quad \textit{implica} \quad \Gamma \vdash_\Sigma \phi.$$

En relación a la definición de Institución será de utilidad la posibilidad de identificar una sub subinstitución que contenga solo algunos de los elementos presentes en la institución de forma que sea consistente con esta.

Definición 24 (Subinstitución)**.** *Sean* $\mathbb{I}$ *e* $\mathbb{I}'$ *las instituciones* $\langle\mathsf{Sign},\mathbf{Sen},\mathbf{Mod},\{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\langle\mathbf{Sign}',\mathbf{Sen}',\mathbf{Mod}',\{\models'_{\Sigma'}\}_{\Sigma'\in|\mathsf{Sign}'|}\rangle$ *respectivamente. Decimos que* $\mathbb{I}$ *es* subinstitución *de* $\mathbb{I}'$ *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\mathsf{Sign} \subseteq \mathsf{Sign}'$*,*
- $\mathbf{Sen}$ *es subfunctor de* $\mathbf{Sen}'\big|_{\mathsf{Sign}}$*,*

- $\mathbf{Mod}$ *es subfunctor de* $\mathbf{Mod}'|_{\mathsf{Sign}^{\mathsf{op}}}$, *and*
- *para toda* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\models_\Sigma \subseteq \models'_\Sigma$

Cuando $\mathbb{I}$ *es subinstitución de* $\mathbb{I}'$ *lo notaremos* $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{I}'$.

Adicionalmente, utilizaremos algunas definiciones del campo de la teoría de modelos pues serán necesarias en secciones subsiguientes para establecer restricciones importantes en la caracterización de parcialidad.

Definición 25 (Equivalencia módulo un conjunto de fórmulas)**.** *Sean* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *una institución,* $\Sigma \in \mathbf{Sign}$ *y* $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$. *Decimos que dos modelos* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ *son* equivalentes módulo Γ *si y solo si para toda* $\alpha \in \Gamma$, $\mathcal{M}_1 \models_\Sigma \alpha$ *si y solo si* $\mathcal{M}_2 \models_\Sigma \alpha$.

En el caso en que dos modelos $\mathcal{M}_1$ *y* $\mathcal{M}_2$ *sean equivalentes módulo un cierto* Γ *lo notaremos* $\mathcal{M}_1 \equiv_\Gamma \mathcal{M}_2$.

Definición 26 (Equivalencia elemental)**.** *Sean* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *una institución y* $\Sigma \in \mathbf{Sign}$ *y* $\Sigma \in \mathbf{Sign}$. *Decimos que dos modelos* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ *son* elementalmente equivalentes *si y solo si* $\mathcal{M}_1 \equiv_{\mathbf{Sen}(\Sigma)} \mathcal{M}_2$.

En el caso en que dos modelos $\mathcal{M}_1$ *y* $\mathcal{M}_2$ *sean elementalmente equivalentes lo notaremos* $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$.

Definición 27 (Cociente por equivalencia elemental)**.** *Sea* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *una institución. Diremos que* $\mathbb{I}$ *está concientada por equivalencia elemental si para toda* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\mathbf{Mod}(\Sigma) \cong \mathbf{Mod}(\Sigma)|_{\equiv, \{id_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}\}_{\mathcal{M},\mathcal{M}' \in \mathbf{Mod}(\Sigma)}}$.

Relaciones entre instituciones

La primera noción de morfismo entre instituciones fue introducida en [GB92]. Más tarde, Meseguer introdujo la noción de *plain map* [Mes89], y en [Tar96] Tarlecki discutió extensivamente las propiedades estructurales de la categoría de las instituciones dependiendo de la forma en que estas se relacionan, y cómo estas relaciones deben ser interpretadas. Una gran variedad de formas de relacionar instituciones han sido desarrolladas y estudiadas en conjunto con sus propiedades [GB92, Mes89, Tar96], y más recientemente en [GR02].

En este trabajo nos concentraremos solo en extender las definiciones y resultados presentados en por Tarlecki en [Tar96] haciendo foco particular en los llamados comorfismos de instituciones ya que de todas las formas de relacionar dos lenguajes lógicos, es la que más aparece en temas vinculados con ingeniería de software como ser *refinamiento de datos* y *reconfiguración dinámica* [CALM10, CALM13] mientras que dejaremos el estudio de otras formas de relacionar lenguajes lógicos como trabajo a ser abordado en el futuro.

Definición 28 (Institution comorphism [Tar96])**.** *Sean* $\mathbb{I} = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\mathbb{I}' = \langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$ *instituciones. Entonces,* $\langle \rho^{Sign}, \rho^{Sen}, \rho^{Mod}\rangle : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ *es un* comorfismo entre instituciones *si y solo si:*

- $\rho^{Sign} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Sign}'$ *es un functor,*

- $\rho^{Sen} : \mathbf{Sen} \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \rho^{Sign}$ *es una transformación natural, (i.e., una familia natural de funciones* $\rho^{Sen}_{\Sigma} : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma))$*), tal que para cada* $\Sigma_1, \Sigma_2 \in |\mathsf{Sign}|$ *y* $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *morfismo en* Sign*,*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}(\Sigma_2) \arrow[rr, "\rho^{Sen}_{\Sigma_2}"] & & \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma_2)) & & \Sigma_2 \\
& \odot & & & \\
\mathbf{Sen}(\Sigma_1) \arrow[uu, "\mathbf{Sen}(\sigma)"] \arrow[rr, "\rho^{Sen}_{\Sigma_1}"] & & \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma_1)) \arrow[uu, "\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\sigma))"'] & & \Sigma_1 \arrow[uu, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

- $\rho^{Mod} : \mathbf{Mod}' \circ (\rho^{Sign})^{\mathsf{op}} \Rightarrow \mathbf{Mod}$[3] *es una transformación natural, (i.e., la familia de functores* $\rho^{Mod}_{\Sigma} : \mathbf{Mod}'((\rho^{Sign})^{\mathsf{op}}(\Sigma)) \to \mathbf{Mod}(\Sigma)$ *es natural), tal que para cada* $\Sigma_1, \Sigma_2 \in |\mathsf{Sign}|$ *y* $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *morfismo en* Sign*,*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Mod}'((\rho^{Sign})^{\mathsf{op}}(\Sigma_2)) \arrow[rr, "\rho^{Mod}_{\Sigma_2}"] \arrow[dd, "\mathbf{Mod}'((\rho^{Sign})^{\mathsf{op}}(\sigma^{\mathsf{op}}))"'] & & \mathbf{Mod}(\Sigma_2) \arrow[dd, "\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})"] & & \Sigma_2 \\
& \odot & & & \\
\mathbf{Mod}'((\rho^{Sign})^{\mathsf{op}}(\Sigma_1)) \arrow[rr, "\rho^{Mod}_{\Sigma_1}"] & & \mathbf{Mod}(\Sigma_1) & & \Sigma_1 \arrow[uu, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

tal que para cada $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$*, la función* $\rho^{Sen}_{\Sigma} : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma))$ *y el functor* $\rho^{Mod}_{\Sigma} : \mathbf{Mod}'(\rho^{Sign}(\Sigma)) \to \mathbf{Mod}(\Sigma)$ *preservan la siguiente condición de satisfacción: para cualquier* $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}'(\rho^{Sign}(\Sigma))|$*,*

$$\mathcal{M}' \models'_{\rho^{Sign}(\Sigma)} \rho^{Sen}_{\Sigma}(\alpha) \quad sii \quad \rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}') \models_{\Sigma} \alpha \ .$$

Intuitivamente, un comorfismo entre instituciones $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ expresa cómo una institución cuyo poder expresivo es (potencialmente) más pobre asociada con la institución $\mathbb{I}$ es codificada en otra más rica asociada con $\mathbb{I}'$. Esto se obtiene a partir de proporcionar: 1. un mapping de signaturas de $\mathbb{I}$ a signaturas de $\mathbb{I}'$, 2. una traducción de sentencias de $\mathbb{I}$ sobre una signatura Σ, a sentencias de $\mathbb{I}'$ sobre la signatura a la que Σ es mapeada, 3. una reducción de modelos de $\mathbb{I}'$ para la signatura a la que Σ es mapeada, a modelos de $\mathbb{I}$ para la signatura Σ. La dirección de las flechas muestra cómo toda la institución $\mathbb{I}$ es representada en parte de la institución $\mathbb{I}'$. Los comorfismos entre instituciones poseen algunas propiedades de interés; por ejemplo, la preservación de la consecuencia lógica [Tar96, Proposition 13], y, bajo algunas condiciones, su reflejo [Tar96, Theorem 14]. El lector deseoso de profundizar en estos aspectos es referido a [Tar96] para mayores detalles, y a [Tar98, Tar06] para el estudio de algunas propiedades estructurales de las categorías de instituciones que se obtienen a partir de utilizar esta, y otras formas de relacionarlas.

Los siguientes resultados, presentados en [Tar96], caracterizan la relación entre dos instituciones en presencia de un comorfismo.

Proposición 3 (Preservación de la consecuencia Proposition 13, [Tar96])**.** *Sean* $\mathbb{I}$ *e* $\mathbb{I}'$ *las instituciones* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|} \rangle$ *y* $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|} \rangle$*, respec-*

[3] El functor $(\rho^{Sign})^{\mathsf{op}} : \mathsf{Sign}'^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}}$ es el mismo que $\rho^{Sign} : \mathsf{Sign}' \to \mathsf{Sign}$ pero considerándolo entre las categorías opuestas.

tivamente. Sea $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ *un comorfismo de instituciones. Entonces, para todos* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $\varphi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$*, si* $\Gamma \models_\Sigma \varphi$*, entonces* $\rho^{Sen}(\Gamma) \models_{\rho^{Sign}(\Sigma)} \rho^{Sen}(\varphi)$*.*

Definición 29 (Expansión de modelos sobre una traducción de modelos)**.** *Sean* $\mathbb{I}$ *e* $\mathbb{I}'$ *las instituciones* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$*, respectivamente. Sea* $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ *un comorfismo de instituciones. Entonces,* $\mathbb{I}$ *tiene la* propiedad de ρ-expansión *si para toda* $\langle \Sigma, \Gamma\rangle \in |\mathsf{Th}_0^{\mathbb{I}}|$, $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}^{\mathbb{I}}(\langle \Sigma, \Gamma\rangle)|$*, existe* $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}^{\mathbb{I}'}(\langle \rho^{Sign}(\Sigma), \rho^{Sen}(\Gamma)\rangle)|$ *tal que* $\mathcal{M} = \rho^{Mod}(\mathcal{M}')$*.*

Teorema 1 (Reflexión de la consecuencia Theorem 14, [Tar96])**.** *Sean* $\mathbb{I}$ *e* $\mathbb{I}'$ *las instituciones* $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *y* $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$*, respectivamente. Sea* $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ *un comorfismo de instituciones. Entonces, para todos* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\Gamma \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $\varphi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$*, si todo* $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(\langle \Sigma, \Gamma\rangle)$ *tiene la propiedad de* ρ*-expansion, entonces* $\Gamma \models_\Sigma \varphi$ *si y solo si* $\rho^{Sen}(\Gamma) \models_{\rho^{Sign}(\Sigma)} \rho^{Sen}(\varphi)$*.*

En muchos casos, en particular aquellos en los que la clase de modelos de una signatura en la institución de origen es completamente axiomatizable en el lenguaje de la destino, la Definición 28 puede ser fácilmente extendida para relacionar signaturas de una institución con teorías en la otra. Recordemos de la Definición 21 la introducción del conjunto de axiomas $\emptyset'$. Este conjunto posee los axiomas necesarios para que la clase de modelos del lenguaje lógico más rico pueda ser restringida (de ahí la necesidad de que la imagen del functor ρ^{Sign} sean presentaciones de teoría) para que solo contenga modelos que resultan retraibles hacia la clase de modelos de la signatura en el lenguaje lógico más pobre. Se han desarrollado muchos ejemplos de estas relaciones entre lógicas siendo el más prominente la traducción de la lógica modal básica a la lógica de primer orden con igualdad [BdV01]. Vale la pena mencionar otros ejemplos como son las algebrizaciones de diferentes lógicas, como ser aquellas que relacionan las *fork algebras* [VHF95a, FBH97], una extensión de las algebras relacionales [JT51, JT52], con otras lógicas diferentes [Fri02, FL06].

En algunos casos los comorfismos entre instituciones pueden ser extendidos a lo que Meseguer introdujo bajo el nombre *map of institutions* [Mes89, Definition 27], y recientemente renombrados como *theoroidal comorphism* [GR02, Definition 5.3], a través de reformular la definición del functor de signaturas como entre presentaciones de teorías (i.e. $\rho^{Th} : \mathsf{Th} \to \mathsf{Th}'$). Esta extensión puede ser realizada de muchas maneras; siendo una de ellas cuando ρ^{Th} es ρ^{Sen}-sensible (ver Definición 21) con respecto al *entailment system* inducido por las relaciones de consecuencia de las instituciones $\mathbb{I}$ and $\mathbb{I}'$. Así, tomando como elemento definitorio que el functor que relaciona en forma natural los conjuntos de sentencias ρ^{Sen} se basa en la idea de que a cada sentencia del lenguaje lógico de partida le corresponde una en el lenguaje lógico de llegada, se puede extender $\rho^{Th} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Th}'$ a un functor $\rho^{Th} : \mathsf{Th} \to \mathsf{Th}'$ definido de la siguiente forma: sea $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\Gamma \in |\mathbf{Sen}(\Sigma)|$, $\rho^{Th}(\langle \Sigma, \Gamma\rangle) = \langle \rho^{Sign}(\Sigma), \emptyset' \cup \rho^{Sen}(\Gamma)\rangle$.

3. RELACIONES PARCIALES ENTRE INSTITUCIONES

En este capítulo presentamos el aporte principal de este trabajo que es la definición de comorfismo parcial entre instituciones. Esto es la relación entre una institución (potencialmente) menos expresiva hacia una institución (potencialmente) más expresiva donde la traducción que se realiza no es total sino que parte de un sublenguaje de la institución de origen. Para eso, en primer lugar daremos las definiciones generales que caracterizan este tipo de relaciones, y en segundo lugar mostraremos la existencia de ellas a partir de una clase concreta de comorfismos parciales que puede construirse a partir de comorfismos entre instituciones.

3.1. Definición general

Con el objetivo de acercarnos a una definición general para este tipo de relaciones vale la pena partir, a modo de educación de la intuición, de la noción de parcialidad existente en la teoría de conjuntos, en particular de la definición de función parcial.

Definición 30 (Función parcial)**.** *Una función parcial f entre dos conjuntos A y B se define como una función total $f : A' \to B$ donde A' es subconjunto de A. En ese caso la notamos $f : A \nrightarrow B$.*

Esto nos permite esbozar una primera definición trasladando la idea de funciones parciales al contexto de instituciones. Luego discutiremos por qué se vuelve insuficiente para caracterizar el comportamiento de las traducciones que nos proponemos definir en este trabajo.

Definición 31 (Comorfismo parcial inspirado en teoría de conjuntos)**.**
Sean $\mathbb{I} = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ e $\mathbb{I}' = \langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$ instituciones. Entonces $\langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \gamma^{Mod}\rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ es un comorfismo parcial de instituciones *si $\gamma : \mathbb{I}^0 \to \mathbb{I}'$ es un comorfismo de instituciones y $\mathbb{I}^0$ es una subinstitución de $\mathbb{I}$.*

En esta definición se propone una traducción parcial desde la institución de origen $\mathbb{I}$ hacia la institución de destino $\mathbb{I}'$. Para eso tenemos que $\mathbb{I}^0$ es subinstitución de $\mathbb{I}$ y, por lo tanto, un sublenguaje de la lógica de origen, y γ es un comorfismo total desde este sublenguaje. Si bien la intuición detrás de esta definición es acertada nos encontramos con ciertos problemas cuando analizamos las relaciones lógicas que quedan planteadas, en particular en lo que tiene que ver con las relaciones entre los modelos de las distintas instituciones. Recordemos que la forma en que se relacionan modelos entre instituciones bajo un comorfismo $\gamma : \mathbb{I}^0 \to \mathbb{I}'$ es la transformación natural $\gamma^{Mod} : \mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}} \Rightarrow \mathbf{Mod}^0$. Es decir, una familia de functores γ^{Mod}_Σ que asignan a cada $\mathbb{I}'$-modelo su correspondiente reducto en la lógica de origen $\mathbb{I}^0$. Esta transformación preserva la *condición de satisfactibilidad*: la satisfacción de una fórmula por un modelo se mantiene invariante a la traducción γ.
Esto plantea el siguiente escenario problemático. Sea $\Sigma \in \mathsf{Sign}^0$ una signatura de la institución $\mathbb{I}^0$ y, por lo tanto, en particular de la institución $\mathbb{I}$. El conjunto de Σ-fórmulas de $\mathbb{I}^0$ es $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$, esto significa que potencialmente existen Σ-fórmulas que están

en $\mathbb{I}$ pero no en $\mathbb{I}^0$. Sea $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign}(\Sigma))|$ un modelo de la signatura Σ traducida a la institución destino, analicemos sus posibles reductos. Los posibles reductos son objetos de la categoría $\mathbf{Mod}^0(\Sigma)$. Por la naturaleza de lo que es una subinstitución o sublenguaje lógico es razonable pensar que en la categoría $\mathbf{Mod}^0(\Sigma)$ hay modelos que son distinguibles según las Σ-fórmulas de $\mathbb{I}$, pero que se vuelven elementalmente equivalentes si sólo se tiene en cuenta el conjunto de Σ-fórmulas de $\mathbb{I}^0$, como se muestra en la Figura 3.1. Esto quiere decir que, restringidos al fragmento de la lógica que podemos traducir, estos modelos presentan el mismo comportamiento. En este escenario tenemos potencialmente muchos modelos en $\mathbf{Mod}^0(\Sigma)$ que pueden ser reducto de $\mathcal{M}'$ preservando satisfactibilidad. La definición de *comorfismo parcial*, tal como está planteada hasta ahora, fuerza a que elijamos uno de esos modelos.

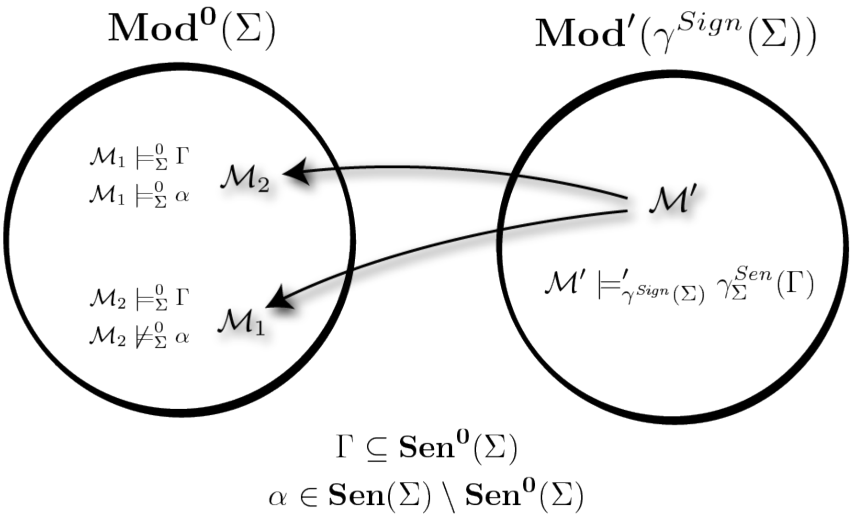

Fig. 3.1: Equivalencia elemental de reductos módulo un sublenguaje.

Por esta razón decidimos explorar una definición más compleja que introduzca la noción de categoría de reductos para un modelo $\mathcal{M}'$ de la institución destino. Esto nos llevó a definir una noción de *comorfismo parcial débil* y una noción de *comorfismo parcial fuerte* dependiendo de cuánto cada una de ellas preserva la estructura de dicha categoría de reductos. A medida que vayamos introduciendo las definiciones va a quedar más clara la diferencia entre ambos. Esencialmente el aporte de la noción *fuerte* con respecto a la *débil* es la capacidad de relacionar categorías de reductos en base a las relaciones existentes entre los modelos de la institución más rica a los que se les toma reducto.

