

Universidad de Buenos Aires



Tesis de Licenciatura

Biclique-Coloreo de Grafos

Alumno:

Pablo Terlisky

terlisky@dc.uba.ar

L.U.: 431/03

DIRECTORES:

Dra. Marina Groshaus

Dr. Francisco Soulignac

Departamento de Computación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

20 de Julio de 2010

Biclique-Coloreo de Grafos

Un k -clique-coloreo de un grafo es una asignación de k colores a sus vértices de manera que toda clique tiene al menos dos vértices con colores distintos. El problema de determinar si un grafo es k -clique coloreable es Σ_2^P -Completo, aunque es más fácil para ciertas clases de grafos. En esta tesis, definimos el problema de k -biclique-coloreo como el análogo del de k -clique-coloreo en el contexto de bicliques. Probamos que el problema de determinar si un grafo es k -biclique-coloreable es Σ_2^P -Completo para $k \geq 2$, y mostramos algunas clases de grafos para las que el problema está en NP o es polinomial.

Palabras clave: *teoría de grafos, coloreo de grafos, clique-coloreo, biclique-coloreo, complejidad de biclique-coloreo, bicliques, grafos split, grafos threshold, grafos bloque, grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem})$ -free*

Graph Biclique-Coloring

A k -clique-coloring of a graph is an assignment of k colors to its vertices such that every clique has at least two vertices with different colors. For $k \geq 2$, the problem of k -clique-coloring a graph is Σ_2^p -complete, though it is easier for some graph classes. In this work, we define the k -biclique-coloring problem as the analogue of the k -clique-coloring for bicliques. We prove that the k -biclique-coloring problem is Σ_2^p -complete for $k \geq 2$, and show some graph classes for which the problem is in NP or polynomial.

Keywords: *graph theory, graph coloring, clique-coloring, biclique-coloring, complexity of biclique-coloring, bicliques, split graphs, threshold graphs, block graphs, (W_4 , dart, gem)-free graphs*

Agradecimientos

En primer lugar, al grupo de Teoría de Grafos, en particular a Francisco y a Marina, por tomarme como tesista y orientarme permanentemente en este proyecto. Por tener la parsimonia de leer las mil versiones prelimiars de este informe y corregirme cada vez lo que fuera necesario. Por recibirme siempre en la oficina tanto en mis momentos de total desorientación, como en aquellos en los que necesitaba exponer una idea, como en los ataques de ansiedad e incertidumbre. Haberlos tenido a ambos como directores fue una experiencia inmensamente edificante, permitiéndome nutrirme de diferentes enfoques para los mismos problemas. Con el aporte de ambos fue que pude ver evolucionar esta tesis de una serie de ideas inconexas e ilegibles al documento que se encuentra a continuación, y no me alcanzan las palabras para agradecerse los.

Este trabajo también es posible gracias a los aportes de aquellos compañeros que estuvieron durante el proceso de su creación, charlando en el bar o en los laboratorios y siempre proponiendo ideas que me ayudaron a encontrar soluciones donde estaba estancado. No puedo dejar de mencionar a Andrés Viso, Lisandro Sebríe, y Mariano Pérez Rodríguez por sus ideas y justas observaciones. Pero estos son sólo casos particulares de toda la excelente gente con la que tuve el agrado de hacer esta carrera, ya sea preparando algún TP o juntándonos a estudiar (o no): Daniel K., JC, FaQ, autarol, Daniel C., hache, Pachi, Ary B., Germán K., David G.M., Lukius, arti, Fran, Javier P., Lea, Rodri, Matías L. y R., Piter, Jose, Nacho Oroná, Dieguito L.L., Diego G., Andrés R.P., Michel M., Sebas G., Ferchu B., Tommy S., Pablo R., Guillermo S., Diego++, y tantos otros que mi traicionera memoria me hace cometer la injusticia de omitir.

A mis padres Silvio y Diana, por apoyarme siempre y brindarme el mejor hogar que se puede llegar a pedir. Y por supuesto, mi hermano Arielito, que nunca dejó de bancarme y logró devolverme a la senda del deber cada vez que me distraje o me desmoralicé.