Definición 32 (Comorfismo parcial débil)**.** *Sean* $\mathbb{I} = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *e* $\mathbb{I}' = \langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}'|}\rangle$ *instituciones. Sea* $\mathbb{I}^0 = \langle \mathsf{Sign}^0, \mathbf{Sen}^0, \mathbf{Mod}^0, \{\models^0_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}^0|}\rangle$ *subinstitución de* $\mathbb{I}$*. Entonces* $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \{\gamma^{Mod}_\Sigma\}_{\Sigma\in|Sign|}\rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ *es un* comorfismo parcial de instituciones *si y sólo si:*

- $\gamma^{Sign} : \mathsf{Sign}^0 \to \mathsf{Sign}'$ *es un functor,*
- $\gamma^{Sen} : \mathbf{Sen}^0 \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \gamma^{Sign} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *es una transformación natural (i.e. una familia natural de funciones* $\gamma^{Sen}_\Sigma : \mathbf{Sen}^0(\Sigma) \to \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\Sigma))$*)*

- $\{\gamma_{\Sigma}^{Mod} : |(\mathbf{Mod'} \circ \gamma^{Sign^{op}})(\Sigma)| \to |\mathsf{Cat}|\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}$ *es una familia de funciones. Cada función le asigna a cada modelo* $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod'} \circ \gamma^{Sign^{op}})(\Sigma)|$ *su correspondiente categoría de* $\mathbb{I}^0$*-reductos.*

Tal que se cumplen las siguientes condiciones:

Para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|, \alpha \in |\mathbf{Sen}^0(\Sigma)|, \mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod'} \circ \gamma^{Sign^{op}})(\Sigma)|$,

1. $\gamma_{\Sigma}^{Mod}(\mathcal{M}') \subseteq \mathbf{Mod}^0(\Sigma)$*, es decir, la categoría de reductos de* $\mathcal{M}'$ *debe ser subcategoría de la categoría de* Σ*-modelos.*

2. *Para todo* $\mathcal{M} \in |\gamma_{\Sigma}^{Mod}(\mathcal{M}')|$, $\mathcal{M} \models_{\Sigma} \alpha$ *si y sólo si* $\mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma_{\Sigma}^{Sen}(\alpha)$.

Debido a que la institución $\mathbb{I}^0$ *tiene una incidencia fuerte en la definición, notaremos el comorfismo parcial de la siguiente manera:* $\gamma : \mathbb{I} \overset{\mathbb{I}^0}{\twoheadrightarrow} \mathbb{I}'$*, de manera de distinguir cuál es la subinstitución que está involucrada en el comorfismo.*

Las primeras dos componentes de esta definición, γ^{Sign} y γ^{Sen}, se comportan de manera análoga a las primeras dos componentes de un comorfismo en el sentido de la Definición 28. Es decir, la primera traduce una subcategoría de signaturas de la institución de origen hacia la institución destino, y la segunda, dada una signatura en el dominio de la primera, traduce un subconjunto de las fórmulas en la institución de origen a la institución destino.

En la familia de funciones γ_{Σ}^{Mod} se ve de qué manera la definición *débil* da respuesta a la discusión que planteabamos anteriormente sobre los reductos de los modelos. A cada modelo de la institución (potencialmente) más expresiva se le asigna una categoría de modelos en la institución (potencialmente) menos expresiva.

Vale la pena hacer dos comentarios sobre esta familia de funciones. En primer lugar, al ser una familia de funciones y no una familia de functores, esta transformación descarta la información de relaciones existentes entre los modelos de la institución destino. En segundo lugar, como consecuencia de la afirmación anterior, esta definición no da ninguna herramienta para relacionar las categorías de reductos a las que se llega en la institución de origen.

Sobre las condiciones vale la pena remarcar que la segunda es la extensión natural de la condición de *preservación de satisfactibilidad* para que contemple categorías de reductos en lugar de un sólo reducto.

La siguiente definición, que denominaremos comorfismo parcial *fuerte*, resultará más restrictiva que la anterior ya que demandará que las categorías de reductos de dos modelos relacionados se encuentren relacionadas a partir de requerir que la transformación natural para modelos esté formada por functores.

Definición 33 (Comorfismo parcial fuerte)**.** *Sean* $\mathbb{I} = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$ *e* $\mathbb{I}' = \langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$ *instituciones. Sea* $\mathbb{I}^0 = \langle \mathsf{Sign}^0, \mathbf{Sen}^0, \mathbf{Mod}^0, \{\models^0_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}\rangle$ *subinstitución de* $\mathbb{I}$*. Entonces* $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \{\gamma_{\Sigma}^{Mod}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}, \{\gamma_{\sigma}^{Mod}\}_{\sigma \in ||\mathsf{Sign}^0||}\rangle : \mathbb{I} \twoheadrightarrow \mathbb{I}'$ *es un* comorfismo parcial de instituciones *si y sólo si:*

- $\gamma^{Sign} : \mathsf{Sign}^0 \to \mathsf{Sign}'$ *es un functor,*

- $\gamma^{Sen} : \mathbf{Sen}^0 \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \gamma^{Sign} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *es una transformación natural (i.e. una familia natural de funciones* $\gamma^{Sen}_\Sigma : \mathbf{Sen}^0(\Sigma) \to \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\Sigma)))$
- $\{\gamma^{Mod}_\Sigma : (\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma) \to \mathsf{Cat}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}$ *es una familia de functores. Cada functor le asigna a cada modelo* $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma)|$ *su correspondiente categoría de* $\mathbb{I}^0$*-reductos, y*
- $\{\gamma^{Mod}_{\sigma:\Sigma_1 \to \Sigma_2} : \gamma^{Mod}_{\Sigma_2} \Rightarrow \gamma^{Mod}_{\Sigma_1} \circ (\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))\}_{\sigma:\Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||}$ *es una familia de transformaciones naturales*

Tal que se cumplen las siguientes condiciones:

Para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|, \alpha \in |\mathbf{Sen}^0(\Sigma)|, \mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma)|$,

1. $\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}') \subseteq \mathbf{Mod}^0(\Sigma)$*, es decir, la categoría de reductos de* $\mathcal{M}'$ *debe ser subcategoría de la categoría de* Σ*-modelos.*
2. *Para todo* $\mathcal{M} \in |\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}')|$, $\mathcal{M} \models_\Sigma \alpha$ *si y sólo si* $\mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_\Sigma(\alpha)$.

Al igual que en la definición anterior, notaremos el comorfismo parcial de la siguiente manera $\gamma : \mathbb{I} \overset{\mathbb{I}^0}{\nrightarrow} \mathbb{I}'$.

Nuevamente las primeras dos componentes de esta definición, γ^{Sign} y γ^{Sen}, no presentan cambios respecto de lo dicho para la Definición 32. Por el contrario, γ^{Mod}_Σ en este caso no es una familia de funciones sino que es una familia de functores. La diferencia concreta es que un functor no sólo debe relacionar los modelos de la institución más rica con su categoría de reductos, sino que también debe asignar a cada flecha en la categoría de modelos de la institución más rica, es decir, las relaciones entre estos modelos, un functor entre las categorías de reductos correspondientes, lo que es atestiguado por el hecho de que el codominio del functor γ^{Mod}_Σ es Cat y por lo tanto, a cada flecha en la categoría de modelos de la institución más rica, le deberá corresponder una flecha en Cat. Es decir, dados dos modelos $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ que están relacionados por un morfismo en la institución más rica, γ^{Mod}_Σ deberá asignar un functor entre las categorías de $\mathbb{I}^0$-reductos de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. Esto permite que, a diferencia de la Definición 32, no sólo tengamos la capacidad de traducir modelos a categorías de reductos, sino también reflejar la estructura de la clase de modelos de la lógica más rica, sobre la de la lógica más pobre.

Por otro lado, la Definición 33 introduce una nueva componente: la familia de transformaciones naturales γ^{Mod}_σ. Para comprender el rol que cumple esta componente es preciso primero notar algunas cuestiones. Por un lado, que hay un functor γ^{Mod}_Σ por cada signatura de la institución más pobre y que el dominio de ese functor es la categoría de modelos de la traducción de esa signatura en la institución más rica. Por otro lado, que, por definición, el functor de modelos $\mathbf{Mod}'$ de la institución más rica permite traducir categorías de modelos entre distintas signaturas dentro de la misma institución, y que incluso esta es una traducción que preserva semántica en el sentido de la *condición de invarianza* de la Definición 22. A partir de esto es razonable pensar que así como existe una la relación entre modelos de distintas signaturas de la institución más rica se debería poder relacionar las correspondientes categorías de reductos que viven en distintas signaturas de la institución más pobre, y este es precisamente el comportamiento que captura la familia de transformaciones naturales γ_σ^{Mod}.

Ejemplo 1 (Relación entre categorías de reductos).
Sean $\mathbb{I} = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}|}\rangle$ *e* $\mathbb{I}' = \langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}'|}\rangle$ *instituciones,* $\mathbb{I}^0 = \langle \mathsf{Sign}^0, \mathbf{Sen}^0, \mathbf{Mod}^0, \{\models^0_\Sigma\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}^0|}\rangle$ *subinstitución de* $\mathbb{I}$ *y* $\gamma : \mathbb{I} \overset{\mathbb{I}^0}{\nrightarrow} \mathbb{I}'$ *un* comorfismo parcial de instituciones *tal que* $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \{\gamma_\Sigma^{Mod}\}_{\Sigma\in|\mathsf{Sign}^0|}, \{\gamma_\sigma^{Mod}\}_{\sigma\in||\mathsf{Sign}^0||}\rangle$. *Sean* $\Sigma_1, \Sigma_2 \in |\mathsf{Sign}^0|$, $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$, $\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2 \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign})(\Sigma_2)|$ *y* $h' : \mathcal{M}'_1 \to \mathcal{M}'_2 \in ||\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign}(\Sigma_2)||$. *Las correspondientes categorías de reductos se encuentran relacionadas como muestra el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_2 & \Sigma_1 \arrow[l, "\sigma"'] \\
\mathcal{M}'_1 \arrow[d, "h'"] & \gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}'_1) \arrow[r, "(\gamma_\sigma^{Mod})_{\mathcal{M}'_1}"] \arrow[d, "\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(h')"'] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'_1)) \arrow[d, "\gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))(h'))"] \\
\mathcal{M}'_2 & \gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}'_2) \arrow[r, "(\gamma_\sigma^{Mod})_{\mathcal{M}'_2}"'] & \gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'_2))
\end{tikzcd}$$

El diagrama conmutativo es precisamente el que surge de la definición de la transformación natural γ_σ^{Mod} *y muestra la relación entre sus componentes, en este caso* $(\gamma_\sigma^{Mod})_{\mathcal{M}'_1}$ *y* $(\gamma_\sigma^{Mod})_{\mathcal{M}'_2}$. *Corresponde aclarar, en primer lugar, que todas las categorías de modelos presentes en el diagrama viven en la subinstitución de la institución origen del comorfismo parcial. En el margen izquierdo del diagrama se observan las subcategorías de* $\mathbf{Mod}^0(\Sigma_2)$, *son las categorías de reductos de* $\mathcal{M}'_1$ *y* $\mathcal{M}'_2$. *En el margen derecho del diagrama observamos las subcategorías de* $\mathbf{Mod}^0(\Sigma_1)$, *que son las categorías de reductos del reducto de* $\mathcal{M}'_1$ *a la signatura* Σ_1 *y el reducto de* $\mathcal{M}'_2$ *a la signatura* Σ_1[1]. *Las categorías de reductos de dos modelos de una misma signatura están relacionadas por un functor que surge de la aplicación de* γ_Σ^{Mod} *al morfismo entre estos dos modelos, que es el caso de* $\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(h')$. *Entonces el diagrama nos muestra que cada componente de la transformación natural* γ_σ^{Mod} *relaciona los modelos de una categoría de reductos en la signatura* Σ_2 *con los modelos en la categoría de reductos correspondiente en la signatura* Σ_1. *La conmutatividad del diagrama está asegurada por el hecho de que las relaciones que aparecen son transformaciones naturales.*

3.2. Una clase concreta de comorfismos parciales entre instituciones

La definición general presenta las características que debe tener una traducción parcial entre instituciones pero no aporta luz sobre cómo pueden construirse este tipo de traducciones y, de hecho, tampoco garantiza la existencia de estas. En esta sección presentamos

[1] Nótese que en este caso se utiliza la palabra reducto para dos operaciones de naturaleza similar pero no idéntica. El primer uso de reducto es una operación que traduce modelos entre dos clases de álgebra diferentes, mientras que el segundo uso es el uso conocido en el campo del álgebra universal de retracción de un modelo a un tipo de similaridad con menos operaciones.

una clase concreta de comorfismos parciales (tanto para la definición *débil* como para la *fuerte*) que se construye a partir de cierta clase de comorfismos totales.

La clase concreta que presentamos está inspirada en el trabajo de Robinson y Rosolini [RR88], que explora la construcción de categorías con morfismos parciales. La intuición es que la construcción de un comorfismo parcial $\gamma : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ se hace a partir de una institución $\mathbb{I}''$, un comorfismo $\rho : \mathbb{I}'' \rightarrow \mathbb{I}'$ y un comorfismo "inversible" $\sigma : \mathbb{I}'' \hookrightarrow \mathbb{I}$, que forman un span en la categoría formada por las instituciones como objetos y los comorfismos como flechas según muestra la Figura 3.2.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[rr, dotted, "\gamma"] & & \mathbb{I}' \\ & \mathbb{I}'' \arrow[ul, hook, "\sigma"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Fig. 3.2: Comorfismo parcial entre instituciones como span de comorfismos entre instituciones.

De esta manera, el comorfismo parcial γ se obtiene de la composición entre el "inverso" de σ y ρ. Básicamente, lo que sucede, es que la institución $\mathbb{I}''$ captura el fragmento de la lógica de origen que podemos traducir vía γ y el comorfismo σ identifica cuál es efectivamente ese fragmento en las componentes de $\mathbb{I}$.

Cuando introduzcamos las definiciones formales quedará claro qué significa en este contexto que un comorfismo sea "inversible".

Teorema 2 (Construcción de un comorfismo parcial débil)**.** *Dadas dos instituciones cualesquiera $\mathbb{I}, \mathbb{I}'$, una institucion $\mathbb{I}''$, un comorfismo $\rho : \mathbb{I}'' \rightarrow \mathbb{I}'$, y un comorfismo $\sigma : \mathbb{I}'' \hookrightarrow \mathbb{I}$ que cumple las siguientes restricciones:*

- σ^{Sign} *es functor inyectivo en objetos y faithful,*
- $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ *es función inyectiva, para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$,*
- $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ *es functor suryectivo en objetos y full sobre $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''})$, para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$,*

entonces existe un comorfismo parcial débil $\gamma : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$

Demostración. Las restricciones que imponen las hipótesis del teorema sobre el comorfismo σ nos permitirán invertir σ^{Sign}, $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ y $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ para luego componerlas con las componentes correspondientes del comorfismo ρ. En cada uno de los tres casos la naturaleza de qué significa "invertir"la componente es relativamente diferente y quedará claro en la demostración del teorema por el contexto en que son utilizadas. Vale la pena aclarar la razón por la cual se pide la restricción de suryectividad en la transformación natural σ^{Mod}, y es que esta es una relación contravariante con respecto a la dirección del comorfismo. En particular la restricción de suryectividad no se hace sobre todo el dominio sino sobre la imagen del functor correspondiente en la transformación natural ρ^{Mod}.

Sea $\mathbb{I}^0 = \langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}^0, \mathbf{Mod}^0, \{\models^0{}_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|} \rangle$ una estructura tal que:

- $\mathsf{Sign}^0 = Img(\sigma^{Sign})$,

- $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) = Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''})$ para $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$, donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$, y $\mathbf{Sen}^0(\delta) = \mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}$ para $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$,
- $\mathbf{Mod}^0 = \mathbf{Mod}|_{\mathsf{Sign}^0}$
- ${\models^0}_\Sigma$ es la restricción de $\models_\Sigma$ a las fórmulas de $|\mathbf{Sen}^0(\Sigma)|$, para $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$

Por Lema 22 tenemos que $\mathbb{I}^0$ es una institución, y por Lema 23, que $\mathbb{I}^0 \subseteq \mathbb{I}$.

Definimos ahora $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \gamma^{Mod} \rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ como sigue:

- $\gamma^{Sign} = \rho^{Sign} \circ (\sigma^{Sign})^{-1}$
- $\gamma^{Sen}_\Sigma = \rho^{Sen}_{\Sigma''} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}$ para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$, donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$,
- $\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}') = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A} \rangle$ para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$ y $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma)|$. Donde $\mathcal{O} = \left\{ \mathcal{M} \mid \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \right\}$ y $\mathcal{A} = \left\{ id_\mathcal{M} \mid \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \right\}$.

Veamos primero que $\gamma^{Sign} : \mathsf{Sign^0} \to \mathsf{Sign}'$ es functor. Como σ^{Sign} es inyectivo en objetos y faithfull tenemos, por Proposición 2, que $(\sigma^{Sign})^{-1} : Img(\sigma^{Sign}) \to \mathsf{Sign}''$ es el functor inverso parcial. Por otro lado $\rho^{Sign} : \mathsf{Sign}'' \to \mathsf{Sign}'$ también es functor. γ^{Sign} es la composición de estos dos functores, cuyos respectivos codominio y dominio coinciden, por lo tanto también es functor. Resta notar que $Img(\sigma^{Sign}) = \mathsf{Sign^0}$.

Veamos ahora que $\gamma^{Sen} : \mathbf{Sen}^0 \Rightarrow \mathbf{Sen}' \circ \gamma^{Sign}$ es trasformación natural. Por hipótesis $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ es una función inyectiva, entonces $(\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1} : Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) \to \mathbf{Sen}''(\Sigma'')$ es la función inversa parcial. Por otro lado, como ρ es comorfismo tenemos que $\rho^{Sen}_{\Sigma''} : \mathbf{Sen}''(\Sigma'') \to \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma''))$ también es función. Como $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$ podemos reescribir la signatura de la función, obteniendo $\rho^{Sen}_{\Sigma''} : \mathbf{Sen}''(\Sigma'') \to \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign} \circ (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma))$. Reescribimos una vez más, por cómo definimos γ^{Sign}, y obtenemos $\rho^{Sen}_{\Sigma''} : \mathbf{Sen}''(\Sigma'') \to \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\Sigma))$. Por último tenemos que γ^{Sen}_Σ es la composición de estas dos funciones, cuyos respectivos codominio y dominio coinciden, por lo tanto también es función. Tenemos entonces la siguiente signatura para la función $\gamma^{Sen}_\Sigma : Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) \to \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\Sigma))$. Resta notar que $Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) = \mathbf{Sen}^0(\Sigma)$. Por Lema 26 tenemos que para todo $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ vale que $\gamma^{Sen}_{\Sigma_2} \circ \mathbf{Sen^0}(\delta) = \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\delta)) \circ \gamma^{Sen}_{\Sigma_1}$, esto asegura la conmutatividad del diagrama que plantea la Definición 17, y quiere decir que efectivamente tenemos una transformación natural.

Veamos ahora que $\{\gamma^{Mod}_\Sigma : |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma)| \to |\mathsf{Cat}|\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign^0}|}$ es una familia de funciones. Dado un modelo $\mathcal{M}'$ el conjunto de objetos $\mathcal{O}$ y de flechas $\mathcal{A}$ determinado por $\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}')$ es no vacío. Esto se debe a que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ es suryectivo en objetos sobre $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''})$ y, por lo tanto, existe al menos un $\mathcal{M}$ en el dominio de $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$. Por último, se puede mostrar que un conjunto de objetos y el conjunto de identidades de estos objetos se comportan como una categoría, en particular una categoría discreta.

La demostración de la satisfacción de las Condiciones 1 y 2 de la Definición 32 pueden encontrarse en los Lemas 27 y 28 $\square$

Es preciso discutir cuál es, en concreto, la categoría de reductos que define cada functor γ^{Mod}_Σ. La categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de un modelo $\mathcal{M}'$ de la lógica destino está compuesta por todos los modelos $\mathcal{M}$ de la lógica de origen que cuyo $\mathbb{I}''$-reducto a través del comorfismo σ es el $\mathbb{I}''$-reducto de $\mathcal{M}'$ a través del comorfismo ρ. Como la institución $\mathbb{I}''$ está cocientada por equivalencia elemental tenemos que cualquier par de modelos de esta institución son distinguibles por alguna fórmula del lenguaje. Esto nos garantiza que la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos tal como está definida va a estar necesariamente cerrada por la $\mathbf{Sen}^0$-propiedades que satisface.

Sin embargo debemos notar que en esta definición hay información sobre la relación entre los reductos que se está perdiendo. Esto es una consecuencia directa de que hayamos definido la categoría de reductos como una categoría discreta, es decir, donde las únicas flechas son las identidades de los objetos. La definición abstracta no determina la naturaleza de la categoría de reductos y, por lo tanto, se cuenta con libertad para definir las relaciones entre modelos de la categoría de reductos, siempre y cuándo esta sea efectivamente una categoría. Esto quiere decir que, eventualmente, para definir un comorfismo parcial entre dos lógicas determinadas se podría preservar una estructura más compleja de la categoría de reductos conociendo la naturaleza de las relaciones entre estos reductos.

A continuación presentamos la clase concreta de comorfismo parcial fuerte. Como mencionamos al inicio de esta sección el aporte que diferencia la definición fuerte de la débil es la capacidad de relacionar categorías de reductos, en concreto la capacidad de definir los functores que relacionan pares de categorías de reductos en el sublenguaje de la lógica de origen a partir de las relaciones entre los correspondientes modelos en la lógica destino.

Para poder definir esta familia de functores en la clase concreta es necesario agregar una nueva hipótesis sobre las categorías de modelos de $\mathbb{I}''$ y el comorfismo σ. Recordemos que la forma en que definimos la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de un modelo $\mathcal{M}'$ de la lógica destino es tomando el conjunto de preimágenes de $\rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$ a través del functor $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$. Entonces sería razonable inducir el functor entre las categorías de $\mathbb{I}^0$-reductos de dos modelos $\mathcal{M}'_1$ y $\mathcal{M}'_2$ de la lógica destino a partir del conjunto de preimagenes a través del functor $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ de la flecha entre $\mathcal{M}'_1$ y $\mathcal{M}'_2$. Para eso necesitamos que ese conjunto de flechas preimagen induzcan efectivamente una relación que se comporta como functor, y básicamente es esa la esencia de la nueva hipótesis que se agrega en el teorema que presentamos a continuación. Pedimos que para cada modelo en la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de $\mathcal{M}'_1$ exista un único modelo en la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de $\mathcal{M}'_2$ de manera tal que estan relacionados por una flecha que es preimagen de la flecha entre $\mathcal{M}'_1$ y $\mathcal{M}'_2$, y son estas flechas preimagen la que nos permite inducir el comportamiento del functor entre categorías de reductos.

Añadimos además otra hipótesis para la clase concreta de comorfismo parcial fuerte: que la institución $\mathbb{I}''$ esté cocientada por equivalencia elemental. Esta hipótesis será utilizada en la demostración de que nuestra definición concreta de $\gamma^{Mod}_{\delta:\Sigma_1\to\Sigma_2}$ efectivamente se comporta como una transformación natural. En particular nos permitirá mostrar en el Lema 30 que la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de un modelo $\mathcal{M}'$ está cerrada por las $\mathbf{Sen}^0$-propiedades que satisface, y esto a su vez será utilizado en el Lema 31 para mostrar que están bien definidas las composiciones necesarias para plantear el esquema de conmutatividad de la familia de functores γ^{Mod}_δ, es decir, que coinciden los respectivos *imagen* y *dominio* de los functores a componer. En este punto debemos aclarar que, si bien mostramos que esta nueva hipótesis es una condición suficiente para obtener estos resultados, no podemos afirmar que sea una condición necesaria.

La razón por la cual esta última hipótesis no fue necesaria en el Teorema 2 es que la transformación natural γ^{Mod}_{δ} no es parte de las componentes de un comorfismo parcial débil.

Teorema 3 (Construcción de comorfismo parcial fuerte)**.** *Dadas dos instituciones cualesquiera $\mathbb{I}, \mathbb{I}'$, una institucion $\mathbb{I}''$ cocientada por equivalencia elemental, un comorfismo $\rho : \mathbb{I}'' \to \mathbb{I}'$, y un comorfismo $\sigma : \mathbb{I}'' \hookrightarrow \mathbb{I}$ que cumple las siguientes restricciones:*

- σ^{Sign} *functor inyectivo en objetos y faithful.*
- $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ *función inyectiva para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$*
- $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ *functor suryectivo en objetos y full sobre $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''})$, para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$*
- *Sean $\Sigma'' \in |\mathsf{Sign}''|$ y $h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_2 \in ||\mathbf{Mod}''(\Sigma'')||$ se cumple que: para todo $\mathcal{M}_1$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}''_1$ existe un único $\mathcal{M}_2$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}_2) = \mathcal{M}''_2$ tal que existe un $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1 \in ||\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')||$ y $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h) = h''$.*

entonces existe un comorfismo parcial fuerte $\gamma : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$

Demostración. La estructura $\mathbb{I}^0$ se construye tal como fue presentada en la demostración del Teorema 2. Por Lema 22 tenemos que $\mathbb{I}^0$ es Institución y por Lema 23 que $\mathbb{I}^0 \subseteq \mathbb{I}$.

Definimos ahora $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \{\gamma^{Mod}_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}, \{\gamma^{Mod}_{\sigma}\}_{\sigma \in ||\mathsf{Sign}^0||} \rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ como sigue:

- γ^{Sign} y γ^{Sen} se definen tal como fueron presentados en la demostración del Teorema 2.
- $\gamma^{Mod}_{\Sigma} = \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} \circ \rho^{Mod}_{\Sigma''}$ donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$ y $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} : Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''}) \to \mathsf{Cat}$ se define de la siguiente manera:
  - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}'') = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A} \rangle$ para todo $\mathcal{M}'' \in |Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})|$.
    Donde $\mathcal{O} = \left\{ \mathcal{M} \mid \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'' \right\}$ y $\mathcal{A} = \left\{ id_{\mathcal{M}} \mid \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'' \right\}$
  - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_2) : \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1) \to \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)$, para todo $h'' \in ||Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})||$, es un functor que se define de la siguiente manera:
    - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h)(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$ para todo $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$. Donde $\mathcal{M}_2$ es el único objeto en $|\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)|$ que, por hipótesis verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2) = h''$.
    - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h)(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathcal{M}_2}$ para todo $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$. Donde $\mathcal{M}_2$ es el único objeto en $|\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)|$ que, por hipótesis verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2) = h''$.

  En el Lema 29 vemos que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}$ es efectivamente un functor.
- $(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'} = \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})\big|_{\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}')}$ para todo $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma_2)|$ y $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$.

El hecho de que γ^{Sign} y γ^{Sen} son respectivamente un functor y una transformación natural fue probado oportunamente en el Teorema 2 donde se muestra la clase concreta de comorfismo parcial débil. Veamos ahora que $\{\gamma^{Mod}_{\Sigma} : (\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma) \to \mathsf{Cat}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}$ es una familia de functores. Por hipótesis, como ρ es comorfismo, tenemos que $\rho^{Mod}_{\Sigma''} : \mathbf{Mod}'(\rho^{Sign}(\Sigma'')) \to \mathbf{Mod}''(\Sigma'')$ es functor. Como $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$ podemos reescribir la signatura del functor de la siguiente manera $\rho^{Mod}_{\Sigma''} : \mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign}(\Sigma)) \to \mathbf{Mod}''(\Sigma'')$. Como $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ es suryectivo en objetos y full sobre $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''})$ podemos afirmar que $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''}) \subseteq Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})$. Entonces se puede realizar la composición $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} \circ \rho^{Mod}_{\Sigma''} : (\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma) \to \mathsf{Cat}$. Como ambos son functores la composición también es functor.

Veamos ahora que $\{\gamma^{Mod}_{\delta:\Sigma_1 \to \Sigma_2} : \gamma^{Mod}_{\Sigma_2} \Rightarrow \gamma^{Mod}_{\Sigma_1} \circ (\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))\}_{\delta:\Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||}$ es una familia de transformaciones naturales. Tenemos que $Dom(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})) = \mathbf{Mod}(\Sigma_2)$ y por Lema 27 podemos afirmar que $\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}') \subseteq \mathbf{Mod}(\Sigma_2)$. Entonces está bien definida la restricción de dominio y cada $(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'} : \gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}') \to \mathbf{Mod}(\Sigma_1)$ es functor. Por Lema 31 tenemos que $Img((\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'}) \subseteq \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))$. Entonces redefinimos el codominio del functor para que se adapte a la transformación natural, es decir tenemos la siguiente signatura $(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'} : \gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}') \to \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))$. El Lema 32 nos asegura la conmutatividad del diagrama que plantea la Definición 17 para el caso de esta familia de functores. Esto quiere decir que efectivamente tenemos una transformación natural.

Las dos condiciones impuestas por la Definición 33 son las mismas que las impuestas por Definición 32 y las estructuras que intervienen en estas condiciones están definidas aquí de la misma manera que fueron definidas en la demostración del Teorema 2. Que estas condiciones se cumplen fue demostrado oportunamente en los Lemas 27 y 28

□

4. CASO DE ESTUDIO

4.1. Institución de lógica de primer orden con igualdad

A continuación presentaremos la institución que caracteriza a la lógica de primer orden con igualdad (de ahora en más denotado como $\mathsf{FOL}_=$). Una signatura de este lenguaje es una estructura $\Sigma = \langle \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}\rangle$, donde $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son conjuntos de índices, como es usual, las constantes serán caracterizadas por funciones cuya aridad es 0. De esta manera tenemos que p_i y f_j son símbolos de predicado y de función respectivamente. Cada símbolo de función y símbolo de predicado trae consigo su aridad, que puede ser accedida a través de la función $arity()$. Llamaremos $Sign_{\mathsf{FOL}_=}$ al conjunto de signaturas del lenguaje y utilizaremos el superíndice "$\,'\,$" para referirnos a distintas signaturas de este conjunto.

Definición 34. *Definimos* $\mathsf{Sign} = \langle Sign_{\mathsf{FOL}_=}, \mathcal{A}\rangle$ *donde*

$$\mathcal{A} = \left\{ \sigma : \langle \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}\rangle \to \langle \{p'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}, \{f'_j\}_{j\in\mathcal{J}'}\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma = \langle\sigma_1,\sigma_2\rangle : \langle\mathcal{I},\mathcal{J}\rangle \to \langle\mathcal{I}',\mathcal{J}'\rangle \textit{ son un par de} \\ \textit{funciones totales tal que } \sigma_1 : \mathcal{I}\to\mathcal{I}' \textit{ y } \sigma_2 : \mathcal{J}\to\mathcal{J}', \\ \textit{y tal que } (\forall i\in\mathcal{I}) arity(p_i) = arity(p'_{\sigma_1(i)}) \\ \textit{y } (\forall j\in\mathcal{J}) arity(f_j) = arity(f'_{\sigma_2(j)}) \end{array} \right\}$$

Lema 4. Sign *es una categoría.*

Demostración. Se puede mostrar que $id_{\mathcal{I}}$ y $id_{\mathcal{J}}$ son funciones totales que preservan aridad, entonces $id_\Sigma \in \mathcal{A}$. Luego, como la composición de funciones totales que preservan aridad es una función total que preserva aridad, entonces si $\sigma : \Sigma \to \Sigma', \sigma' : \Sigma' \to \Sigma'' \in \mathcal{A}$, tenemos que $\sigma \circ \sigma' : \Sigma \to \Sigma'' \in \mathcal{A}$.

Por otro lado, como id_Σ es la función identidad sobre un conjunto de índices se puede mostrar que para cualquier $\Sigma, \Sigma' \in |\mathsf{Sign}|$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ morfismo en $||\mathsf{Sign}||$, $id_\Sigma \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ id_{\Sigma'}$. Como los morfismos son funciones totales que preservan aridad se puede mostrar también que su composición es asociativa.

Por lo tanto, Sign es una categoría. $\square$

Definición 35. *Sea* $\Sigma = \langle \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}\rangle \in |\mathsf{Sign}|$ *y un conjunto de variables individuales* $\mathcal{V}$*, el conjunto de* Σ*-términos es el conjunto más chico* $Term(\Sigma)$ *tal que:*

- $\mathcal{V} \subseteq Term(\Sigma)$
- *si* $j \in \mathcal{J}$ *y* $arity(f_j) = 0$ *entonces* $f_j \in Term(\Sigma)$
- *si* $t_1, \ldots, t_{arity(f_j)} \in Term(\Sigma)$ *entonces* $f_j(t_1, \ldots, t_{arity(f_j)}) \in Term(\Sigma)$

Definición 36. *Sea* $\Sigma, \Sigma' \in |\mathsf{Sign}|$*, y* $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ *un morfismo en* Sign*. Entonces* $\sigma_{term} : Term(\Sigma) \to Term(\Sigma')$ *se define inductivamente en la estructura de términos de la siguiente manera:*

- $\sigma_{term}(x) \equiv x$ *para todo* $x \in \mathcal{V}$

- $\sigma_{term}(f_j) \equiv f'_{\sigma(j)}$ *si* $j \in \mathcal{J}$ *y* $arity(f_j) = 0$
- *si* $\{t_1, \ldots, t_{arity(f_j)}\} \subseteq Term(\Sigma)$*, entonces* $\sigma_{term}(f_i(t_1, \ldots, t_{arity(f_j)})) \equiv f'_{\sigma(j)}(\sigma_{term}(t_1), \ldots, \sigma_{term}(t_{arity(f_j)}))$*, para todo* $j \in \mathcal{J}$*.*

Definición 37. *Sea* $\Sigma = \langle\{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}\rangle, \Sigma' = \langle\{p'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}, \{f'_j\}_{j\in\mathcal{J}'}\rangle$ *signaturas en* $|\mathsf{Sign}|$*,* $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$ *y un conjunto de variables individuales* $\mathcal{V}$*. Definimos* $\mathbf{Sen} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *como:*

- $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ *es el conjunto más chico tal que:*
  - *si* $t_1, t_2 \in Term(\Sigma)$ *entonces* $t_1 = t_2 \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - *si* $t_1, \ldots, t_{arity(p_j)} \in Term(\Sigma)$ *entonces* $p_j(t_1, \ldots, t_{arity(p_j)}) \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - *si* $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *entonces* $\neg\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - *si* $\alpha, \beta \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *entonces* $\alpha \implies \beta \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - *si* $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $x \in \mathcal{V}$ *entonces* $(\forall x)\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
- $\mathbf{Sen}(\sigma) : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}(\Sigma')$ *se define de la siguiente manera:*
  - $\mathbf{Sen}(\sigma)(t_1 = t_2) \equiv \sigma_{term}(t_1) = \sigma_{term}(t_2)$ *para todo* $t_1, t_2 \in Term(\Sigma)$
  - $\mathbf{Sen}(\sigma)(p_j(t_1, \ldots, t_{arity(p_j)}) \equiv p'_{\sigma(j)}(\sigma_{term}(t_1), \ldots, \sigma_{term}(t_{arity(p_j)}))$ *para todo* $j \in \mathcal{J}$ *y* $t_1, \ldots, t_{arity(p_j)} \in Term(\Sigma)$
  - $\mathbf{Sen}(\sigma)(\neg\alpha) \equiv \neg\mathbf{Sen}(\sigma)(\alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - $\mathbf{Sen}(\sigma)(\alpha \implies \beta) \equiv \mathbf{Sen}(\sigma)(\alpha) \implies \mathbf{Sen}(\sigma)(\beta)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
  - $\mathbf{Sen}(\sigma)((\forall x)\alpha) \equiv (\forall x)\mathbf{Sen}(\sigma)(\alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *y* $x \in \mathcal{V}$

Lema 5. **Sen** *es functor.*

Demostración. Tenemos que $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ está definido como un conjunto, por lo tanto pertenece a $|\mathsf{Set}|$. Además, si $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$ entonces $\mathbf{Sen}(\sigma)$ está definido como una función desde el conjunto $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ hacia el conjunto $\mathbf{Sen}(\Sigma')$, es decir que $\mathbf{Sen}(\sigma) : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}(\Sigma') \in ||\mathsf{Set}||$.

La demostración de que $\mathbf{Sen}(id_\Sigma) = id_{\mathbf{Sen}(\Sigma)}$ se realiza por inducción en la estructura de las fórmulas de $\mathbf{Sen}(\Sigma)$, a continuación probaremos el caso $t_1 = t_2$, los demás casos se realizan de manera análoga.

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Sen}(id_\Sigma)(t_1 = t_2) & \equiv & id_{\Sigma term}(t_1) = id_{\Sigma term}(t_2) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen} \text{ }] \\ & \equiv & t_1 = t_2 & [\text{ pues a continuación mostramos que} \\ & & & \;\; id_{\Sigma term}(t_1) = t_1 \text{ y } id_{\Sigma term}(t_2) = t_2 \text{ }] \end{array}$$

El hecho de que $id_{\Sigma term}(t) = t$ para cualquier término t se puede mostrar por inducción en la estructura de términos.

Ahora mostramos que si $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ y $\sigma' : \Sigma' \to \Sigma''$ son morfismos en $||\mathsf{Sign}||$, entonces $\mathbf{Sen}(\sigma \circ \sigma') = \mathbf{Sen}(\sigma) \circ \mathbf{Sen}(\sigma')$. Nuevamente la demostración se realiza por inducción en la estructura de las fórmulas de $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ y a continuación probaremos sólo el caso $t_1 = t_2$.

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{Sen}(\sigma \circ \sigma')(t_1 = t_2) & \equiv & (\sigma \circ \sigma')_{term}(t_1) = (\sigma \circ \sigma')_{term}(t_2) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen} \text{ }] \\
 & \equiv & \sigma_{term} \circ \sigma'_{term}(t_1) = \sigma_{term} \circ \sigma'_{term}(t_2) & [\text{ pues más adelante mostramos que} \\
 & & & \;(\sigma \circ \sigma')_{term} = \sigma_{term} \circ \sigma'_{term} \text{ }] \\
 & \equiv & \mathbf{Sen}(\sigma)(\sigma'_{term}(t_1) = \sigma'_{term}(t_2)) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen} \text{ }] \\
 & \equiv & \mathbf{Sen}(\sigma) \circ \mathbf{Sen}(\sigma')(t_1 = t_2) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen} \text{ }]
\end{array}$$

El hecho de que $(\sigma \circ \sigma')_{term} = \sigma_{term} \circ \sigma'_{term}$ se puede mostrar por inducción en la estructura de términos. Veamos el caso $(\sigma \circ \sigma')_{term}(f_j)$ con $j \in \mathcal{J}$ y $arity(f_j) = 0$.

$$\begin{array}{llll}
(\sigma \circ \sigma')_{term}(f_j) & \equiv & f_{(\sigma \circ \sigma')(j)} & [\text{ por definición de } (\sigma \circ \sigma')_{term} \text{ }] \\
 & \equiv & \sigma_{term}(f_{\sigma'(j)}) & [\text{ pues } arity(f_{\sigma'(j)}) = 0 \text{ y por definición de } \sigma_{term} \text{ }] \\
 & \equiv & (\sigma_{term} \circ \sigma'_{term})(f_j) & [\text{ pues } arity(f_j) = 0 \text{ y por definición de } \sigma'_{term} \text{ }]
\end{array}$$

□

Definición 38. *Sea $\Sigma = \langle \{p_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$ una signatura en $|\mathsf{Sign}|$, decimos que una interpretación $\mathcal{U}$ es una estructura $\langle U, \{\underline{p_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\underline{f_j}\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$ donde:*

- *U es un conjunto, llamado universo,*
- *$\underline{p_i} \subseteq U^{arity(p_i)}$ es una relación en U,*
- *$\underline{f_j} \in U$ es una constante del universo, si $arity(f_j) = 0$,*
- *$\underline{f_j} : U^{arity(f_j)} \to U$ es una función total, si $arity(f_j) \neq 0$*

Definición 39. *Sea una interpretación $\mathcal{U} = \langle U, \{\underline{p_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\underline{f_j}\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$ y el conjunto de variables individuales $\mathcal{V}$, decimos que una valuación es una función $v : \mathcal{V} \to U$. La definición se extiende a $v_{term} : Term(\Sigma) \to U$ de la siguiente manera:*

- *$v_{term}(x) = v(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$,*
- *$v_{term}(f_j) = \underline{f_j}$ si $j \in \mathcal{J}$ y $arity(f_j) = 0$,*
- *$v_{term}(f_j(t_1, \ldots, t_{arity(f_j)})) = \underline{f_j}(v_{term}(t_1), \ldots, v_{term}(t_{arity(f_j)}))$ para todo $j \in \mathcal{J}$*

El lector precavido notará que la extensión v_{term} está asociada a una interpretación particular de los símbolos de predicado y los símbolos de función. Cuando sea necesario explicitar dicha interpretación usaremos la notación $v_{term,\,\mathcal{U}}$. De esta manera, dada una signatura Σ, un modelo $\mathcal{M}$ de la signatura es una estructura $\langle \mathcal{U}, v \rangle$ donde $\mathcal{U}$ es una interpretación y v es una valuación. Llamaremos Mod_Σ al conjunto de modelos de la signatura Σ.