Y además, a tantos otros amigos por su apoyo moral y por aguantar mis incesantes cambios de ánimo.

A todos, gracias.

$\pi e T$

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Nociones de teoría de grafos	2
1.2. Complejidad computacional	3
1.3. Clique coloreo	5
1.4. Biclique coloreo	6
1.5. Organización de la tesis	9
2. Complejidad computacional de biclique-coloreo	11
2.1. Preliminares	11
2.1.1. El problema QSAT ₂	11
2.1.2. Preservadores y alternadores	12
2.2. Complejidad de biclique coloreo	19
3. Clases de grafos con biclique-coloreo \in NP	29
3.1. Preliminares	29
3.2. Grafos split	30
3.3. Grafos (W_4 , <i>dart</i> , <i>gem</i>)-free	35
4. Clases de grafos con biclique-coloreo \in P	45
4.1. Casos especiales en grafos split	45
4.2. Grafos threshold	48
4.3. Grafos cordales <i>diamond</i> -free	55
4.4. Grafos donde cada arista pertenece a una única biclique	60
5. Conclusiones y Problemas Abiertos	65
5.1. Complejidad según subgrafos prohibidos	67
5.2. Clique-coloreo y biclique-coloreo	68
5.3. Problemas abiertos y trabajo futuro	69
Bibliografía	71
Índice de figuras	74
Índice de cuadros	75

1 Introducción

Un coloreo de un grafo G es una asignación de valores enteros, llamados colores, a los vértices de G . Los problemas de coloreo consisten en determinar la existencia de coloreos de G que satisfagan ciertas restricciones. El problema de coloreo de grafos más famoso y estudiado es el de coloreo de vértices. Un coloreo de vértices es un coloreo de G tal que v y w tienen colores distintos para toda arista (v, w) en G , y el problema de coloreo de vértices es el de determinar si G admite un coloreo de vértices.

El problema de coloreo de vértices tiene sus orígenes en el problema de los cuatro colores, formulado por Francis Guthrie en 1858, c.f. [GY06], que consiste en determinar si es posible colorear un mapa con cuatro colores, de forma tal que todo par de países limítrofes tengan colores distintos. Su resolución tomó años de investigación y esfuerzo de numerosos matemáticos, hasta su demostración en 1976 [AH89]. Dejó como legado un interés y muchos resultados en el problema de coloreo de vértices, y su evolución hacia otros problemas de coloreo.

El objetivo de esta tesis es estudiar un nuevo problema de coloreo, que se basa en el problema de clique-coloreo. Una clique de un grafo es un subgrafo completo maximal. Un clique-coloreo de G es un coloreo donde toda clique contiene al menos dos vértices de distinto color. El problema de k -clique-coloreo consiste en decidir si un grafo admite un clique-coloreo que utilice a lo sumo k colores. El problema de k -clique-coloreo es una variante del problema de coloreo de vértices donde, en lugar de colorear los vértices de forma tal que todo completo que contiene exactamente dos vértices (ie. toda arista) tenga dos vértices de colores distintos, se colorean los vértices de forma tal que todo completo maximal tenga dos vértices de distinto color.

El trabajo en el problema de k -clique-coloreo es reciente, y en la última década se han conocido resultados respecto de su complejidad en el caso general [Mar04], restringido a grafos sin agujeros impares [Déf09], grafos sin completos de tamaño 4 [Mar04], y grafos planares [Mar04, KT02].

Motivados por los resultados existentes sobre clique-coloreo, definimos el problema análogo en el contexto de las bicliques. Una biclique de un grafo es un subgrafo inducido bipartito completo maximal. Las bicliques se han estudiado en varios contextos [DKST01, Hoc98, Pee03, Pri00]. Por ejemplo, se han estudiado en el marco de la propiedad de Helly [GS08, GS07], y grafos de intersección [GS10, GM09]. Un biclique-coloreo es un coloreo de donde toda biclique contiene al menos dos vértices de distinto color. El problema de k -biclique-coloreo consiste en decidir si un grafo admite un biclique-coloreo con a lo sumo k colores.