Definición 40. *A continuación definimos* $\mathbf{Mod} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$. *Sea $\Sigma = \langle \{p_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle, \Sigma' = \langle \{p'_i\}_{i \in \mathcal{I}'}, \{f'_j\}_{j \in \mathcal{J}'} \rangle$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$, entonces definimos* $\mathbf{Mod}(\Sigma) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A} \rangle$ *se define de la siguiente manera:*

- *$\mathcal{O} = Mod_\Sigma$,*

- $\mathcal{A} = \{\, \gamma : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \mid \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{O}$ *y* γ *es un homomorfismo* $\}$,

y sea $h : \mathcal{M}'_1 \to \mathcal{M}'_2 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$ *donde* $\mathcal{M}'_1 = \langle \mathcal{U}'_1, v'_1 \rangle$ *con* $\mathcal{U}'_1 = \langle U'_1, \{\underline{p^1_i}\}_{i \in \mathcal{I}'}, \{\underline{f^1_j}\}_{j \in \mathcal{J}'} \rangle$ *entonces* $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})$ *se define de la siguiente manera:*

- $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1) = \langle \mathcal{U}_1, v'_1 \rangle$ *con* $\mathcal{U}_1 = \langle U'_1, \{\underline{p_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\underline{f_j}\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$, *donde* $\underline{p_i} = \underline{p^1_{\sigma_1(i)}}$ *y* $\underline{f_j} = \underline{f^1_{\sigma_2(j)}}$ *para todo* $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$,
- $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h) = h$

Lema 6. $\mathbf{Mod} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$ *es functor.*

Demostración. Primero mostraremos que dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ es una categoría. Dado un modelo $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$, se puede mostrar que el morfismo identidad $id_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, que está como la identidad de la interpretación y de la valuación del modelo, es un homomorfismo. Por lo tanto $id_{\mathcal{M}} \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma)||$. Luego, como la composición de homomorfismos es un homomorfismo se puede mostrar que dados $h_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, $h_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma)||$ entonces $h_2 \circ h_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma)||$. Por otro lado, como cada $id_{\mathcal{M}}$ es efectivamente el homomorfismo identidad sobre los elementos del modelo podemos mostrar que para cualquier $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma)||$, $id_{\mathcal{M}_1} \circ h = h = h \circ id_{\mathcal{M}_2}$. Por último, como los morfismos en $||\mathbf{Mod}(\Sigma)||$ son homomorfismos se sigue que la composición es asociativa.

A continuación mostraremos que dado $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$, entonces $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}}) : \mathbf{Mod}(\Sigma') \to \mathbf{Mod}(\Sigma) \in ||\mathsf{Cat}||$, es decir que $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})$ es functor. Dado un modelo $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}(\Sigma')|$, por definición de $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})$ se puede ver que $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}')$ es un modelo de la signatura Σ, es decir pertenece a $|\mathbf{Mod}(\Sigma)|$. Luego, dado un homomorfismo $h : \mathcal{M}'_1 \to \mathcal{M}'_2 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$ se puede ver que h es un homorfismo entre el Σ-reducto de $\mathcal{M}'_1$ y el Σ-reducto de $\mathcal{M}'_2$, por lo tanto $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h) : \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1) \to \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2) \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$. Bajo el mismo razonamiento también se puede ver que dado el homomorfismo identidad $id_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}' \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$, $id_{\mathcal{M}'}$ es el homomorfismo identidad del Σ-reducto de $\mathcal{M}'$, es decir que $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(id_{\mathcal{M}'}) = id_{\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}')}$. Por último, como $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h) = h$, se puede mostrar que $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h_1 \circ h_2) = \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h_1) \circ \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h_2)$, donde h_1 y h_2 son homomorfismos en $||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$.

A continuación mostraremos que dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$ entonces $\mathbf{Mod}(id_{\Sigma}) = id_{\mathbf{Mod}(\Sigma)}$. Basta ver que $\mathbf{Mod}(id_{\Sigma})$ aplicado a cualquier modelo $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ da como resultado el mismo modelo $\mathcal{M}$ ya que id_{Σ} es la función identidad del conjunto de índices asociado a la signatura Σ.

Por último debemos mostrar que dados $\sigma_1 : \Sigma \to \Sigma'$, $\sigma_2 : \Sigma' \to \Sigma'' \in ||\mathsf{Sign}||$ entonces $\mathbf{Mod}(\sigma_1^{\mathsf{op}} \circ \sigma_2^{\mathsf{op}}) = \mathbf{Mod}(\sigma_1^{\mathsf{op}}) \circ \mathbf{Mod}(\sigma_2^{\mathsf{op}})$. Para mostrar esto debemos observar primero que, dado un modelo $\mathcal{M}'' \in |\mathbf{Mod}(\Sigma'')|$, un predicado $\underline{p_i}$ del modelo $\mathbf{Mod}(\sigma_1^{\mathsf{op}} \circ \sigma_2^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'')$ es $\underline{p''_{\sigma_1 \circ \sigma_2(i)}}$. Luego, debemos observar que un predicado $\underline{p_i}$ del modelo $\mathbf{Mod}(\sigma_1^{\mathsf{op}}) \circ \mathbf{Mod}(\sigma_2^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'')$ también es es $\underline{p''_{\sigma_1 \circ \sigma_2(i)}}$ ya que surge de aplicar primero σ_2 y luego σ_1. El mismo razonamiento se utiliza para las funciones $\underline{f_j}$. □

Definición 41. *Sea una interpretación* $\mathcal{U}$, *una valuación* $v : \mathcal{V} \to U$ *y un elemento* $u \in U$, *definimos la valuación $v[x \leftarrow u]$ para $x \in \mathcal{V}$ de la siguiente manera:*

$$v[x \leftarrow u](y) = \begin{cases} v(y) & si \quad y \neq x \\ \\ u & si \quad y = x \end{cases}$$

Esta definición se extiende a $v[x \leftarrow u]_{term} : Term(\Sigma) \rightarrow U$ de manera análoga a la extensión realizada en la definición 39.

Definición 42. *Sea un modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, v \rangle \in |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$ con $\mathcal{U} = \langle U, \{\underline{p_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\underline{f_j}\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$ y una fórmula en $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ se define la consecuencia semántica $\models$ inductivamente en la estructura de la fórmula:*

- $\mathcal{M} \models t_1 = t_2$ *si y sólo si* $v_{term}(t_1) = v_{term}(t_2)$
- $\mathcal{M} \models p_j(t_1, \ldots, t_{arity(p_j)})$ *si y sólo si* $\underline{p_j}(v_{term}(t_1), \ldots, v_{term}(t_{arity(p_j)}))$
- $\mathcal{M} \models \neg\alpha$ *si y sólo si* $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models \alpha \implies \beta$ *si y sólo si* $\mathcal{M} \not\models \alpha$ *o* $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\forall x)\alpha$ *si y sólo si* $\langle \mathcal{U}, v[x \leftarrow u] \rangle \models \alpha$ *para cualquier* $u \in U$

Lema 7. *Se preserva la condición de $\models$-invarianza.*

Demostración. Queremos ver que para todo $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$, $\phi \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ y $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{U}', v' \rangle \in |\mathbf{Mod}(\Sigma')|$, con $\mathcal{U}' = \langle U', \{\underline{p'_i}\}_{i \in \mathcal{I}'}, \{\underline{f'_j}\}_{j \in \mathcal{J}'} \rangle$, la siguiente condición de $\models$-invarianza se satisface:

$$\mathcal{M}' \models_{\Sigma'} \mathbf{Sen}(\sigma)(\phi) \quad \text{sii} \quad \mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}') \models_{\Sigma} \phi\ .$$

La demostración se realiza por inducción en la estructura de la fórmula, a continuación veremos el caso en que la fórmula es de la forma $t_1 = t_2$. Por un lado tenemos que:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}' \models_{\Sigma'} \mathbf{Sen}(\sigma)(t_1 = t_2) & \text{sii} & \mathcal{M}' \models_{\Sigma'} \sigma_{term}(t_1) = \sigma_{term}(t_2) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}(\sigma)\ ] \\ & \text{sii} & v'_{term,\ \mathcal{U}'}(\sigma_{term}(t_1)) = v'_{term,\ \mathcal{U}'}(\sigma_{term}(t_2)) & [\text{ por definición de } \models\ ] \end{array}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}') \models_{\Sigma} t_1 = t_2 \quad \text{sii} \quad \langle \mathcal{U}, v' \rangle \models_{\Sigma} t_1 = t_2 \quad [\text{ por definición de } \mathbf{Mod}\ ]$$

con $\mathcal{U} = \langle U', \{\underline{p_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\underline{f_j}\}_{j \in \mathcal{J}} \rangle$ donde $\underline{p_i} = \underline{p'_{\sigma_1(i)}}$ y $\underline{f_j} = \underline{f'_{\sigma_2(j)}}$.

Luego tenemos que:

$$\langle \mathcal{U}, v' \rangle \models_{\Sigma} t_1 = t_2 \quad \text{sii} \quad v'_{term,\ \mathcal{U}}(t_1) = v'_{term,\ \mathcal{U}}(t_2) \quad [\text{ por definición de } \models\ ]$$

Entonces basta con mostrar que

$$v'_{term,\ \mathcal{U}'}(\sigma_{term}(t_1)) = v'_{term,\ \mathcal{U}'}(\sigma_{term}(t_2)) \quad \text{sii} \quad v'_{term,\ \mathcal{U}}(t_1) = v'_{term,\ \mathcal{U}}(t_2)$$

Para eso vamos a mostrar que $v'_{term,\,\mathcal{U}'}(\sigma_{term}(t)) = v'_{term,\,\mathcal{U}}(t)$ para cualquier término en $Term(\Sigma)$. Esto se demuestra por inducción en la estructura del término, a continuación mostramos el caso $t = f_j$ con $j \in \mathcal{J}$ y $arity(f_j) = 0$.

$$\begin{array}{rcll}
v'_{term,\,\mathcal{U}'}(\sigma_{term}(f_j)) & = & v'_{term,\,\mathcal{U}'}(f'_{\sigma_2(j)}) & [\text{ por definición de } \sigma_{term}\ ] \\
& = & \underline{f'_{\sigma_2(j)}} & [\text{ por definición de } v'_{term,\,\mathcal{U}'}\ ] \\
& = & \underline{f_j} & [\text{ por las componentes de } \mathcal{U}\ ] \\
& = & v'_{term,\,\mathcal{U}}(f_j) & [\text{ por definición de } v'_{term,\,\mathcal{U}}\ ]
\end{array}$$

□

4.2. Institución del Álgebra Relacional

A continuación presentamos la institución que caracteriza las álgebras relacionales (de aquí en adelante denotadas como RA). Una signatura de este lenguaje es un conjunto $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ donde $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices. Lo que tenemos es que cada R_i es un símbolo de relación binaria. Llamaremos $Sign_{\mathsf{RA}}$ al conjunto de signaturas de este lenguaje y utilizaremos el superíndice $'$ para referirnos a distintas signaturas de este conjunto.

Las demostraciones de los lemas necesarios para probar que RA es una institución son en gran medida análogas a las presentadas anteriormente para ver que $\mathsf{FOL}_=$ es una institución y por ello no serán presentadas. A cambio, sí lo haremos con las definiciones que servirán para fijar notación que usaremos más adelante.

Definición 43. *Definimos* $\mathsf{Sign} = \langle Sign_{\mathsf{RA}}, \mathcal{A}\rangle$ *donde*

$$\mathcal{A} = \left\{\, \sigma : \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}} \to \{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'} \;\middle|\; \sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{I}' \text{ es una función total } \right\}$$

Lema 8. Sign *es una categoría.*

Definición 44. *Sea una signatura* $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *definimos el conjunto de designaciones de relación como el conjunto más chico* $RelDes(\Sigma)$ *tal que:*

- $\Sigma \cup \{\, 1, 0, 1' \,\} \subseteq RelDes(\Sigma)$,
- *si* $r, s \in RelDes(\Sigma)$, *entonces* $\{\, r+s, r\cdot s, \overline{r}, r\,;s, \breve{r} \,\} \subseteq RelDes(\Sigma)$.

Con las designaciones de relación introducimos los operadores del álgebra relacional (producto, coproducto, etc). Ahora necesitamos extender las traducciones de signaturas a traducciones de designaciones de relación. El procedimiento consiste básicamente en mantener los símbolos de operadores del álgebra relacional y traducir los símbolos propios de la signatura, esto se hara inductivamente.

Definición 45. *Sea* $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \Sigma' = \{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}$ *signaturas en* $|\mathsf{Sign}|$, $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$. *Entonces* $\sigma_{RelDes} : RelDes(\Sigma) \to RelDes(\Sigma')$ *se define inductivamente en la estructura de designaciones de relación de la siguiente manera:*

- $\sigma_{RelDes}(1) \equiv 1$, $\sigma_{RelDes}(0) \equiv 0$, $\sigma_{RelDes}(1') \equiv 1'$,
- *si* $i \in \mathcal{I}$, *entonces* $\sigma_{RelDes}(R_i) \equiv \sigma(R_i)$

- *si* $r, s \in \mathit{RelDes}(\Sigma)$, *entonces*
    - $\sigma_{\mathit{RelDes}}(r+s) \equiv \sigma_{\mathit{RelDes}}(r)+\sigma_{\mathit{RelDes}}(s)$,
    - $\sigma_{\mathit{RelDes}}(r\cdot s) \equiv \sigma_{\mathit{RelDes}}(r)\cdot\sigma_{\mathit{RelDes}}(s)$,
    - $\sigma_{\mathit{RelDes}}(r;s) \equiv \sigma_{\mathit{RelDes}}(r);\sigma_{\mathit{RelDes}}(s)$,
    - $\sigma_{\mathit{RelDes}}(\overline{r}) \equiv \overline{\sigma_{\mathit{RelDes}}(r)}$,
    - $\sigma_{\mathit{RelDes}}(\breve{r}) \equiv \overbrace{\sigma_{\mathit{RelDes}}(r)}$

Definición 46. *Sea* $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \Sigma' = \{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}$ *signaturas en* $|\mathsf{Sign}|$, $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$. *Definimos* $\mathbf{Sen} : \mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$ *como:*

- $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ *es el conjunto más chico tal que:*
    - *si* $r, s \in \mathit{RelDes}(\Sigma)$ *entonces* $r = s \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$
- $\mathbf{Sen}(\sigma) : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}(\Sigma')$ *se define de la siguiente manera:*
    - $\mathbf{Sen}(\sigma)(r = s) \equiv \sigma_{\mathit{RelDes}}(r) = \sigma_{\mathit{RelDes}}(s)$ *para todo* $r, s \in \mathit{RelDes}(\Sigma)$

Lema 9. **Sen** *es functor.*

Definición 47. *Sea una signatura* $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *decimos que un modelo* $\mathcal{M}$ *es una estructura* $\langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id\rangle$ *en la que* $\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}$ *y* A *son conjuntos de relaciones binarias sobre un conjunto* U, $\cup$, $\cap$ *y* $\circ$ *son operaciones binarias,* $^{-}$ *y* $^{\smile}$ *son operaciones unarias y* $\emptyset$, E *y* Id *son elementos distinguidos de* A, *tal que se satisface:*

- $\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq A$
- A *está cerrado por* $\cup$ *(i.e. union de conjuntos),*
- A *está cerrado por* $\cap$ *(i.e. intersección de conjuntos),*
- A *está cerrado por* $^{-}$ *(i.e. complemento de conjuntos con respecto a* E*),*
- $\emptyset \in A$ *es la relación vacía sobre el conjunto* U,
- $E \in A$ *y* $\bigcup_{r\in A} r \subseteq E$,
- A *está cerrado por* $\circ$, *definida de la siguiente manera*

$$x \circ y = \{\ \langle a, b\rangle \in U \times U \mid (\exists c)(\langle a, c\rangle \in x \wedge \langle c, b\rangle \in y)\ \}\ ,$$

- A *está cerrado por* $^{\smile}$, *definida de la siguiente manera*

$$\breve{x} = \{\ \langle a, b\rangle \in U \times U \mid \langle b, a\rangle \in x\ \}\ ,$$

- $Id \in A$ *es la relación identidad sobre el conjunto* U.

Llamaremos Mod_Σ *al conjunto de modelos de la signatura* Σ.

Desde un punto de vista formal, la Definición 47 solo contempla una parte de la clase de modelos del álgebra relacional, aquellos denominados propios y que interpretan, muy intuitivamente, la idea de que las relaciones son conjuntos de pares ordenados sobre un conjunto.

En [Tar41], Tarski remarca el hecho de que prácticamente no se estaba realizando investigación sobre este tema hasta que Russell y Whitehead [RW13] incuyeron el álgebra de relaciones binarias en el campo de la lógica. Lo hicieron poniéndolo en el centro de su sistema lógico y desarrollando nuevos conceptos conectados a la noción de relación. Fue en [Tar41] donde Tarski se abocó al desarrollo del cálculo relacional. En primer lugar Tarski presenta la llamada *elementary theory of binary relations* como una formalización lógica del álgebra de relaciones binarias; de esta manera el cálculo relacional se obtiene de esta formalización a partir de restringir el lenguaje a sentencias que cumplen determinados criterios. Al final de este trabajo Tarski plantea cinco preguntas sobre el cálculo relacional; desde nuestro punto de vista tres son de particular interes:

- ¿Es cierto que todo modelo del cálculo relacional es isomorfo a un álgebra de relaciones binarias?
- ¿Es cierto que toda fórmula que es válida en toda álgebra de relaciones binarias es demostrable en el cálculo relacional?
- ¿Es cierto que toda fórmula de la *elementary theory of binary relations* puede ser transformada a una fórmula equivalente del cálculo relacional?

Fue Lyndon en [Lyn50] que dio una respuesta negativa a las primeras dos preguntas mostrando un álgebra de relaciones finita, no simple y no trivial que no es representable como un álgebra de relaciones binarias. Luego, Monk muestra en [Mon64] que la clase de álgebras de relaciones binarias no puede ser axiomatizada en forma finita. La tercera pregunta fue respondida por Korselt (la demostración puede verse en [Löw15]) al probar la equipolencia del cálculo relacional y el fragmento de tres variables de la lógica de predicados de primer órden.

Todo esto abona la discusión de que el estudio de la teoría de modelos del álgebra relacional es sensiblemente más complejo que lo presentado en este apartado como ejemplo. Las problemáticas derivadas de la utilización de una clase de modelos restringida solo son de relevancia a la luz del estudio de su relación con un cálculo que puede o no ser completo para ella, pero esto excede los tópicos estudiados en este trabajo.

Definición 48. *Sea* $\Sigma = \langle \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}\rangle, \Sigma' = \langle \{p'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}, \{f'_j\}_{j\in\mathcal{J}'}\rangle$ *y* $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}||$*, entonces* $\mathbf{Mod}(\Sigma) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A}\rangle$ *se define de la siguiente manera:*

- $\mathcal{O} = Mod_\Sigma$,
- $\mathcal{A} = \{\, \gamma : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \mid \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{O} \ \ y \ \ \gamma \text{ es un homomorfismo}\,\}$,

y sea $h : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'_2 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma')||$ *donde* $\mathcal{M}' = \langle \{\underline{R^1_i}\}_{i\in\mathcal{I}'}, A', \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id\rangle$ *entonces* $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})$ *se define de la siguiente manera:*

- $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}') = \langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A', \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id\rangle$ *donde* $\underline{R_i} = \underline{R^1_{\sigma(i)}}$ *para todo* $i \in \mathcal{I}$,

- $\mathbf{Mod}(\sigma^{\mathsf{op}})(h) = h$

Lema 10. $\mathbf{Mod} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Cat}$ *es functor.*

Hasta acá tenemos las interpretacionesde los símbolos de relación de la signatura. Necesitamos también interpretar las designaciones de relación, a continuación definimos una función $val_{\mathcal{M}}$ que realiza este trabajo. Esencialmente lo que se añade es la interpretación de cada uno de los operadores del Álgebra Relacional (producto, coproducto, etc) como su correspondiente operación en teoría de conjuntos (intersección, unión, etc).

Definición 49. *Sea una signatura* $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *y un modelo de la signatura* $\mathcal{M} = \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id\rangle$, *entonces* $val_{\mathcal{M}} : RelDes(\Sigma) \to A$ *se define inductivamente en la estructura de designaciones de relación:*

- $val_{\mathcal{M}}(1) \equiv E$, $val_{\mathcal{M}}(0) \equiv \emptyset$, $val_{\mathcal{M}}(1') \equiv Id$,
- *si* $i \in \mathcal{I}$, *entonces* $val_{\mathcal{M}}(R_i) \equiv \underline{R_i}$
- *si* $r, s \in RelDes(\Sigma)$, *entonces*
  - $val_{\mathcal{M}}(r+s) \equiv val_{\mathcal{M}}(r) \cup val_{\mathcal{M}}(s)$,
  - $val_{\mathcal{M}}(r\cdot s) \equiv val_{\mathcal{M}}(r) \cap val_{\mathcal{M}}(s)$,
  - $val_{\mathcal{M}}(r;s) \equiv val_{\mathcal{M}}(r) \circ val_{\mathcal{M}}(s)$,
  - $val_{\mathcal{M}}(\overline{r}) \equiv \overline{val_{\mathcal{M}}(r)}$,
  - $val_{\mathcal{M}}(\breve{r}) \equiv \underbrace{val_{\mathcal{M}}(r)}$

Definición 50. *Sea un modelo* $\mathcal{M} = \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id\rangle$ *y una fórmula* $r = s \in \mathbf{Sen}(\Sigma)$ *se define la consecuencia semántica* $\models$ *de la siguiente manera:*

- $\mathcal{M} \models r = s$ *si y sólo si* $val_{\mathcal{M}}(r) = val_{\mathcal{M}}(s)$

Lema 11. *Se preserva la condición de* $\models$*-invarianza.*

4.3. Institución del Álgebra Relacional con clausura reflexo-transitiva

A continuación presentamos la institución que caracteriza al álgebra relacional con clausura reflexo-transitiva (de aquí en más denotada como $\mathsf{RA}*$). Este lenguaje es una extensión de RA con un nuevo operador relacional * unario que va a ser interpretado como la clausura reflexo-transitiva de la relación a la cual es aplicado. La signatura Sign del lenguaje es la misma que la de RA. El conjunto de designaciones de relación de $\mathsf{RA}*$ se obtiene de extender la Definición 44 con este nuevo símbolo de la siguiente manera:

- si $r \in RelDes(\Sigma)$, entonces $r^* \in RelDes(\Sigma)$.

La definición del functor **Sen** se obtiene de extender la Definición 46 de manera tal de incorporar este nuevo símbolo a las fórmulas del lenguaje.

A continuación presentamos la definición de la clase de modelos.

Definición 51. *Sea una signatura $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ decimos que un modelo $\mathcal{M}$ es una estructura $\langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id, ^{\underline{*}}\rangle$ en la que $\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}$ y A son conjuntos de relaciones binarias sobre un conjunto U, $\cup$, $\cap$ y $\circ$ son operaciones binarias, $^-$, $^\smile$ y $^{\underline{*}}$ son operaciones unarias y $\emptyset$, E y Id son elementos distinguidos de A, tal que se satisface:*

- $\langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id\rangle$ *es un modelo de* RA,
- *A está cerrado por $^{\underline{*}}$, que se define de la siguiente manera* [1]*:* $r^{\underline{*}} = \bigcup_{0\leq i} r^{;i}$

La definición del functor **Sen** *se obtiene de extender la Definición 47 de manera tal de incorporar este nuevo símbolo " $\underline{*}$ " a los modelos del lenguaje.*

La función $val_{\mathcal{M}}$ se define extendiendo la Definición 49 con la equivalencia $val_{\mathcal{M}}(r^*) \equiv val_{\mathcal{M}}(r)^{\underline{*}}$. De esta manera la consecuencia semántica $\models$ se define de manera análoga a la Definición 50.

4.4. Comorfismo parcial débil entre $\mathsf{RA}*$ y $\mathsf{FOL}_=$

A continuación mostramos un comorfimo parcial débil $\gamma : \mathsf{RA}* \to \mathsf{FOL}_=$ entre la institución del Álgebra Relacional con clausura reflexo-transitiva y la institución de Lógica de Primer Orden con igualdad. Para tal fin, utilizando el Teorema 2, definiremos un comorfismo $\sigma : \mathsf{RA} \hookrightarrow \mathsf{RA}*$ y un comorfismo $\rho : \mathsf{RA} \to \mathsf{FOL}_=$, que cumplen las hipótesis del Teorema. Las relaciones que nos proponemos definir se muestran en la Figura 4.1.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{RA}* \arrow[rr, dotted, "\gamma"] & & \mathsf{FOL}_= \\
& \mathsf{RA} \arrow[ul, hook, "\sigma"] \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

Fig. 4.1: Comorfismo parcial débil entre Álgebra Relacional con clausura reflexo-transitiva y Lógica de Primer Orden con iguladad.

Definición 52. *Dado $\sigma : \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}} \to \{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'} \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$, definimos $\rho^{Sign} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}} \to \mathsf{Th}^{\mathsf{FOL}_=}$ de la siguiente manera:*

- $\rho^{Sign}(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}) = \langle\Sigma, \Gamma\rangle$ *donde* $\Sigma = \langle RelDes(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}), \emptyset\rangle$ *y para todo* $r, s \in RelDes(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}})$

[1] La iteración i-ésimo de una relación r, denotada $r^{;i}$, se define según las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} r^{;0} &= 1', \\ r^{;n+1} &= r\,;r^{;n}. \end{aligned}$$

las siguientes fórmulas pertenecen a Γ:

$$\begin{array}{l}(\forall x,y)\neg 0(x,y)\\(\forall x,y)1(x,y)\\(\forall x,y)r+s(x,y) \iff r(x,y)\vee s(x,y)\\(\forall x,y)r\cdot s(x,y) \iff r(x,y)\vee s(x,y)\\(\forall x,y)\overline{r}(x,y) \iff \neg r(x,y)\\(\forall x)1'(x,x)\\(\forall x,y)r\,;s(x,y) \iff (\exists z)r(x,z)\wedge s(z,y)\\(\forall x,y)\breve{r}(x,y) \iff r(y,x)\end{array}$$

- $\rho^{Sign}(\sigma) = \langle \sigma_{RelDes}, \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{RelDes})\rangle$[2]

Lema 12. *ρ^{Sign} es functor.*

Demostración. Dada una signatura $\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ del Álgebra Relacional el par $\langle\Sigma,\Gamma\rangle$ obtenido al aplicar ρ^{Sign} contiene efectivamente una signatura y un conjunto de fórmulas de $\mathsf{FOL}_=$, por lo tanto $\rho^{Sign}(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}) \in |\mathsf{Th}^{\mathsf{FOL}_=}|$. Luego, como σ_{RelDes} es un morfismo entre signaturas de primer órden y $\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{RelDes})$ es un morfismo entre conjuntos de fórmulas que preserva satisfactibilidad, entonces $\rho^{Sign}(\sigma)$ es efectivamente un morfismo entre presentaciones de teorías, es decir $\rho^{Sign}(\sigma) : \rho^{Sign}(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}) \to \rho^{Sign}(\{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}) \in ||\mathsf{Th}^{\mathsf{FOL}_=}||$.

Por otro lado, sea Σ^{RA} una signatura de Álgebra Relacional, como $\langle id_{\Sigma^{\mathsf{RA}}\,RelDes}, \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(id_{\Sigma^{\mathsf{RA}}\,RelDes})\rangle$ conforma un morfismo identidad entre presentaciones de teorías, entonces se puede mostrar que $\rho^{Sign}(id_{\Sigma^{\mathsf{RA}}}) = id_{\rho^{Sign}(\Sigma^{\mathsf{RA}})}$.

Por último debemos mostrar que $\rho^{Sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \rho^{Sign}(\sigma_1) \circ \rho^{Sign}(\sigma_2)$ donde σ_1 y σ_2 son morfismos en $||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$. Por cómo está definido ρ^{Sign} basta con mostrar que $\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{1\,RelDes} \circ \sigma_{2\,RelDes}) = \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{1\,RelDes}) \circ \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{2\,RelDes})$. Esto es cierto porque $\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}$ es functor.

□

Definición 53. *Sea $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, entonces la función $\rho^{Sen}_\Sigma : \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\Sigma))$ se define de la siguiente manera:*

- *para todo $r, s \in RelDes(\Sigma)$, $\rho^{Sen}_\Sigma(r = s) \equiv (\forall x,y)r(x,y) \iff s(x,y)$*

Lema 13. *ρ^{Sen} es transformación natural.*

Demostración. $RelDes(\Sigma)$ es parte de la signatura de primer orden $\rho^{Sign}(\Sigma)$ y la fórmula $(\forall x,y)r(x,y) \iff s(x,y)$ es una fórmula bien formada de primer órden cuyos símbolos extra lógicos estan en $RelDes(\Sigma)$. Entonces es una fórmula de esa signatura y, por lo tanto, ρ^{Sen}_Σ efectivamente es una función entre $\mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)$ y $\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\Sigma))$.

[2] Estamos realizando un abuso de notación extendiendo $\sigma_{RelDes} : RelDes(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}) \to RelDes(\{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'})$ a la siguiente aridad $\sigma_{RelDes} : \langle RelDes(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}), \emptyset\rangle \to \langle RelDes(\{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'}), \emptyset\rangle$

A continuación debemos mostrar que, dado $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{R}}\mathsf{A}||$, entonces $\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\sigma)) \circ \rho^{Sen}_{\Sigma} = \rho^{Sen}_{\Sigma'} \circ \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\sigma)$. Dado $r, s \in RelDes(\Sigma)$ tenemos que:

$$\begin{array}{ll@{\qquad}r}
 & (\mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\sigma)) \circ \rho^{Sen}_{\Sigma})(r = s) & \\
\equiv & \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\sigma))((\forall x, y) r(x, y) \iff s(x, y)) & [\text{ por definición de } \rho^{Sen} \,] \\
\equiv & \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma_{RelDes})((\forall x, y) r(x, y) \iff s(x, y)) & [\text{ por definición de } \rho^{Sign} \,] \\
\equiv & (\forall x, y) \sigma_{RelDes}(r)(x, y) \iff \sigma_{RelDes}(s)(x, y) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^{\mathsf{FOL}_=} \,]
\end{array}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{array}{ll@{\qquad}r}
 & (\rho^{Sen}_{\Sigma'} \circ \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\sigma))(r = s) & \\
\equiv & \rho^{Sen}_{\Sigma'}(\sigma_{RelDes}(r) = \sigma_{RelDes}(s)) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}} \,] \\
\equiv & (\forall x, y) \sigma_{RelDes}(r)(x, y) \iff \sigma_{RelDes}(s)(x, y) & [\text{ por definición de } \rho^{Sen} \,]
\end{array}$$

□

Definición 54. *Sea* $\Sigma = \langle \{R_i\}_{i \in \mathcal{I}} \rangle \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, *entonces* $\rho^{Mod}_{\Sigma} : \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma)) \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)$ *se define de la siguiente manera, dados* $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \in ||\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))||$ *donde* $\mathcal{M} = \langle U, \{\underline{r}\}_{r \in RelDes(\Sigma)}, \emptyset, v \rangle$ *y* $\mathcal{M}' = \langle U', \{\underline{r'}\}_{r' \in RelDes(\Sigma)}, \emptyset, v' \rangle$ *entonces:*

- $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) = \langle \{\underline{R_i}\}_{i \in \mathcal{I}}, 2^{U \times U}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, U \times U, \circ, ^{\smile}, Id \rangle$
- *sea* $R \in 2^{U \times U}$, *entonces* $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h)(R) = \{ \langle h(u_1), h(u_2) \rangle \mid \langle u_1, u_2 \rangle \in R \}$

Lema 14. ρ^{Mod}_{Σ} *es functor.*

Demostración. Se puede mostrar que la estructura definida por $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M})$ cumple las condiciones expresadas en la Definición 47 y que, por lo tanto, es un módelo del Álgebra Relacional. Como además el conjunto de relaciones del modelo es de la signatura $\langle \{R_i\}_{i \in \mathcal{I}} \rangle$ podemos afirmar que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)|$. Luego, como h es un homomorfismo entre modelos de $\mathsf{FOL}_=$ se puede mostrar que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h)$ es un homomorfismo entre modelos de RA. Esto se debe a que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h)$ es la aplicación de h en cada elemento de la relación de partida y, por lo tanto, preserva sus propiedades estructurales. Como además se puede mostrar que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h)(R) \in 2^{U' \times U'}$ podemos afirmar que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h) : \rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) \to \rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}') \in ||\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)||$.

Por otro lado, por cómo está definido ρ^{Mod}_{Σ} aplicado a un homomorfismo, podemos afirmar que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(id_{\mathcal{M}})$ es el homomorfismo identidad entre relaciones. Es decir que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(id_{\mathcal{M}}) = id_{\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M})}$.

Por último debemos mostrar que, dados $h_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ y $h_2 : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'' \in ||\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\Sigma))||$, entonces $\rho^{Mod}_{\Sigma}(h_2 \circ h_1) = \rho^{Mod}_{\Sigma}(h_2) \circ \rho^{Mod}_{\Sigma}(h_1)$. Sea $R \in 2^{U \times U}$ tenemos, por un lado, que:

$$\rho^{Mod}_{\Sigma}(h_2 \circ h_1)(R) \;=\; \{ \langle (h_2 \circ h_1)(u_1), (h_2 \circ h_1)(u_2) \rangle \mid \langle u_1, u_2 \rangle \in R \} \quad [\text{ por definición de } \rho^{Mod}_{\Sigma} \,]$$

y por otro lado tenemos que:

$$\begin{array}{rcl@{\quad}r}
\rho^{Mod}_{\Sigma}(h_2) \circ \rho^{Mod}_{\Sigma}(h_1)(R) & = & \rho^{Mod}_{\Sigma}(h_2)(\{ \langle h_1(u_1), h_1(u_2) \rangle \mid \langle u_1, u_2 \rangle \in R \}) & [\text{ por definición de } \rho^{Mod}_{\Sigma} \,] \\
 & = & \{ \langle (h_2 \circ h_1)(u_1), (h_2 \circ h_1)(u_2) \rangle \mid \langle u_1, u_2 \rangle \in R \} & [\text{ por definición de } \rho^{Mod}_{\Sigma} \,]
\end{array}$$

□

Lema 15. *ρ^{Mod} es transformación natural.*

Demostración. Debemos mostrar que, dados $\Sigma = \{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \Sigma' = \{R'_i\}_{i\in\mathcal{I}'} \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$, entonces $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\sigma^{\mathsf{op}}) \circ \rho^{Mod}_{\Sigma'} = \rho^{Mod}_{\Sigma} \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))$. Sea $\mathcal{M}' = \langle U', \{\underline{r'}\}_{r'\in RelDes(\Sigma')}, \emptyset, v'\rangle \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma'))|$, tenemos que:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\sigma^{\mathsf{op}}) \circ \rho^{Mod}_{\Sigma'}(\mathcal{M}') \\
= & \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\sigma^{\mathsf{op}})(\langle\{\underline{R'_i}\}_{i\in\mathcal{I}'}, 2^{U'\times U'}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U'\times U', \circ, ^{\smile}, Id\rangle) \qquad [\text{ por definición de } \rho^{Mod}_{\Sigma'}] \\
= & \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, 2^{U'\times U'}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U'\times U', \circ, ^{\smile}, Id\rangle \qquad [\text{ por definición de } \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}] \\
 & \text{donde } \underline{R_i} = \underline{R'_{\sigma(i)}}
\end{array}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{array}{ll}
 & \rho^{Mod}_{\Sigma} \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}') \\
= & \rho^{Mod}_{\Sigma} \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\sigma^{\mathsf{op}}_{RelDes})(\mathcal{M}') \qquad [\text{ pues } \rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}) = \sigma^{\mathsf{op}}_{RelDes}] \\
= & \rho^{Mod}_{\Sigma}(\langle U', \{\underline{r}\}_{r\in RelDes(\Sigma)}, \emptyset, v'\rangle) \qquad [\text{ por definición de } \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}] \\
 & \text{donde cada } \underline{r} = \underline{r'} \text{ tal que } \sigma_{RelDes}(r) = r'
\end{array}$$

[Notar que, en particular, para $R_i \in RelDes(\Sigma)$ tenemos que $\sigma_{RelDes}(R_i) = R'_{\sigma(i)}$, y por lo tanto $\underline{R_i} = \underline{R'_{\sigma(i)}}$]

$$= \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, 2^{U'\times U'}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U'\times U', \circ, ^{\smile}, Id\rangle \qquad [\text{ por definición de } \rho^{Mod}_{\Sigma}]$$

La demostración de que esta igualdad también vale para homomorfismos en la clase $||\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma'))||$ surge de hacer las siguientes dos observaciones. (1) Por definición, tanto $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\sigma^{\mathsf{op}})$ como $\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))$ se comportan como la identidad cuando son aplicados a un homomorfismo; y (2) tanto $\rho^{Mod}_{\Sigma'}$ como ρ^{Mod}_{Σ} al ser aplicados a un homomorfismo simplemente lo aplican a los elementos de la relación de partida. Por lo tanto el resultado final, tanto aplicando $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\sigma^{\mathsf{op}}) \circ \rho^{Mod}_{\Sigma'}$ como aplicando $\rho^{Mod}_{\Sigma} \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\sigma^{\mathsf{op}}))$ es un mismo homomorfismo en $||\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)||$. □

Lema 16. *$\rho : \mathsf{RA} \to \mathsf{FOL}_=$ preserva a condición de satisfacción de la Definición 28.*

Demostración. Debemos mostrar que dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}|$, para cualquier $\alpha \in \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)$ y $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign}(\Sigma))|$, vale que $\mathcal{M} \models^{\mathsf{FOL}_=}_{\rho^{Sign}(\Sigma)} \rho^{Sen}_{\Sigma}(\alpha)$ sii $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) \models^{\mathsf{RA}}_{\Sigma} \alpha$.

Sabemos que $\mathcal{M}$ tiene la siguiente estructura $\langle\mathcal{U}, v\rangle$, donde $\mathcal{U} = \langle U, \{\underline{r}\}_{r\in RelDes(\Sigma)}, \emptyset\rangle$ y que α es de la forma $r = s$ con $r, s \in RelDes(\Sigma)$. Por otro lado tenemos que $\rho^{Sen}_{\Sigma}(\alpha)$, es decir $\rho^{Sen}_{\Sigma}(r = s)$, está definido como $(\forall x, y)r(x, y) \Leftrightarrow s(x, y)$.

Por cómo está definido $\models^{\mathsf{FOL}_=}$ tenemos que $\mathcal{M}$ satisface $(\forall x, y)r(x, y) \Leftrightarrow s(x, y)$ si y sólo si se satisface $r(x, y) \Leftrightarrow s(x, y)$ para cualquier valor de $x,\ y \in U$. Queremos ver que esto es equivalente a $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) \models^{\mathsf{RA}}_{\Sigma} r = s$. La demostración sigue por inducción en la estructura de la fórmula relacional, mostraremos sólo el caso en que tanto r como s son símbolos relacionales, es decir $R_i, R_j \in \Sigma$.

Tenemos que $\rho^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) \models^{\mathsf{RA}}_{\Sigma} R_i = R_j$, que es equivalente a $\underline{R_i} = \underline{R_j}$, por definición de $\models^{\mathsf{RA}}$. Luego, como $\underline{R_i}$ y $\underline{R_j}$ son relaciones sobre el conjunto U podemos afirmar que vale $\underline{R_i}(x, y)$ sii $\underline{R_j}(x, y)$ para cualquier $x, y \in U$. Esta es precisamente la interpretación de la fórmula de primer órden $(\forall x, y) R_i(x, y) \Leftrightarrow R_j(x, y)$. El razonamiento se puede hacer en dirección opuesta y probar la doble implicación.

De esta manera mostramos que la fórmula de Álgebra Relacional $r = s$ puede ser expresada de forma equivalente por la fórmula de primer órden $(\forall x, y) r(x, y) \Leftrightarrow s(x, y)$.