En esta tesis estudiamos el problema de k -biclique coloreo desde la perspectiva de su

complejidad computacional. Para el caso general, demostramos que el problema de k -biclique-coloreo es Σ_2^P -Completo, incluso en grafos que no poseen $K_{3,3}$ inducidos. Luego, mostramos clases de grafos para los cuales el problema de k -biclique-coloreo está en NP. Probamos que tanto en los grafos que tienen una cantidad polinomial de bicliques, como en los que no tienen subgrafos W_4 , *paw*, y *dart* inducidos, se puede verificar que un coloreo sea un k -biclique-coloreo en tiempo polinomial. También mostramos que el problema es NP-Completo en algunas subclases de estos grafos.

Finalmente mostramos familias de grafos para las cuales el problema de k -biclique-coloreo se resuelve en tiempo polinomial. En particular, demostramos cómo se puede obtener un k -biclique-coloreo, de existir, en tiempo lineal para los grafos cordales sin diamantes y para los grafos threshold. También mostramos cómo determinar el mínimo k tal que existe un k -biclique-coloreo en grafos donde cada arista pertenece a una única biclique.

Todas las familias de grafos estudiadas son caracterizables por subgrafos prohibidos. Luego, los resultados obtenidos están resumidos en una tabla donde mostramos la complejidad de resolver el problema de k -biclique-coloreo para cada clase. También comparamos las complejidades contra las de k -clique-coloreo en ciertas familias.

1.1. Nociones de teoría de grafos

En este trabajo estudiamos temas de teoría de grafos, por lo que nos será conveniente tener algunas definiciones en este área para proceder.

Un grafo $G = (V, E)$ está formado por un conjunto V de vértices y un conjunto E de pares no ordenados de vértices llamados *aristas*. Notaremos por $V(G)$ al conjunto de vértices de G y por $E(G)$ al conjunto de aristas de G . El *grafo trivial* es el grafo con un único vértice.

Dos vértices v, w son *adyacentes*, o *vecinos*, cuando $(v, w) \in E(G)$. El *vecindario abierto* de v es el conjunto $N(v)$ formado por los vecinos de v . El *vecindario cerrado* de v es el conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Decimos que v es *totalmente adyacente* a un conjunto $X \subseteq V(G)$ si $X \subseteq N[v]$. El vértice v es *universal* cuando $N[v] = V(G)$.

El *grado* de v , o $d(v)$, es $|N(v)|$, es decir, la cantidad de vecinos de v . Decimos que un vértice v *domina* a un vértice w cuando $N[w] \subseteq N[v]$. Dos vértices v, w son *mellizos verdaderos*, o simplemente *mellizos*, si $N[v] = N[w]$. Asimismo, son *falsos mellizos*, o *gemelos*, si $N(v) = N(w)$. Un *bloque* es un conjunto maximal de vértices mellizos.

Un *recorrido* es una secuencia de vértices v_1, \dots, v_k tal que v_i es adyacente a v_{i+1} , para todo $1 \leq i < k$. Decimos que este recorrido es *entre* v_1 y v_k . Los vértices v_i y v_{i+1} son *consecutivos* en el recorrido, para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. La *longitud* del recorrido es su cantidad de aristas, ie. $k-1$. El recorrido es *cerrado* cuando $v_1 = v_k$. Un *camino* es un recorrido conformado por vértices distintos de a pares. Un *ciclo* es un camino cerrado v_1, \dots, v_k, v_1 , tal que $k \geq 2$ y v_1, \dots, v_k es un camino. Por simplicidad, nos referiremos como ciclo a v_1, \dots, v_k , con $v_k \neq v_1$, al ciclo v_1, \dots, v_k, v_1 . La *distancia* entre dos vértices

v y w es la longitud del camino más corto que los une.

Un grafo G es *conexo* si hay un camino entre todo par de vértices de G . Una *componente conexa* de G es un subgrafo conexo maximal de G . Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. En un árbol T , se llama *hoja* a todo vértice de grado 1, y *vértice interno* a todo otro vértice de T .