$\square$

Definición 55. *$\sigma^{Sign} : \mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}} \to \mathsf{Th}^{\mathsf{RA}*}$ se define de la siguiente manera:*

- $\sigma^{Sign}(\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}) = \langle\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \emptyset\rangle$
- *$\sigma^{Sign}(\delta) = \delta$, para $\delta : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$.*

Lema 17. *σ^{Sign} es functor inyectivo en objetos y faithful,*

Demostración. Esencialmente σ^{Sign} se comporta como la transformación identidad, tanto para objetos como para morfismos, por lo tanto se puede mostrar que se comporta como un functor. En particular, de esto también se deduce que es inyectivo en objetos y faithful. $\square$

Definición 56. *Sea $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, entonces la función $\sigma^{Sen}_{\Sigma} : \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\Sigma) \to \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign}(\Sigma))$ se define de la siguiente manera:*

- *para todo $r, s \in RelDes(\Sigma)$, $\sigma^{Sen}_{\Sigma}(r = s) \equiv r = s$*

Lema 18. *σ^{Sen} es transformación natural, y en particular σ^{Sen}_{Σ} es función inyectiva para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$*

Demostración. Sea $\delta : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$ debemos mostrar que $\mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign}(\delta)) \circ \sigma^{Sen}_{\Sigma} = \sigma^{Sen}_{\Sigma'} \circ \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\delta)$. Dada una fórmula $r = s$ tenemos que:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign}(\delta)) \circ \sigma^{Sen}_{\Sigma}(r = s) & \equiv & \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}(\delta) \circ \sigma^{Sen}_{\Sigma}(r = s) & [\text{ pues } \sigma^{Sign}(\delta) = \delta\ ] \\
 & \equiv & \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}(\delta)(r = s) & [\text{ pues } \sigma^{Sen}_{\Sigma}(r = s) \equiv r = s\ ] \\
 & \equiv & \delta_{RelDes}(r) = \delta_{RelDes}(s) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}*}\ ]
\end{array}
$$

Por otro lado tenemos que:

$$
\begin{array}{rcll}
\sigma^{Sen}_{\Sigma'} \circ \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\delta)(r = s) & \equiv & \sigma^{Sen}_{\Sigma'}(\delta_{RelDes}(r) = \delta_{RelDes}(s)) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}\ ] \\
 & \equiv & \delta_{RelDes}(r) = \delta_{RelDes}(s) & [\text{ por definición de } \sigma^{Sen}_{\Sigma'}\ ]
\end{array}
$$

Por último debemos mostrar que σ^{Sen}_{Σ} es función inyectiva, esto se deduce de observar que se comporta como la función identidad. $\square$

Definición 57. *Sea $\Sigma = \langle\{R_i\}_{i\in\mathcal{I}}\rangle \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, entonces $\sigma^{Mod}_{\Sigma} : \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma)) \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)$ se define de la siguiente manera, dados $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \in ||\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))||$ donde $\mathcal{M} = \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id, \underline{*}\rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle\{\underline{R_i'}\}_{i\in\mathcal{I}}, A', \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id, \underline{*}\rangle$ entonces:*

- $\sigma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}) = \langle\{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^{\smile}, Id\rangle$
- $\sigma^{Mod}_{\Sigma}(h) = h$

Lema 19. σ^{Mod}_Σ *es functor suryectivo en objetos y full sobre* $Img(\rho^{Mod}_\Sigma)$*, para todo* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$.

Demostración. Veamos primero que σ^{Mod}_Σ es functor. Como $\mathcal{M} = \langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id, ^{\underline{*}} \rangle$ es un modelo de $\mathsf{RA}*$, entonces la Definición 51 nos asegura que $\langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id \rangle$ es un modelo de RA. Como, en particular, es un modelo de la signatura Σ tenemos que $\sigma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}) \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)|$. Luego, dado un homomorfismo h entre modelos de $\mathsf{RA}*$ se puede mostrar también es un homomorfismo entre modelos de RA, por lo tanto $\sigma^{Mod}_\Sigma(h) \in ||\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)||$. También se puede mostrar que el homomorfismo identidad para un modelo $\mathcal{M}$ de $\mathsf{RA}*$ se comporta como el homomorfismo identidad para el modelo $\sigma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M})$ y, por lo tanto, $\sigma^{Mod}_\Sigma(id_\mathcal{M}) = id_{\sigma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M})}$. Luego, como $\sigma^{Mod}_\Sigma(h) = h$ se puede mostrar que $\sigma^{Mod}_\Sigma(h_2 \circ h_1) = \sigma^{Mod}_\Sigma(h_2) \circ \sigma^{Mod}_\Sigma(h_1)$.

Veamos ahora que, dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, entonces σ^{Mod}_Σ suryectivo en objetos y full sobre $Img(\rho^{Mod}_\Sigma)$. Para ver que es suryectivo en objetos debemos mostrar para todo modelo $\mathcal{M}^{\mathsf{FOL}_=} \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))|$ existe un modelo $\mathcal{M}^{\mathsf{RA}*} \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))|$ tal que $\sigma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}^{\mathsf{RA}*}) = \rho^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}^{\mathsf{FOL}_=})$. Primero debemos notar que $\rho^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}^{\mathsf{FOL}_=})$ es un modelo del Álgebra Relacional de la forma $\langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, 2^{U\times U}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U \times U, \circ, ^\smile, Id \rangle$. Luego, por como está definido σ^{Mod}_Σ, el modelo $\mathcal{M}^{\mathsf{RA}*}$ que satisface la propiedad expresada anteriormente es $\langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, 2^{U\times U}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U \times U, \circ, ^\smile, Id, ^{\underline{*}} \rangle$. Bajo un razonamiento similar se puede mostrar que la igualdad también vale para homomorfismos en $|\mathbf{Mod}^{\mathsf{FOL}_=}(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))|$ y en $|\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))|$ respectivamente y que, por lo tanto, σ^{Mod}_Σ es full sobre $Img(\rho^{Mod}_\Sigma)$.

□

Lema 20. σ^{Mod} *es transformación natural*

Demostración. Debemos mostrar que dado $\delta : \Sigma \to \Sigma' \in ||\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}||$, entonces $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\delta^{\mathsf{op}}) \circ \sigma^{Mod}_{\Sigma'} = \sigma^{Mod}_\Sigma \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))$. Dado un modelo $\mathcal{M}' = \langle \{\underline{R'_i}\}_{i\in\mathcal{I}'}, A', \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id, ^{\underline{*}} \rangle$ se puede mostrar que

$$\begin{aligned}(\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\delta^{\mathsf{op}}) \circ \sigma^{Mod}_{\Sigma'})(\mathcal{M}) &= \langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A', \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id \rangle \\ &= (\sigma^{Mod}_\Sigma \circ \mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}})))(\mathcal{M})\end{aligned}$$

donde $\underline{R_i} = \overline{R'_{\delta(i)}}$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Esto surge de hacer las siguientes dos observaciones, (1) tanto $\sigma^{Mod}_{\Sigma'}$ como σ^{Mod}_Σ aplican la misma transformación: quitar del modelo la interpretación $^{\underline{*}}$ del símbolo de clausura; (2) las signaturas de $\mathsf{RA}*$ son exactamente las mismas que las de RA y las transformaciones de modelos por signatura $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}}(\delta^{\mathsf{op}})$ y $\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))$ tienen esencialmente el mismo comportamiento.

Bajo un razonamiento similar se puede mostrar la igualdad anterior para cualquier homomorfismo h en $||\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma'))||$. □

Lema 21. $\sigma : \mathsf{RA} \to \mathsf{RA}*$ *preserva a condición de satisfacción de la Definición 28 (Comorfismo de instituciones).*

Demostración. Debemos mostrar que dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{RA}}|$, para cualquier $\alpha \in \mathbf{Sen}^{\mathsf{RA}}(\Sigma)$ y $\mathcal{M} \in |\mathbf{Mod}^{\mathsf{RA}*}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma))|$, vale que $\mathcal{M} \models^{\mathsf{RA}*}_{\sigma^{Sign}(\Sigma)} \sigma^{Sen}_\Sigma(\alpha)$ sii $\sigma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}) \models^{\mathsf{RA}}_\Sigma \alpha$.

Sabemos que $\mathcal{M}$ tiene la siguiente estructura $\langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id, \underline{^*} \rangle$ y que α es de la forma $r = s$ con $r, s \in RelDes(\Sigma)$. Por otro lado tenemos que $\sigma_\Sigma^{Sen}(r = s) \equiv r = s$, es decir, una fórmula en RA también es una fórmula en $\mathsf{RA}*$, y que $\sigma_\Sigma^{Mod}(\mathcal{M}) = \langle \{\underline{R_i}\}_{i\in\mathcal{I}}, A, \cup, \cap, ^-, \emptyset, E, \circ, ^\smile, Id \rangle$, es decir, la transformación le quita al modelo de $\mathsf{RA}*$ la interpretación del símbolo de clausura. Entonces la preservación de la condición de satisfacción surge de observar que si un modelo $\mathcal{M}$ de $\mathsf{RA}*$ hace verdadera una fórmula $r = s$ que no contiene al símbolo de clausura *, entonces al quitarle al modelo la interpretación de la clausura $\underline{^*}$ el modelo resultante también hace verdadera la fórmula $r = s$. El mismo razonamiento se aplica en la dirección opuesta y se demuestra la doble implicación. $\square$

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

5.1. Conclusiones

En este trabajo nos propusimos extender las herramientas de la Teoría de Instituciones para poder capturar la relación entre dos lenguajes lógicos cuando ninguno es capaz de subsumir completamente al otro, es decir, la noción de traducción parcial entre lenguajes lógicos. Los resultados principales del trabajo, presentados en la Sección 3, muestran una formalización de está noción en el contexto de la Teoría de Instituciones. En particular muestran también que, para preservar información relevante acerca de relaciones entre reductos como se propone en la Definición 33 de *comorfismo parcial fuerte*, son necesarias ciertas condiciones fuertes sobre las estructura de las categorías de modelos de las lógicas involucradas. Luego, las construcciones concretas presentadas en el apartado 3.2 nos dan la garantía de que este tipo de relaciones existen y pueden ser construidas a partir de relaciones ya presentes en la Teoría de Instituciones.

Por último, el caso de estudio presentado en la Sección 4 muestra la forma en que una conocida relación entre dos lenguajes lógicos puede ser formalizada a partir del uso de nuestra definición de co-morfismo parcial. En este punto vale la pena aclarar que, si bien el fragmento de la lógica de origen que podemos traducir es un lenguaje lógico estudiado en sí mismo (nos referimos a RA), nuestras definiciones y el caso de estudio presentado nos dan la pauta de que estas relaciones podrían definirse incluso cuando el sublenguaje no sea de ningún interés particular salvo por la propiedad de ser traducible en forma equipolente.

5.2. Preguntas de investigación que se abren a partir de este trabajo

A continuación presentaremos algunas preguntas de investigación que se ponen de relieve a partir del presente trabajo y que, o bien han sido resueltas pero no forman parte de este, o demandarán un esfuerzo futuro en ser respondidas.

5.2.1. ¿Las instituciones junto con los comorfismos parciales concretos forman una categoría?¿Cuáles son sus propiedades estructurales?

La primera pregunta que cabe hacerse una vez que se definen ciertas relaciones entre objetos de determinada característica es si estos forman una categoría o no. Al mismo tiempo, una vez demostrado que estos forman una categoría cabe preguntarse acerca de las propiedades estructurales de esta.

Sabemos que la respuesta a la primera pregunta es afirmativa aunque dicho resultado, si bien desarrollado por el autor del presente trabajo, en colaboración con su director y sus colegas Thomas S.E. Maibaum y Fabio Gadducci, no forma parte del presente trabajo. La demostración de dicha propiedad se obtiene como consecuencia de las siguientes observaciones[1]: 1.- Existen los comorfismos parciales identidad, 2.- La composición de comorfismos

[1] Así como no ahondaremos sobre la demostración de las propiedades, tampoco incluiremos las defini-

arroja como resultado un comorfismo, 3.- Los comorfismos "inversibles" son *monic*, 4.- La composición de comorfismos monic arroja como resultado un comorfismo monic, y 5.- La categoría formada por las instituciones y los comorfismos es completa,

La segunda pregunta requiere una elaboración más profunda y una posible respuesta podría provenir de estudiar la posibilidad de generalizar las propiedades de completitud y cocompletitud de las categorías formadas por las instituciones junto con morfismos y comorfismos.

5.2.2. Reestructuración de lenguajes

En el diseño y análisis de artefactos de software en la ingeniería de software, se suele asumir que los elementos están especificados en un lenguaje particular fijo de antemano. Así, cualquier modificación sobre el lenguaje de especificación y diseño, es considerada como *offline* y fuera de dicho proceso. Nuestra definición de comorfimo parcial concreto podría habilitar la posibilidad de reestructurar el lenguaje heterogéneo subyacente a partir de la aplicación de la construcción *double pushout*, de acuerdo a lo presentado en la teoría de *adhesive categories* presentada por Lack en [LS05]. Más precisamente [GL12, Theorem A] sirviendo el propósito de demostrar que los pushouts elegidos en la definición son preservados por los *pullbacks*.

5.2.3. Morfismos y comorfismo basados en traducciónes de presentaciones de teorías

A pesar de su flexibilidad, los comorfismos parciales no cubren todos los distintos tipos de relaciones entre lógicas. Un ejemplo de esto es el hecho de que la fórmula $\bigwedge_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i$ de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ puede ser traducida a la presentación de teoría $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ en $\mathsf{FOL}_=$. Entonces, es preciso discutir cómo los avances mencionados sobre heterogeneidad y adhesividad se pueden extender al considerar una generalización de los comorfismos $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ que difiere en el modo en que las fórmulas son traducidas entre los lenguajes lógicos, esto es, no recurriendo a una familia natural de funciones $\rho^{Sen}_{\Sigma} : \mathbf{Sen}(\Sigma) \to \rho^{Sig} \circ \mathbf{Sen}'(\Sigma)$ en la que cada Σ-fórmula en $\mathbb{I}$ es traducida a una única $\rho^{Sig}(\Sigma)$-fórmula en $\mathbb{I}'$, sino permitiendo que conjuntos de fórmulas sean traducidos a conjuntos de fórmulas de manera que se preserve semántica.

5.2.4. *Flattening* de *Grothendieck institutions* con morfismos y comorfismos parciales

Las herramientas heterogéneas se basan, en su mayoría, en el uso de *Grothendieck institutions* [Dia08] como descripción formal del lenguaje heterogéneo. Entonces nuestro trabajo requiere explorar una definición alternativa de *flattening* que sea compatible con traducciones parciales.

ciones necesarias como la de morfismo *monic* o categoría completa.

Bibliografía

[AC91] Egidio Astesiano and Maura Cerioli. Relationships between logical frameworks. In Michel Bidoit and Christine Choppy, editors, *Selected Papers from the 8th Workshop on Specification of Abstract Data Types Joint with the 3rd COMPASS Workshop on Recent Trends in Data Type Specification*, volume 655 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 126–143. Springer-Verlag, 1991.

[BAMP81] Mordechai Ben-Ari, Zohar Manna, and Amir Pnueli. The temporal logic of branching time. In *Proceedings of the 8th. ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 164–176, Williamsburg, Virginia, 1981. Association for the Computer Machinery, ACM Press.

[BdV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal logic.* Number 53 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[CALM10] Pablo Castro, Nazareno M. Aguirre, Carlos G. Lopez Pombo, and Tomas S. E. Maibaum. Towards managing dynamic reconfiguration of software systems in a categorical setting. In Ana Cavalcanti, David D'eharbe, Marie-Claude Gaudel, and Jim Woodcock, editors, *Proceedings of Theoretical Aspects of Computing - ICTAC 2010, 7th International Colloquium*, volume 6255 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 306–321, Natal, Rio Grande do Norte, Brazil, September 2010. Springer-Verlag.

[CALM13] Pablo Castro, Nazareno M. Aguirre, Carlos G. Lopez Pombo, and Tomas S. E. Maibaum. A categorical approach to structuring and promoting z specifications. In Corina S. Pasareanu and Gwen Salaün, editors, *Proceedings of 9th International Symposium Formal Aspects of Component Software – FACS 2012*, volume 7684 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 73–91. Springer-Verlag, 2013.

[Cer93] Maura Cerioli. *Relationships between Logical Formalisms.* PhD thesis, Dipartamento di informatica, Universitá degli studi di Pisa, 1993. Ph.D. Thesis: TD-4/93, Dottorato di ricerca in informatica, Universitá di Pisa-Genova-Udine.

[CLM12] Valentin Cassano, Carlos G. Lopez Pombo, and Tomas S. E. Maibaum. Entailment systems for default reasoning. In Narciso Martí-Oliet and Miguel Palomino Tarjuelo, editors, *Proceedings of 21st International Workshop on Algebraic Development Techniques (WADT 2012)*, pages 28–30, Salamanca, Spain, June 2012.

[DF02] Răzvan Diaconescu and Kokichi Futatsugi. Logical foundations of CafeOBJ. *Theoretical Computer Science*, 285(2):289–318, 2002.

[Dia98] Răzvan Diaconescu. Extra theory morphisms for institutions: logical semantics for multi-paradigm languages. *Applied Categorical Structures*, 6(4):427–453, 1998.

[Dia02] Răzvan Diaconescu. Grothendieck institutions. *Applied Categorical Structures*, 10(4):383–402, 2002.

[Dia08] Răzvan Diaconescu, editor. *Institution-independent Model Theory*, volume 2 of *Studies in Universal Logic*. Birkhäuser, 2008.

[End72] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 1972.

[FBH97] Marcelo F. Frias, Gabriel A. Baum, and Armando M. Haeberer. Fork algebras in algebra, logic and computer science. *Fundamenta Informaticae*, 32:1–25, 1997.

[Fia05] José Luis Fiadeiro. *Categories for software engineering*. Springer-Verlag, 2005.

[FL06] Marcelo F. Frias and Carlos G. Lopez Pombo. Interpretability of first-order linear temporal logics in fork algebras. *Journal of Logic and Algebraic Programming*, 66(2):161–184, 2006.

[Fri02] Marcelo F. Frias. *Fork algebras in algebra, logic and computer science*, volume 2 of *Advances in logic*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2002.

[GB84] Joseph A. Goguen and Rod M. Burstall. Introducing institutions. In Edmund M. Clarke and Dexter Kozen, editors, *Proceedings of the Carnegie Mellon Workshop on Logic of Programs*, volume 184 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 221–256. Springer-Verlag, 1984.

[GB92] Joseph A. Goguen and Rod M. Burstall. Institutions: abstract model theory for specification and programming. *Journal of the ACM*, 39(1):95–146, 1992.

[GL12] Richard Garner and Stephen Lack. On the axioms for adhesive and quasiadhesive categories. *Theory and Applications of Categories*, 27(3):27–46, 2012.

[GR02] Joseph A. Goguen and Grigore Roşu. Institution morphisms. *Formal Aspects of Computing*, 13(3-5):274–307, 2002.

[HKT00] David Harel, Dexter Kozen, and J. Tiuryn. *Dynamic logic*. Foundations of Computing. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2000.

[JT51] Bjarni Jónnson and Alfred Tarski. Boolean algebra with operators, part I. *American Journal of Mathematics*, 73:891–939, 1951.

[JT52] Bjarni Jónnson and Alfred Tarski. Boolean algebra with operators, part II. *American Journal of Mathematics*, 74:127–162, 1952.

[Kle51] Stephen C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. Memorandum RM-704, RAND Corporation, 1951. Available at `https://www.rand.org/pubs/research_memoranda/RM704.html`.

[Kle56] Stephen C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In Claude E. Shannon and John McCarthy, editors, *Automata studies*, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956. Originally presented in [Kle51] and used by permission of The RAND Corporation.

[Lib04] Leonid Libkin. *Elements Of Finite Model Theory (Texts in Theoretical Computer Science. An Eatcs Series)*. Springer-Verlag, 2004.

[Löw15] Leopold Löwenheim. Uber Möglichkeiten im Relativkalkul. *Mathematische Annalen*, 76:447–470, 1915.

[LS05] Stephen Lack and Pawel Sobocinski. Adhesive and quasiadhesive categories. *Theoretical Informatics and Applications*, 39(3):511–545, 2005.

[Lyn50] Roger C. Lyndon. The representation of relation algebras, part I. *Annals of Mathematics (series 2)*, 51(2):707–729, 1950.

[McL71] Saunder McLane. *Categories for working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1971.

[Mes89] José Meseguer. General logics. In Heinz-Dieter Ebbinghaus, José Fernandez-Prida, Manuel Garrido, Daniel Lascar, and Mario Rodríguez Artalejo, editors, *Proceedings of the Logic Colloquium '87*, volume 129, pages 275–329, Granada, Spain, 1989. North Holland.

[MML07] Till Mossakowski, Christian Maeder, and Klaus Luttich. The heterogeneous tool set, Hets. In Orma Grumberg and Michael Huth, editors, *Proceedings of the 13th. International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS 2007)*, volume 4424 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 519–522, Braga, Portugal, April 2007. Springer-Verlag.

[Mon64] J. Donald Monk. On representable relation algebras. *Michigan Mathematical Journal*, 11:207–210, 1964.

[Mos96] Till Mossakowski. Different types of arrow between logical frameworks. In Friedhelm Meyer and Burkhard Monien, editors, *Proceedings of 23rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP '96)*, volume 1099 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 158–169. Springer-Verlag, 1996.

[Mos05] Till Mossakowski. Heterogeneous theories and the heterogeneous tool set. In Yannis Kalfoglou, Marco Schorlemmer, Amir P. Sheth, Steffen Staab, and Mike Uschold, editors, *Semantic Interoperability and Integration*, number 04391 in Dagstuhl Seminar Proceedings, Dagstuhl, Germany, 2005. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum für Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Germany.

[MT09] Till Mossakowski and Andrzej Tarlecki. Heterogeneous logical environments for distributed specifications. In Andrea Corradini and Ugo Montanari, editors, *Proceedings of 19th International Workshop in Algebraic Development Techniques*, volume 5486 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 266–289, Pisa, Italy, June 2009. Springer-Verlag.

[MW97] Alfio Martini and Uwe Wolter. A systematic study of mappings between institutions. In Francesco Parisi-Presicce, editor, *Proceedings of the 12th. International Workshop on Recent Trends in Algebraic Development Techniques WADT 1997*, volume 1376 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 300–315, Tarquinia, Italy, June 1997. Springer-Verlag.

[MW98] Alfio Martini and Uwe Wolter. A single perspective on arrows between institutions. In Armando M. Haeberer, editor, *Proceedings of the 7th. International Conference on Algebraic Methodology And Software Technology – AMAST 1998*, volume 1548 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 486–501, Amazonia, Brasil, January 1998. Springer-Verlag.

[Pie91] Benjamin C. Pierce. *Basic category theory for computer scientists.* MIT Press, 1991.

[Pnu81] Amir Pnueli. The temporal semantics of concurrent programs. *Theoretical Computer Science*, 13(1):45–60, 1981.

[RR88] Edmund Robinson and Giuseppe Rosolini. Categories of partial maps. *Information and computation*, 79(2):95–130, 1988.

[RW13] Bertrand Russell and Alfred North Whitehead. *Principia mathematica*, volume 1–3. Cambridge University Press, 1910–1913.

[Tar41] Alfred Tarski. On the calculus of relations. *Journal of Symbolic Logic*, 6(3):73–89, September 1941.

[Tar96] Andrzej Tarlecki. Moving between logical systems. In Magne Haveraaen, Olaf Owe, and Ole-Johan Dahl, editors, *Selected papers from the 11th Workshop on Specification of Abstract Data Types Joint with the 8th COMPASS Workshop on Recent Trends in Data Type Specification*, volume 1130 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 478–502. Springer-Verlag, 1996.

[Tar98] Andrzej Tarlecki. Structural properties of some categories of institutions, 1998. Revised version of its original version of 1996.

[Tar06] Andrzej Tarlecki. Limits and colimits in some categories of institutions, 2006. Revised and extended version of [Tar96].

[TG87] Alfred Tarski and Steven Givant. *A formalization of set theory without variables.* American Mathematical Society Colloqium Publications, Providence, RI, USA, 1987.

[VHF95a] Paulo A.S. Veloso, Armando M. Haeberer, and Marcelo F. Frias. Fork algebras as algebras of logic. *Abstracts of the Logic Colloquium '94*, page 127, July 1995. Also in [VHF95b].

[VHF95b] Paulo A.S. Veloso, Armando M. Haeberer, and Marcelo F. Frias. Fork algebras as algebras of logic. *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(2):265–266, 1995. Also in [VHF95a].

5. LEMAS Y RESULTADOS USADOS EN LAS DEMOSTRACIONES

En esta sección presentaremos algunos lemas y resultados que fueron necesarios para poder demostrar las propiedades estudiadas en el presente trabajo.

5.3. Lemas utilizados en la construcción de comorfismo parcial débil

A partir de ahora llamaremos $\mathbb{I}^0$ a la estructura $\langle \mathsf{Sign}^0, \mathbf{Sen}^0, \mathbf{Mod}^0, \{\models^0{}_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}\rangle$ tal que:

- $\mathsf{Sign}^0 = Img(\sigma^{Sign})$,
- $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) = Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''})$ para $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$, donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$, y $\mathbf{Sen}^0(\delta) = \mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}$ para $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$,
- $\mathbf{Mod}^0 = \mathbf{Mod}|_{\mathsf{Sign}^0}$
- $\models^0{}_\Sigma$ es la restricción de $\models_\Sigma$ a las fórmulas de $|\mathbf{Sen}^0(\Sigma)|$, para $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$

Donde $\mathbb{I}, \mathbb{I}'$ e $\mathbb{I}''$ son las instituciones $\langle \mathsf{Sign}, \mathbf{Sen}, \mathbf{Mod}, \{\models_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}|}\rangle$, $\langle \mathsf{Sign}', \mathbf{Sen}', \mathbf{Mod}', \{\models'_{\Sigma'}\}_{\Sigma' \in |\mathsf{Sign}'|}\rangle$ y $\langle \mathsf{Sign}'', \mathbf{Sen}'', \mathbf{Mod}'', \{\models''_{\Sigma''}\}_{\Sigma'' \in |\mathsf{Sign}''|}\rangle$ respectivamente, y $\rho : \mathbb{I}'' \to \mathbb{I}'$ es un comorfismo entre instituciones y $\sigma : \mathbb{I}'' \hookrightarrow \mathbb{I}$ es un comorfismo entre instituciones que cumple las siguientes restricciones:

- σ^{Sign} es functor inyectivo en objetos y faithful,
- $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ es función inyectiva, para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$,
- $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}$ es functor suryectivo en objetos y full sobre $Img(\rho^{Mod}_{\Sigma''})$, para todo $\Sigma'' \in \mathsf{Sign}''$,

También γ a la estructura $\gamma = \langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \gamma^{Mod}\rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ definida como sigue:

- $\gamma^{Sign} = \rho^{Sign} \circ (\sigma^{Sign})^{-1}$
- $\gamma^{Sen}_\Sigma = \rho^{Sen}_{\Sigma''} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}$ para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$, donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$,
- $\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}') = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A}\rangle$ para todo $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$ y $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma)|$. Donde $\mathcal{O} = \left\{ \mathcal{M} \;\middle|\; \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \right\}$ y $\mathcal{A} = \left\{ id_{\mathcal{M}} \;\middle|\; \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \right\}$.

Lema 22. $\mathbb{I}^0$ *es Institución.*

Demostración. Por Lema 1, como σ^{Sign} es inyectivo en objetos y faithful tenemos que $Img(\sigma^{Sign})$ es categoría, y por lo tanto Sign^0 también lo es. Por Lema 24 tenemos que $\mathbf{Sen}^0$ efectivamente se comporta como un functor. En la definición de *restricción de functor* vemos que $\mathbf{Mod^0}$ preserva las propiedades del functor original, y por lo tanto, se comporta como un functor. $\{\models^0{}_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}$ es una familia de relaciones binarias $\models^0{}_\Sigma \subseteq |\mathbf{Mod^0}(\Sigma)| \times$

$\mathbf{Sen}^0(\Sigma)$. Como $\mathbb{I}$ es institución satisface la condición de $\models$-invarizanza, por lo tanto, como $\mathbb{I}^0$ se obtiene a partir de una restricción de $\mathbb{I}$, se puede mostrar que satisface la condición de $\models^0$-invarizanza. $\square$

Lema 23. $\mathbb{I}^0$ *es subinstitución de* $\mathbb{I}$.

Demostración. Como $\sigma^{Sign} : \mathsf{Sign}'' \to \mathsf{Sign}$ es functor, del Lema 1 se deduce que $\mathsf{Sign}^0 = Img(\sigma^{Sign})$ es subcategoría de Sign. Del Lema 24 se sigue que $\mathbf{Sen^0}$ es subfunctor de $\mathbf{Sen}$. Como $\mathbf{Mod^0}$ es la restricción de dominio de $\mathbf{Mod}$ se puede mostrar que es subfunctor de $\mathbf{Mod}$. Por último, como $\models^0$ es una restricción de $\models$, se puede mostrar que ${\models^0}_\Sigma \subseteq {\models}_\Sigma$ para $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$. $\square$

Lema 24. $\mathbf{Sen}^0$ *es functor, y en particular es subfunctor de* $\mathbf{Sen}\big|_{\mathsf{Sign}^0}$.

Demostración. Veamos primero que para cada objeto en el dominio de $\mathbf{Sen}^0$ el resultado es un objeto en Set. Dado $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$ se puede ver que $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) \in |\mathsf{Set}|$ ya que la imagen de $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ es un conjunto.

Veamos que se preservan las identidades, es decir que $\mathbf{Sen}^0(id_\Sigma) = id_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma)}$. Por definición tenemos que $\mathbf{Sen}^0(id_\Sigma) = \mathbf{Sen}(id_\Sigma)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma)}$. Como $\mathbf{Sen}$ es functor tenemos que $\mathbf{Sen}(id_\Sigma) = id_{\mathbf{Sen}(\Sigma)}$, esta es la función identidad para el conjunto $\mathbf{Sen}(\Sigma)$. Notar que $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$ ya que $\mathbf{Sen}^0(\Sigma)$ está definida como la imagen de una función cuyo codominio es $\mathbf{Sen}(\Sigma)$. Teniendo esto en cuenta tenemos que la función $\mathbf{Sen}^0(id_\Sigma)$ es la restricción de la función identidad para el conjunto $\mathbf{Sen}(\Sigma)$ al dominio $\mathbf{Sen}^0(\Sigma)$. Esta es la función identidad para el conjunto $\mathbf{Sen}^0(\Sigma)$, es decir $id_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma)}$.

Veamos que si $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ entonces $\mathbf{Sen}^0(\delta) : \mathbf{Sen}^0(\Sigma_1) \to \mathbf{Sen}^0(\Sigma_2) \in ||\mathsf{Set}||$. Por definición tenemos que $\mathbf{Sen}^0(\delta) = \mathbf{Sen}(\delta)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}$. Como $\mathbf{Sen}$ es functor tenemos que $\mathbf{Sen}(\delta) : \mathbf{Sen}(\Sigma_1) \to \mathbf{Sen}(\Sigma_2) \in ||\mathsf{Set}||$. Por la restricción del functor es claro que el dominio de $\mathbf{Sen}^0(\delta)$ es $\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)$, entonces basta ver que se puede definir $\mathbf{Sen}^0(\Sigma_2)$ como codominio. Esto sigue de que, por Lema 25, tenemos que $Img(\mathbf{Sen}(\delta)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}) \subseteq \mathbf{Sen}^0(\Sigma_2)$.

Veamos ahora que $\mathbf{Sen}^0$ preserva composición. Sea $\delta_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ y $\delta_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_3 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{Sen}^0(\delta_2 \circ \delta_1) & = & \mathbf{Sen}(\delta_2 \circ \delta_1)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)} & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^0 \text{ }] \\
& = & (\mathbf{Sen}(\delta_2) \circ \mathbf{Sen}(\delta_1))\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)} & [\text{ pues } \mathbf{Sen} \text{ es functor }] \\
& = & \mathbf{Sen}(\delta_2) \circ \mathbf{Sen}(\delta_1)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)} & \\
& = & \mathbf{Sen}(\delta_2)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_2)} \circ \mathbf{Sen}(\delta_1)\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)} & [\text{ por Lema 25 tenemos que} \\
& & & \quad Img(\mathbf{Sen}(\delta_1))\big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}) \subseteq \mathbf{Sen}^0(\Sigma_2) \text{ }] \\
& = & \mathbf{Sen}^0(\delta_2) \circ \mathbf{Sen}^0(\delta_1) & [\text{ por definición de } \mathbf{Sen}^0 \text{ }]
\end{array}$$

Probemos ahora que $\mathbf{Sen}^0$ es subfunctor de $\mathbf{Sen}\big|_{\mathsf{Sign}^0}$. Sea una signatura $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|$ tenemos que $\mathbf{Sen}^0(\Sigma) = Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''})$ donde $\Sigma'' = {\sigma^{Sign}}^{-1}(\Sigma)$. Tenemos además que el codominio de $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ es $\mathbf{Sen}(\Sigma)$, por lo tanto $Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) \subseteq \mathbf{Sen}(\Sigma)$. Como Σ está en Sign^0 esto es lo mismo que $Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) \subseteq \mathbf{Sen}\big|_{\mathsf{Sign}^0}(\Sigma)$.

Sea un morfismo $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ tenemos que $\mathbf{Sen}^0(\delta) = \mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}$. Como δ está en $||\mathsf{Sign}^0||$ tengo que, en particular, $\mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)} = (\mathbf{Sen}\big|_{\mathsf{Sign}^0}(\delta))\Big|_{\mathbf{Sen}^0(\Sigma_1)}$. □

Para poder mostrar la conmutatividad de la familia de funciones γ^{Sen}, y así poder probar que es una transformación natural, vamos a necesitar plantear la composición de funciones que indica el diagrama de la Definición 17. Para que esa composición tenga sentido necesitamos probar la siguiente inclusión.

Lema 25. *Sea $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$, entonces $Img(\mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)}) \subseteq \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2)$.*

Demostración. Como σ^{Sen} es transformación natural tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) \arrow[r, "\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2}"] & \mathbf{Sen}(\Sigma_2) & & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[r, "\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}"'] \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"] \arrow[ur, phantom, "\odot"] & \mathbf{Sen}(\Sigma_1) \arrow[u, "\mathbf{Sen}(\delta)"'] & & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar el lema por reducción al absurdo. Supongamos $Img(\mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)}) \nsubseteq \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2)$. Entonces existe una fórmula $\alpha \in \mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)$ tal que $\mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) \notin \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2)$. De la definición de $\mathbf{Sen^0}$ se sigue que $\alpha \in |Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})|$. Esto quiere decir que existe otra fórmula $\alpha'' \in \mathbf{Sen}''(\Sigma''_1)$ tal que $\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'') = \alpha$. Como el diagrama que presentamos anteriormente conmuta, si tomamos el objeto α'' tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2}(\mathbf{Sen}''(\delta'')(\alpha'')) &= \mathbf{Sen}(\delta)(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'')) && [\text{ pues } \sigma^{Sen} \text{ es transformación natural }] \\
&= \mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) && [\text{ pues } \sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'') = \alpha\ ]
\end{aligned}$$

Pero entonces $\mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) \in Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})$. Por definición de $\mathbf{Sen^0}$ esto quiere decir que $\mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) \in \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2)$, lo cual es absurdo. □

El siguiente lema nos asegura la conmutatividad del diagrama que plantea la Definición 17 para la familia de funciones γ^{Sen}, y eso nos va a permitir mostrar que se comporta como una transformación natural.

Lema 26. *Sea $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$, entonces $\gamma^{Sen}_{\Sigma_2} \circ \mathbf{Sen^0}(\delta) = \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\delta)) \circ \gamma^{Sen}_{\Sigma_1}$.*

Demostración. Como σ^{Sen} es transformación natural tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) \arrow[r, "\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2}"] & \mathbf{Sen}(\Sigma_2) & & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[r, "\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}"'] \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"] \arrow[ur, phantom, "\odot"] & \mathbf{Sen}(\Sigma_1) \arrow[u, "\mathbf{Sen}(\delta)"'] & & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis tenemos que cada $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}$ es inyectiva, por lo tanto podemos tomar la inversa parcial y obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) & Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2}) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1}"'] & & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"] & Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})^{-1}"] \arrow[u, "\mathbf{Sen}(\delta)"'] & & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Por Lema 25 tenemos que $Img(\mathbf{Sen}(\delta)|_{\mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)}) \subseteq \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2)$ y además $\mathbf{Sen^0}(\Sigma_1) = Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})$ y $\mathbf{Sen^0}(\Sigma_2) = Img(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})$. Esto nos asegura que es correcto el target planteado para la flecha $\mathbf{Sen}(\delta)$ en este nuevo diagrama. Considerando la definición de $\mathbf{Sen^0}$ obtenemos esta versión del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) & \mathbf{Sen^0}(\Sigma_2) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1}"'] & & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"] & \mathbf{Sen^0}(\Sigma_1) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})^{-1}"] \arrow[u, "\mathbf{Sen^0}(\delta)"'] & & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que este diagrama conmuta. Sea $\alpha \in \mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)$, por un lado tenemos que

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{Sen}''(\delta'') \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})^{-1}(\alpha) & = & \mathbf{Sen}''(\delta'')(\alpha'') & [\text{ con } \alpha'' \in \mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \\
& & & \text{ y } \sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'') = \alpha\ ]
\end{array}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{array}{rcll}
(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1} \circ \mathbf{Sen^0}(\delta)(\alpha) & = & (\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1} \circ \mathbf{Sen^0}(\delta)(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'')) & [\text{ pues } \alpha = \sigma^{Sen}_{\Sigma''_1}(\alpha'')\ ] \\
& = & (\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1}((\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2}) \circ \mathbf{Sen}''(\delta'')(\alpha'')) & [\text{ pues } \sigma^{Sen} es \\
& & & \text{ transformación natural }] \\
& = & \mathbf{Sen}''(\delta'')(\alpha'') &
\end{array}$$

Como ambas composiciones dan el mismo objeto obtenemos que el diagrama conmuta. Por otro lado como ρ^{Sen} es transformación natural tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma''_2)) & \mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) \arrow[l, "\rho^{Sen}_{\Sigma''_2}"'] & & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma''_1)) \arrow[u, "\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\delta''))"] \arrow[ur, phantom, "\odot"] & \mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[l, "\rho^{Sen}_{\Sigma''_1}"] \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"'] & & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Como γ^{Sen} está definido a partir de la familia de funciones $\gamma^{Sen}_{\Sigma} = \rho^{Sen}_{\Sigma''} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}$ el diagrama que caracteriza la transformación natural surge de la composición de los dos últimos diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma''_2)) & \mathbf{Sen}''(\Sigma''_2) \arrow[l, "\rho^{Sen}_{\Sigma''_2}"'] & \mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\Sigma_2) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1}"'] & \Sigma''_2 \\
\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\Sigma''_1)) \arrow[u, "\mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\delta''))"] \arrow[ur, phantom, "\odot"] & \mathbf{Sen}''(\Sigma''_1) \arrow[l, "\rho^{Sen}_{\Sigma''_1}"] \arrow[u, "\mathbf{Sen}''(\delta'')"] \arrow[ur, phantom, "\odot"] & \mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\Sigma_1) \arrow[l, "(\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})^{-1}"] \arrow[u, "\mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\delta)"'] & \Sigma''_1 \arrow[u, "\delta''"']
\end{tikzcd}$$

Como ambos diagramas conmutan se puede deducir que este nuevo diagrama también conmuta. Entonces podemos afirmar que $\rho^{Sen}_{\Sigma''_2} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''_2})^{-1} \circ \mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\delta) = \mathbf{Sen}'(\rho^{Sign}(\delta'')) \circ \rho^{Sen}_{\Sigma''_1} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''_1})^{-1}$. Que por definición de γ es lo mismo que $\gamma^{Sen}_{\Sigma_2} \circ \mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\delta) = \mathbf{Sen}'(\gamma^{Sign}(\delta)) \circ \gamma^{Sen}_{\Sigma_1}$. □

Los siguientres tres lemas nos permiten mostrar la satisfacción de las condiciones que impone la Definición 32. Notar que son las mismas condiciones que impone la Definición 33 y por lo tanto también serán de utilidad en la construcción del comorfismo parcial fuerte.

Lema 27 (Satisfacción de la Condición 1 de la Definición 32)**.** *Para todo* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{0}}|, \mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma)|$ *vale que* $\gamma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}') \subseteq \mathbf{Mod}(\Sigma)$.

Demostración. Tenemos que los modelos $\mathcal{M} \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}')|$ son aquellos que verifican $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$. Es decir que, necesariamente vale que $\mathcal{M} \in |Dom(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})|$, y además $|Dom(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})| = |\mathbf{Mod}(\Sigma)|$. Luego tenemos que los únicos morfismos en $||\gamma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}')||$ son las identidades de los modelos, como $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ es categoría las identidades necesariamente están. □

Lema 28 (Satisfacción de la Condición 2 de la Definición 32)**.** *Para todo* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^{\mathsf{0}}|, \alpha \in |\mathbf{Sen}^{\mathbf{0}}(\Sigma)|, \mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma)|$ *vale que: para todo modelo* $\mathcal{M}$ *en* $\gamma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}')$ *se satisface que* $\mathcal{M} \models_{\Sigma} \alpha$ *sii* $\mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_{\Sigma}(\alpha)$.