Un *completo* es un conjunto de vértices adyacentes de a pares. También usamos la palabra *completo* para referirnos al correspondiente subgrafo. El grafo completo de n vértices es notado por K_n . Un *conjunto independiente* es un conjunto de vértices no adyacentes de a pares. Si $V(G)$ se puede particionar en dos conjuntos independientes U y V , entonces G es *bipartito*. En tal caso, llamamos a U y V *particiones* de G . Si G además posee todas las aristas entre U y V , entonces G se dice *bipartito completo*, y lo notamos $K_{|U|,|V|}$.

Dos grafos G y H son *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $(v, w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$, para todo $v, w \in V(G)$. En ese caso notamos $G = H$.

Un subgrafo de G es un grafo $H = (V, E)$, donde $V \subseteq V(G)$, y $E \subseteq E(G)$. Cuando $E = \{(v, w) \in E(G) \mid v, w \in V(H)\}$, decimos que H es un *subgrafo inducido* de G . Si G contiene un subgrafo inducido isomorfo a H , decimos que G contiene a H , y lo notamos $H \subseteq G$. En el caso contrario, decimos que G es H -free y lo notamos $H \not\subseteq G$. Una *clique* de G es un subgrafo completo maximal no trivial¹. Una *biclique* de G es un subgrafo inducido bipartito completo maximal con al menos una arista. Notamos $B = \{X, Y\}$ a la correspondiente bipartición de la biclique. Usamos también las palabras *clique* y *biclique* para referirnos a sus respectivos conjuntos de vértices. Una *biclique estrella* es un subgrafo bipartito completo $B = \{\{v\}, Y\}$. El vértice v es el *centro* y los vértices de Y son las *puntas* de B .

El *complemento* de G es el grafo \overline{G} tal que dos vértices son adyacentes en \overline{G} si y sólo si no son adyacentes en G .

Un k -*coloreo* de G es una función $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. En términos de coloreo, los elementos de la imagen de f se denominan *colores*.

Sea \mathcal{P} una propiedad que puede o no poseer un grafo. \mathcal{P} es *hereditaria* si vale que si G posee la propiedad \mathcal{P} , entonces todo subgrafo inducido de G posee la propiedad \mathcal{P} .

En el contexto de esta tesis, trabajaremos con grafos computacionalmente representados como listas de adyacencias, a menos que se especifique lo contrario.

1.2. Complejidad computacional

Otro aspecto fundamental de este trabajo es el de complejidad computacional. Por lo tanto, deberemos definir algunas nociones de problemas y de clases de complejidad.

¹El término clique también se utiliza en la literatura para referirse a los grafos completos maximales triviales, ie. a los vértices aislados. Sin embargo, para el problema de clique coloreo, las cliques triviales nunca pueden contener dos vértices de colores distintos. Por eso los excluimos de la definición.

Nos enfocaremos en *problemas de decisión*, es decir, aquellos cuyas respuestas son *sí* o *no*. Llamamos *instancia* de un problema Π a uno de los valores de entrada para ese problema. Si la respuesta de Π con entrada i es *sí*, entonces i es una *instancia afirmativa* de Π , mientras que si la respuesta es *no*, entonces i es una *instancia negativa* de Π . Un *certificado* para i es una evidencia de que i es una instancia positiva o negativa, cuyo tamaño es polinomial con respecto al tamaño de i .

A efectos de este trabajo, diremos que un problema Π pertenece a la clase de complejidad P cuando dada una instancia de Π se puede obtener su respuesta en tiempo polinomial. Decimos que Π está en NP si, dada una instancia afirmativa del problema y un certificado, podemos verificar la validez del certificado en tiempo polinomial. Por otra parte, diremos que Π está en $coNP$ si podemos verificar la validez de un certificado para una instancia negativa de Π en tiempo polinomial.

Una *reducción* de un problema Π a un problema Γ es un algoritmo que a toda instancia π de Π le asigna una instancia γ de Γ , de manera tal que la respuesta de Π para la entrada π es *sí* si y sólo si la respuesta de Γ para la entrada γ es *sí*. Una *reducción polinomial* de Π a Γ es una reducción de Π a Γ que requiere tiempo polinomial.