Demostración. Sea $\Sigma'' \in |\mathsf{Sign}''|$ tal que $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$. Sea $\alpha'' \in \mathbf{Sen}''(\Sigma'')$ tal que $\alpha'' = (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\alpha)$. Por Lema 27 tengo que $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(\Sigma)$, luego como σ es comorfismo se preserva la condición de satisfacción. Por lo tanto tenemos que $\mathcal{M} \models_{\sigma^{Sign}(\Sigma'')} \sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\alpha'')$ *sii* $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) \models''_{\Sigma''} \alpha''$. Reemplazando Σ'' y α'' obtenemos:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models_{\Sigma} \alpha & sii\ \ \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) \models''_{(\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)} (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\alpha) & [\text{ pues } \Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma) \text{ y } \\
& & \alpha'' = (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\alpha)\ ] \\
& sii\ \ \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \models''_{(\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)} (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\alpha) & [\text{ pues como } \mathcal{M} \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma}(\mathcal{M}')| \\
& & \text{vale } \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')\ ] \\
& sii\ \ \mathcal{M}' \models'_{\rho^{Sign}((\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma))} \rho^{Sen}_{\Sigma''}((\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\alpha)) & [\text{ por condición de satisfacción} \\
& & \text{del comorfismo } \rho\ ] \\
& sii\ \ \mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_{\Sigma}(\alpha) & [\text{ aplicando definición de } \gamma^{Sign} \text{ y } \gamma^{Sen}\ ]
\end{array}
$$

□

5.4. Lemas utilizados en la construcción de comorfismo parcial fuerte

A partir de ahora llamaremos γ a la estructura $\langle \gamma^{Sign}, \gamma^{Sen}, \{\gamma^{Mod}_{\Sigma}\}_{\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|}, \{\gamma^{Mod}_{\sigma}\}_{\sigma \in ||\mathsf{Sign}^0||} \rangle : \mathbb{I} \nrightarrow \mathbb{I}'$ definida como sigue:

- γ^{Sign} y γ^{Sen} se definen tal como fueron presentados en la demostración del Teorema 2.
- $\gamma^{Mod}_{\Sigma} = \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} \circ \rho^{Mod}_{\Sigma''}$ donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$ y $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} : Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''}) \to \mathsf{Cat}$ se define de la siguiente manera:
  - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}'') = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A} \rangle$ para todo $\mathcal{M}'' \in |Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})|$.
    Donde $\mathcal{O} = \left\{ \mathcal{M} \;\middle|\; \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'' \right\}$ y $\mathcal{A} = \left\{ id_{\mathcal{M}} \;\middle|\; \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'' \right\}$
  - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_2) : \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1) \to \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)$, para todo $h'' \in ||Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})||$, es un functor que se define de la siguiente manera:
    - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h)(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$ para todo $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$. Donde $\mathcal{M}_2$ es el único objeto en $|\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)|$ que, por hipótesis verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2) = h''$.
    - $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h)(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathcal{M}_2}$ para todo $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$. Donde $\mathcal{M}_2$ es el único objeto en $|\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)|$ que, por hipótesis verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2) = h''$.
- $(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'} = \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})\big|_{\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}')}$ para todo $\mathcal{M}' \in |(\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}})(\Sigma_2)|$ y $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$.

Lema 29. $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} : Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''}) \to \mathsf{Cat}$ *es functor.*

Demostración. Por Lema 1 tenemos que $Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})$ es categoría. Sea $\mathcal{M}''_1 \in Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})$ la definición nos dice que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)$ está conformado por el conjunto de objetos preimagen de $\mathcal{M}''_1$, y las identidades asociadas a los objetos. Por lo tanto, se puede mostrar que un conjunto de objetos y el conjunto de identidades de estos objetos se comportan como una categoría, en particular una categoría discreta. Entonces tenemos que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1) \in |\mathsf{Cat}|$.

Dado $h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_2 \in ||Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})||$ la definición nos dice que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'') : \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1) \to \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)$ es el functor caracterizado por el conjunto de flechas preimagen de h''. Veamos por qué esto define efectivamente un functor. Para $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$, por hipótesis existe un único $\mathcal{M}_2 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_2)|$ tal que $h_0 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \in ||\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')||$ y $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h_0) = h''$. La definición de $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}$ justamente nos dice que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$. Por otro lado, como $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)$ es una categoría discreta sus únicos morfismos son $id_{\mathcal{M}}$. La definición de $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}$ nos dice que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathcal{M}_2}$. De esto se deduce que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')$ preserva identidades y que preserva las únicas composiciones de la categoría, a saber, multiples aplicaciones de la identidad de un mismo objeto. Por lo tanto $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')$ es functor, es decir $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'') \in ||\mathsf{Cat}||$.

Resta ver que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}$ preserva composición. Sean $h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_2$ y $g'' : \mathcal{M}''_2 \to \mathcal{M}''_3 \in ||Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})||$ veamos que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'' \circ h'') = \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'') \circ \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')$. Por hipótesis, tenemos que para todo $\mathcal{M}_1 \in |\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(\mathcal{M}''_1)|$ existe un único $\mathcal{M}_2$ tal que hay un $h_0 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \in ||\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')||$ y $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h_0) = h''$. Dado ese $\mathcal{M}_2$, por hipótesis tenemos, además, que existe un único $\mathcal{M}_3$ tal que hay un $g_0 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \in ||\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')||$ y $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(g_0) = g''$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{rcll}\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'') \circ \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')(\mathcal{M}_1) & = & \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'')(\mathcal{M}_2) & [\text{ pues } h_0 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \text{ y } \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(h_0) = h'' \ ] \\ & = & \mathcal{M}_3 & [\text{ pues } g_0 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \text{ y } \sigma^{Mod}_{\Sigma''}(g_0) = g'' \ ]\end{array}$$

De manera análoga se llega a que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'') \circ \overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(h'')(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathcal{M}_3}$. Como $\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')$ es categoría podemos afirmar que $g_0 \circ h_0 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3 \in ||\mathbf{Mod} \circ \sigma^{Sign}(\Sigma'')||$ y como $Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})$ es categoría tenemos además que $g'' \circ h'' : \mathcal{M}''_1 \to \mathcal{M}''_3 \in ||Img(\sigma^{Mod}_{\Sigma''})||$. Entonces por hipótesis tenemos que $g_0 \circ h_0$ es el único morfismo desde $\mathcal{M}_1$ hasta $\mathcal{M}_3$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(g_0 \circ h_0) = g'' \circ h''$. Entonces por definición de $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}$ tenemos que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'' \circ h'')(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_3$ y que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}}(g'' \circ h'')(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathcal{M}_3}$.

□

A continuación mostramos que la categoría de $\mathbb{I}^0$-reductos de un modelo $\mathcal{M}'$ está cerrada por las $\mathbf{Sen}^0$-propiedades que satisface.

Lema 30. *Para todo* $\Sigma \in |\mathsf{Sign}^0|, \alpha \in |\mathbf{Sen^0}(\Sigma)|, \mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\Sigma)|$ *vale que: para todo modelo* $\mathcal{M}$ *en* $\mathbf{Mod}(\Sigma)$*, si vale que* $\mathcal{M} \models_\Sigma \alpha$ *sii* $\mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_\Sigma(\alpha)$*, entonces* $\mathcal{M} \in |\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}')|$.

Demostración. Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Asumamos que existe $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(\Sigma)$ que cumple la condición de satisfactibilidad para toda fórmula α, pero que verifica $\mathcal{M} \notin |\gamma^{Mod}_\Sigma(\mathcal{M}')|$. Por definición de γ^{Mod}_Σ esto significa que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) \neq \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$ donde $\Sigma'' = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma)$. Notar que tanto $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M})$ como $\rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$ son modelos de la institución $\mathbb{I}''$, ambos pertenecen a $|\mathbf{Mod}''(\Sigma'')|$. Por hipótesis tenemos que $\mathbb{I}''$ está cocientada por equivalencia elemental, por lo tanto, como $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M})$ y $\rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}')$ son distintos podemos afirmar que existe una formula $\varphi'' \in \mathbf{Sen}''(\Sigma'')$ que los distingue. Es decir que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}) \not\models''_{\Sigma''} \varphi''$ y $\rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \models''_{\Sigma''} \varphi''$. Como σ es comorfismo y cumple la preservación de satisfactibilidad tenemos que $\mathcal{M} \not\models_{\Sigma} \sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi'')$. Pero como ρ es comorfismo y cumple la preservación de satisfactibilidad tenemos que:

$$\begin{array}{llll} \rho^{Mod}_{\Sigma''}(\mathcal{M}') \models''_{\Sigma''} \varphi'' & sii & \mathcal{M}' \models'_{\rho^{Sign}(\Sigma'')} \rho^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi'') & \text{[por preservación de satisfactibilidad]} \\ & sii & \mathcal{M}' \models'_{\rho^{Sign}(\Sigma'')} \rho^{Sen}_{\Sigma''}((\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1}(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi''))) & \text{[pues } (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1} \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''}) \text{ es la identidad]} \\ & sii & \mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_{\Sigma}(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi'')) & \text{[pues } (\rho^{Sen}_{\Sigma''}) \circ (\sigma^{Sen}_{\Sigma''})^{-1} = \gamma^{Sen}_{\Sigma} \text{]} \end{array}$$

Entonces tenemos que

$$\mathcal{M} \not\models_{\Sigma} \sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi'') \quad \text{y} \quad \mathcal{M}' \models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma)} \gamma^{Sen}_{\Sigma}(\sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi''))$$

Esto es absurdo ya que la fórmula $\sigma^{Sen}_{\Sigma''}(\varphi'')$ invalidaría la preservación de satisfactibilidad de γ que fue demostrada en el Lema 28.

□

Mostrar la siguiente inclusión nos permite plantear correctamente el esquema de conmutatividad de la familia de functores γ^{Mod}_{δ} para luego mostrar que se comporta como una transformación natural.

Lema 31. *$Img((\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'}) \subseteq \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))$ donde $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^{\mathbf{0}}||$ y $\mathcal{M}' \in |\mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign}(\Sigma_2))|$.*

Demostración. Veamos primero que la inclusión vale para objetos. Vamos a probarlo por reducción al absurdo, asumimos que la propiedad no es cierta. Entonces existe $\mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}')|$ tal que $(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}_1) \notin |\gamma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))|$.
En el Lema 30 vemos que la categoría de $\mathbb{I}_0$-reductos del modelo $\mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}')$ está cerrada por las $\mathbf{Sen^0}$-propiedades que satisface. Entonces existe $\alpha \in |\mathbf{Sen^0}(\Sigma_1)|$ tal que:

$$(\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}_1) \models_{\Sigma_1} \alpha \text{ pero } \mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}') \not\models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma_1)} \gamma^{Sen}_{\Sigma_1}(\alpha).$$

Por lo tanto tengo que:

$$\begin{array}{lll} & \mathbf{Mod'}(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}') \not\models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma_1)} \gamma^{Sen}_{\Sigma_1}(\alpha) & \\ sii & \mathcal{M}' \not\models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma_2)} \mathbf{Sen'}(\gamma^{Sign}(\delta))(\gamma^{Sen}_{\Sigma_1}(\alpha)) & \text{[pues vale la \textit{condición de invarianza} en } \mathbb{I}' \text{ y } \gamma^{Sign}(\delta) : \gamma^{Sign}(\Sigma_1) \to \gamma^{Sign}(\Sigma_2) \text{]} \\ sii & \mathcal{M}' \not\models'_{\gamma^{Sign}(\Sigma_2)} \gamma^{Sen}_{\Sigma_2}(\mathbf{Sen}(\delta)(\alpha)) & \text{[pues } \mathbf{Sen'}(\gamma^{Sign}(\delta))(\gamma^{Sen}_{\Sigma_1}(\alpha)) = \gamma^{Sen}_{\Sigma_2}(\mathbf{Sen}(\delta)(\alpha)) \text{ ya que } \gamma^{Sen} \text{ es transformación natural]} \\ sii & \mathcal{M}_1 \not\models_{\Sigma_2} \mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) & \text{[por Lema 28 y ya que } \mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}')| \text{]} \end{array}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{array}{lll} & (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}_1) \models_{\Sigma_1} \alpha & \\ sii & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1) \models_{\Sigma_1} \alpha & [\text{ por definición de } (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}] \\ sii & \mathcal{M}_1 \models_{\Sigma_2} \mathbf{Sen}(\delta)(\alpha) & [\text{ pues vale la } \textit{condición de invarianza} \text{ en } \mathbb{I} \\ & & \text{ y } \delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2] \end{array}$$

Veamos ahora que la inclusión vale para morfismos. Por definición tenemos que $\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}')$ es una categoría discreta. Es decir que los únicos morfismos que contiene son las identidades. Sea $id_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \in ||\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}')||$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(id_{\mathcal{M}}) & = & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(id_{\mathcal{M}}) & [\text{ por definición de } (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}] \\ & = & id_{\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M})} & [\text{ pues } \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}}) \text{ es functor }] \\ & = & id_{(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M})} & [\text{ por definición de } (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'} \\ & & & \text{ y porque } \mathcal{M} \in |\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}')|] \end{array}$$

Por la demostración que expusimos en las lineas anteriores podemos afirmar que:

$$(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M}) \in |\gamma_{\Sigma_1}^{Mod}(\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))|$$

Entonces el hecho de que la identidad $id_{(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M})} \in ||\gamma_{\Sigma_1}^{Mod}(\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))||$ se sigue de que $\gamma_{\Sigma_1}^{Mod}(\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}'))$ es categoría y que el objeto $(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}'}(\mathcal{M})$ pertenece a la categoría. □

El siguiente lema nos asegura la conmutatividad del diagrama que plantea la Definición 17 para la familia de functores γ_δ^{Mod}, y eso nos va a permitir mostrar que se comporta como una transformación natural.

Lema 32. *Para todo $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ y $h' : \mathcal{M}_1' \to \mathcal{M}_2' \in ||\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign}(\Sigma_2))||$ vale que $(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}_2'} \circ \gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(h') = \gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(h')) \circ (\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}_1'}$.*

Demostración. Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}_1') \arrow[r, "(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}_1'}"] \arrow[d, "\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(h')"'] & \gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}_1')) \arrow[d, "\gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(h'))"] \\ \gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}_2') \arrow[r, "(\gamma_\delta^{Mod})_{\mathcal{M}_2'}"'] & \gamma_{\Sigma_1}^{Mod}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(\mathcal{M}_2')) \end{tikzcd}$$

Donde $\delta : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in ||\mathsf{Sign}^0||$ y $h' : \mathcal{M}_1' \to \mathcal{M}_2' \in ||\mathbf{Mod}'(\gamma^{Sign}(\Sigma_2))||$.

Veamos primero que dado un objeto en $\gamma_{\Sigma_2}^{Mod}(\mathcal{M}_1')$ el diagrama conmuta. Como $\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})$ es functor tenemos el siguiente diagrama conmutativo en la institución $\mathbb{I}'$. Considerar que $\delta' = \gamma^{Sign}(\delta)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_1 \arrow[r, "\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1) \arrow[d, "\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h')"] \\ \mathcal{M}'_2 \arrow[r, "\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})"'] & \mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2) \end{tikzcd}$$

Consideremos $\Sigma''_2 = (\sigma^{Sign})^{-1}(\Sigma_2)$. Sea un modelo $\mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)|$, tenemos que, por definición $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}_1) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}'_1)$. Por otro lado, como $\rho^{Mod}_{\Sigma''_2}$ es functor tenemos que $\rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(h') : \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}'_1) \to \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}'_2) \in ||\mathbf{Mod}''(\Sigma''_2)||$. Entonces por hipótesis tenemos que hay un único $\mathcal{M}_2$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}_2) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(\mathcal{M}'_2)$ tal que existe un $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma_2)||$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(h) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(h')$. Notar además que, por definición, $\mathcal{M}_2 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_2)|$. Con esta información, y como $\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})$ es functor, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en la institución $\mathbb{I}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1) \arrow[d, "\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)"] \\ \mathcal{M}_2 \arrow[r, "\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})"'] & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2) \end{tikzcd}$$

Por como definimos γ^{Mod}_{Σ}, sabemos que h caracteriza el mapeo de $\mathcal{M}_1$ para el functor $\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(h')$. Es decir que $\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(h')(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$.

Volviendo a la igualdad que queremos probar desarrollemos el término del lado izquierdo de la igualdad aplicado a $\mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)|$:

$$\begin{array}{rcll} (\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'_2} \circ \gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(h')(\mathcal{M}_1) & = & (\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'_2}(\mathcal{M}_2) & [\text{ pues } \gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(h')(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2 \ ] \\ & = & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})\big|_{\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_2)}(\mathcal{M}_2) & [\text{ por definición de } (\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'_2} \ ] \\ & = & \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2) & [\text{ pues } \mathcal{M}_2 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_2)| \ ] \end{array}$$

Desarrollemos ahora el término del lado derecho de la igualdad aplicado a $\mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)|$:

$$\begin{array}{rll} = & \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(h')) \circ (\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'_1}(\mathcal{M}_1) & \\ = & \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(h')) \circ \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})\big|_{\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)}(\mathcal{M}_1) & [\text{ por definición de } (\gamma^{Mod}_{\delta})_{\mathcal{M}'_1} \ ] \\ = & \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}((\mathbf{Mod}' \circ \gamma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta^{\mathsf{op}}))(h'))(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) & [\text{ pues } \mathcal{M}_1 \in |\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)| \ ] \\ = & \gamma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) & [\text{ pues } \delta' = \gamma^{Sign}(\delta) \ ] \\ = & (\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} \circ \rho^{Mod}_{\Sigma''})(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) & [\text{ por definición de } \gamma^{Mod}_{\Sigma_1} \ ] \end{array}$$

Resta ver que el functor $(\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''}} \circ \rho^{Mod}_{\Sigma''})(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))$ aplicado al modelo $(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1))$

da como resultado el modelo $\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2)$. Tenemos que $\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h') : \mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1) \to \mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2) \in ||\mathbf{Mod}'(\Sigma'_1)||$ y, por lo tanto, como $\rho^{Mod}_{\Sigma''_1}$ es functor tenemos que $\rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h')) : \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1)) \to \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2)) \in ||\mathbf{Mod}''(\Sigma''_1)||$. Por otro lado tenemos que $\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h) : \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1) \to \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2) \in ||\mathbf{Mod}(\Sigma_1)||$ y, por lo tanto, como $\sigma^{Mod}_{\Sigma_1}$ es functor tenemos que $\sigma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)) : \sigma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) \to \sigma^{Mod}_{\Sigma_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2)) \in ||\mathbf{Mod}''(\Sigma''_1)||$.

Veamos ahora que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))$. Tenemos que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(h) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(h')$. Entonces aplicando $\mathbf{Mod}''(\delta''^{\mathsf{op}})$ de ambos lados obtengo $\mathbf{Mod}''(\delta''^{\mathsf{op}})(\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(h)) = \mathbf{Mod}''(\delta''^{\mathsf{op}})(\rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(h'))$. Desarrollemos el término izquierdo de esta igualdad:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{Mod}''(\delta''^{\mathsf{op}})(\sigma^{Mod}_{\Sigma''_2}(h)) & = & \sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta''^{\mathsf{op}}))(h)) & [\text{ pues } \sigma^{Mod}_{\Sigma} \text{ es transformación natural }] \\
 & = & \sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)) & [\text{ pues } \delta^{\mathsf{op}} = \sigma^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta''^{\mathsf{op}}) \text{ }]
\end{array}$$

Desarrollemos ahora el término derecho de la igualdad:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{Mod}''(\delta''^{\mathsf{op}})(\rho^{Mod}_{\Sigma''_2}(h')) & = & \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta''^{\mathsf{op}}))(h')) & [\text{ pues } \rho^{Mod}_{\Sigma} \text{ es transformación natural }] \\
 & = & \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h')) & [\text{ pues } \delta'^{\mathsf{op}} = \rho^{Sign^{\mathsf{op}}}(\delta''^{\mathsf{op}}) \text{ }]
\end{array}$$

Como tenemos que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))$ entonces podemos afirmar que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_1))$. Por hipótesis existe un único modelo $\mathcal{M}_0$ que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathcal{M}_0) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2))$ tal que existe un morfismos h_0 que verifica $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(h_0) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))$. Como tenemos que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h'))$ también podemos afirmar que $\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2)) = \rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}'_2))$. Entonces necesariamente tenemos que $\mathcal{M}_0 = \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2)$ y $h_0 = \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)$.

Luego, por definición de $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}}$ tenemos que la flecha $\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(h)$ caracteriza el functor $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}}(\rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h')))$ para el objeto $(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1))$. Es decir, concluimos que $\overleftarrow{\sigma^{Mod}_{\Sigma''_1}}(\rho^{Mod}_{\Sigma''_1}(\mathbf{Mod}'(\delta'^{\mathsf{op}})(h')))(\mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_1)) = \mathbf{Mod}(\delta^{\mathsf{op}})(\mathcal{M}_2)$.

Veamos ahora que dada una flecha en $\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)$ el diagrama conmuta. Por definición tenemos que $\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)$ es una categoría discreta, es decir que los únicos morfismos que contiene son las identidades de los objetos. Sea $id_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \in ||\gamma^{Mod}_{\Sigma_2}(\mathcal{M}'_1)||$ el hecho de que el diagrama conmuta para el morifmos $id_{\mathcal{M}}$ se sigue directamente del hecho de que conmuta para el objeto $\mathcal{M}$, lo cual fue probado oportunamente en las lineas anteriores. $\square$