Un problema Π es NP -Hard si, para todo $\Gamma \in NP$, existe una reducción polinomial de Γ a Π . Si además $\Pi \in NP$ entonces Π es *NP-Completo*. Se puede ver que para probar que cierto problema $\Pi \in NP$ es NP -Completo, basta con mostrar que existe una reducción polinomial de un problema Γ NP -Completo a Π .

Para profundizar las definiciones formales de estos términos y conjuntos, referirse a [GJ79].

En este trabajo en particular analizaremos problemas que están en P , problemas que están en NP , y también problemas que están en una clase de complejidad mayor. Para definirla, requeriremos algunas definiciones adicionales.

Llamamos *oráculo* de cierto problema Π a una instrucción especial que, dada una instancia de Π , obtiene su respuesta en un paso. Una *máquina con oráculo* de Π es una máquina que tiene entre sus instrucciones al oráculo de Π . Diremos que un problema Γ está en P^Π si cualquier instancia de Γ se puede resolver en una cantidad polinomial de pasos en una máquina con oráculo de Π . Análogamente Γ está en NP^Π si para cada instancia afirmativa de Γ , se puede verificar la validez de un certificado en una cantidad polinomial de pasos en una máquina con oráculo de Π .

Sea Y clase de complejidad. Diremos que un problema Γ está en P^Y si existe un problema $\Pi \in Y$ tal que $\Pi \in P^\Pi$, y que Γ está en NP^Y si existe $\Pi \in Y$ tal que $\Gamma \in NP^\Pi$.

Estas nuevas clases de complejidad permiten definir nuevos oráculos que a su vez proporcionan más clases. En 1977, Larry Stockmeyer formalizó esta familia de clases de complejidad y definió la *jerarquía polinomial* [Sto76]. La definición recursiva de esta familia es la siguiente:

- $\Sigma_0^p = \Pi_0^p = \Delta_0^p = P$
- Para todo $k \geq 0$:

- $\Delta_{k+1}^p = P^{\Sigma_k^p}$
- $\Sigma_{k+1}^p = NP^{\Sigma_k^p}$
- $\Pi_{k+1}^p = coNP^{\Sigma_k^p}$

Notemos que, $\Delta_1^p = P$, $\Sigma_1^p = NP$ y $\Pi_1^p = coNP$, dado que un oráculo de un lenguaje en P sólo está haciendo en un paso algo que de por sí se puede realizar en una cantidad polinomial de pasos.

Si estamos interesados en determinar que un problema Γ se encuentra en la clase de complejidad Σ_i^p , en principio deberíamos probar que se puede verificar un certificado de Γ en tiempo polinomial, si disponemos de una máquina con oráculo para un problema Σ_{i-1}^p . Sin embargo, el siguiente teorema nos proporciona una definición alternativa.

Teorema 1.1 ([Pap94]). *Un problema Γ está en la clase de complejidad Σ_i^p sí y sólo sí la verificación de un certificado positivo de Γ pertenece a Π_{i-1}^p .*

Notemos que, en particular, este teorema nos dice que si queremos probar que cierto problema Γ está en Σ_2^p , basta con probar que verificar el certificado de una instancia afirmativa de Γ es un problema en Π_1^p , es decir, está en $coNP$.

La definición de Σ_i^p -Completo se extrapola de la de NP -Completo: un problema Π es Σ_i^p -Completo cuando hay una reducción polinomial de Π' a Π para todo $\Pi' \in \Sigma_i^p$. También de manera análoga a NP , para mostrar que $\Pi \in \Sigma_i^p$ es Σ_i^p -Completo basta con mostrar una reducción polinomial de un problema $\Gamma \in \Sigma_i^p$ -Completo a Π .

La pregunta de si todas las inclusiones de la jerarquía polinomial son estrictas es un problema abierto. Es decir, no se sabe si para todo $k \geq 0$ vale que $\Sigma_k^p \subsetneq \Sigma_{k+1}^p$, $\Delta_k^p \subsetneq \Delta_{k+1}^p$ y $\Pi_k^p \subsetneq \Pi_{k+1}^p$. Si existe un k_0 tal que $\Sigma_{k_0}^p = \Sigma_{k_0+1}^p$, o $\Sigma_{k_0}^p = \Pi_{k_0}^p$, entonces para todo $i > k_0$, $\Sigma_i^p = \Sigma_{k_0}^p$. En particular, si k_0 fuera 0, significaría que $P = NP$ y toda la jerarquía polinomial colapsa en P .

1.3. Clique coloreo

El problema clásico de coloreo de vértices consiste en colorear el grafo de manera tal que todo par de vértices adyacentes tengan colores distintos. Existen numerosos resultados provenientes del estudio de este problema [GY06]. Sin embargo, en este trabajo analizaremos problemas basados en coloreos con otras restricciones.

Un k -clique-coloreo de G es un k -coloreo de G tal que toda clique de G posee al menos dos vértices de colores distintos. El problema de hallar un k -clique-coloreo de G , o directamente problema de k -clique-coloreo de G , se define como:

k -CLIQUE-COLORING:

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, valor $k \in \mathbb{N}$.

Pregunta: ¿Es G k -clique-coloreable? Es decir, ¿Existe un k -coloreo f de G , tal que f es un clique-coloreo de G ?

Se sabe que el problema k -CLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo para todo $k \geq 2$ [Mar04], por lo que ni siquiera se puede verificar un certificado positivo en tiempo polinomial a menos que $\text{NP} = \Sigma_2^p$, lo que implicaría que la jerarquía polinomial se colapsa en NP. También se conocen algunas subclases de grafos donde al restringir k -CLIQUE-COLORING, el problema sigue siendo Σ_2^p -Completo. Por ejemplo, 2-CLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo incluso para grafos sin ciclos impares inducidos de longitud mayor a 3 [Déf09].

A pesar de su dificultad, cuando el problema se restringe a algunas clases especiales de grafos y algunos valores especiales de k , se puede demostrar que el problema pertenece a NP o incluso que es polinomial. Por ejemplo, es NP-Completo decidir si un grafo cuya clique máxima tiene tamaño acotado por una constante es k -clique-coloreable [Déf06]; todo grafo planar es 3-clique-coloreable [MŠ99], y se puede determinar si es 2-clique-coloreable en tiempo polinomial [KT02].

En este trabajo tomaremos algunos de estos resultados para compararlos con los obtenidos para el problema de k -biclique-coloreo.

1.4. Biclique coloreo

Motivados por el problema de clique coloreo, en este trabajo estudiamos la posibilidad de k -colorear un grafo de manera tal que ninguna biclique tenga todos sus vértices del mismo color.

Dado un coloreo f de un grafo G , decimos que una biclique B es *monocromática* si $f(u) = f(v)$ para todo $u, v \in B$, mientras que es *policromática* si no es monocromática. En el caso particular que B contenga vértices de exactamente dos colores, decimos que B es *bicromática*.

Estos conceptos son suficientes para definir k -biclique-coloreo.

Definición 1.1 (k -biclique coloreo). Decimos que un k -coloreo f de G es un *k -biclique-coloreo* si todas las bicliques de G son policromáticas para f .

El problema k -BICLIQUE-COLORING, o *problema de k -biclique-coloreo*, se define entonces de la siguiente manera.

k -BICLIQUE-COLORING:

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, valor $k \in \mathbb{N}$.

Pregunta: ¿Es G k -biclique-coloreable? Es decir, ¿Existe un k -coloreo f de G , tal que f es un biclique-coloreo de G ?

Definamos algunos parámetros que nos serán útiles para el estudio de este problema.

En coloreo de vértices, el *número cromático* de un grafo G , o $\chi(G)$, es el mínimo k tal que G es k -coloreable. De manera análoga, vamos a definir el número biclique-cromático.

Definición 1.2 (número biclique-cromático). El *número biclique-cromático* de G , denotado $\chi_{bc}(G)$, es el mínimo k tal que G es k -biclique coloreable.

Como pronto veremos, otro parámetro de G que puede brindar información sobre la biclique coloreabilidad de G es el cardinal de su bloque más grande.

Definición 1.3 (número de bloque). El *número de bloque* de G , notado $\beta(G)$, es el tamaño del bloque más grande de G .

Teniendo estas definiciones observemos ahora algunas propiedades generales de k -BICLIQUE-COLORING.

En primer lugar, mostramos una cota inferior para el número biclique-cromático, que se obtiene de analizar la relación entre vértices mellizos y las bicliques en un grafo.

Lema 1.1. *Una biclique contiene únicamente una arista (v, w) si y sólo si v y w son mellizos.*

Demostración. Supongamos que v y w no son mellizos, i.e., existe un vértice z adyacente a uno de ellos y no al otro. Sin pérdida de generalidad, supongamos que z es adyacente a v y no a w . Entonces $\{\{v\}, \{w\}\}$ está contenido en $\{\{v\}, \{w, z\}\}$, que es bipartito completo. En consecuencia, $\{\{v\}, \{w\}\}$ no es una biclique.

Recíprocamente, supongamos que $\{\{v\}, \{w\}\}$ no es una biclique. Dado que $\{\{v\}, \{w\}\}$ induce un subgrafo bipartito completo, debe estar contenido en una biclique B . Luego, existe un vértice $z \in B \setminus \{v, w\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que el bipartito completo $\{\{v\}, \{w, z\}\}$ pertenece a G . Entonces, z es adyacente a v , y es no adyacente a w . \square

Debido a esta propiedad de los vértices mellizos para el coloreo de bicliques, muchas veces estaremos interesados en poder obtener, para un grafo G , la partición de $V(G)$ en bloques. Este procedimiento se puede realizar en tiempo $O(n + m)$. El algoritmo y las estructuras de datos necesarios para hacerlo se puede encontrar, por ejemplo, en [SS06].

Por otra parte, el estudio de los vértices gemelos también nos permite establecer una propiedad útil.

Propiedad 1.1. *Si v y w son dos vértices gemelos de un grafo, entonces toda biclique que contiene a v también contiene a w .*

Demostración. Si $v \in X$ para una biclique $\{X, Y\}$, entonces $Y \subseteq N(v)$ y $X \cap N(v) = \emptyset$. Como $N(w) = N(v)$, entonces $Y \subseteq N(w)$ y $X \cap N(w) = \emptyset$. Por lo tanto, $\{X \cup \{w\}, Y\}$ es bipartito completo, i.e., $w \in X$. \square

Si se quiere obtener un k -biclique-coloreo, la única manera de colorear las bicliques que son una arista (v, w) es que v y w sean de colores distintos. En consecuencia, cada bloque de cardinal r emplea exactamente r colores en cualquier biclique-coloreo, por Lema 1.1. Luego, obtenemos la siguiente cota.

Propiedad 1.2. *Para todo grafo G , $\chi_{bc}(G) \geq \beta(G)$.*

Por otra parte, podemos ver que $\chi(G)$ es una cota superior para $\chi_{bc}(G)$. En efecto, si B es una biclique, es policromática para cualquier coloreo válido, ya que contiene al menos una arista.

Propiedad 1.3. *Para todo grafo G , $\chi_{bc}(G) \leq \chi(G)$.*

Como corolario, obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 1.1. *Sea G grafo de n vértices. Entonces, $\chi_{bc}(G) = n$ si y sólo si $G = K_n$.*

Demostración. Para ver que $\chi_{bc}(K_n) = n$, notemos que $\beta(K_n) = n$ y por Propiedad 1.2, $\beta(K_n) \leq \chi_{bc}(K_n)$. Por otra parte, si $H \neq K_n$, entonces $\chi(H) < n$, y por Propiedad 1.3, $\chi_{bc}(H) \leq \chi(H)$. \square

Corolario 1.2. *Si G es un grafo no trivial bipartito conexo, entonces, $\chi_{bc}(G) = 2$.*

Demostración. Como G es no trivial, $2 \leq \chi_{bc}(G)$, mientras que por propiedad 1.3, $\chi_{bc}(G) \leq \chi(G) = 2$. \square

Este caso es particularmente interesante porque encontrar bicliques en grafos bipartitos es computacionalmente costoso [Pee03, Pri00], y sin embargo resolver k -BICLIQUE-COLORING es trivial.

Existen otras familias de grafos donde se puede determinar el número biclique-cromático para todos sus miembros. En particular, para los ciclos se pueden colorear los vértices alternadamente y obtener un 2-biclique-coloreo, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Para todo $n > 3$, $\chi_{bc}(C_n) = 2$.*

Demostración. Sea v_1, \dots, v_n la secuencia del ciclo, y definamos f como el 2-coloreo tal que $f(v_i) = 1$, si i es impar, y $f(v_i) = 2$, si i es par, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Veamos que f es un 2-biclique-coloreo. Para esto, basta notar que toda biclique en un ciclo es una estrella que tiene por centro un v_j , para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y por puntas a v_{j-1} y v_{j+1} , bajo suma en módulo n . Si $1 \leq j < n$, entonces $f(v_j) \neq f(v_{j+1})$; y en caso contrario, $f(v_{j-1}) \neq f(v_j)$. \square

Otra característica de este problema es que los k -biclique-coloreos no son hereditarios, es decir, un k -biclique-coloreo de un grafo G puede no serlo para algún subgrafo inducido de G . Podemos ver un ejemplo de esto en la Figura 1.1.

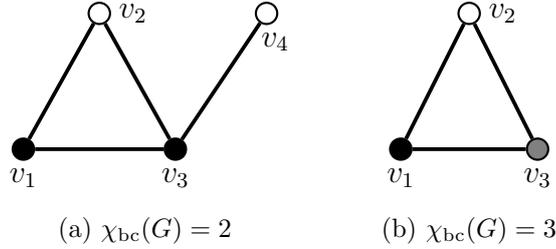


Figura 1.1: Ejemplo donde la propiedad de k -biclique-coloreabilidad no es hereditaria. El grafo de la izquierda es 2-biclique-coloreable. Sin embargo, si quitamos el vértice v_4 , obtenemos un K_3 y, como vimos, $\chi_{bc}(K_3) = 3$.

Más aún, para cualquier grafo G , siempre existe un grafo 2-biclique-coloreable H tal que $G \subseteq H$.

Teorema 1.3. *Todo grafo G es subgrafo inducido de un grafo H 2-biclique-coloreable.*

Demostración. Sea H el grafo que se obtiene de agregar n vértices w_1, \dots, w_n a un grafo G con vértices v_1, \dots, v_n , de forma tal que $N_G(v_i) = N_H(w_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea f el 2-coloreo de H tal que $f(v_i) = 1$ y $f(w_i) = 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por Propiedad 1.1, una biclique contiene a v_i si y sólo si contiene a w_i . Luego, toda biclique es bicromática. \square

Esto nos muestra que no es factible enfocar el problema k -BICLIQUE-COLORING tratando de encontrar soluciones locales.

En este trabajo estudiamos la complejidad computacional del problema k -BICLIQUE-COLORING, y buscamos familias de grafos donde este problema sea computacionalmente menos costoso que en el caso general.

1.5. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 mostramos que k -BICLIQUE-COLORING es Σ_2^P -Completo, incluso para grafos $K_{3,3}$ -free. Para esto, estudiaremos una reducción de QSAT₂ a k -BICLIQUE-COLORING, y luego probaremos que el problema k -BICLIQUE-COLORING se reduce en $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING.

En el Capítulo 3 veremos algunas clases de grafos donde k -BICLIQUE-COLORING es NP-Completo. En particular, veremos que es NP-Completo para grafos split. Observaremos luego que el problema es NP para la familia $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free, con i_0, j_0

constantes, y en particular que es NP-Completo para la familia $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free.

En el Capítulo 4 veremos algunas clases de grafos donde k -BICLIQUE-COLORING se puede resolver en tiempo polinomial. En particular, mostramos cómo para algunos casos de grafos split, entre ellos los threshold, y los grafos cordales *diamond*-free, se puede resolver en tiempo lineal. Luego veremos algunas familias de grafos en las que conocemos el número biclique-cromático.

El Capítulo 5 contiene las conclusiones de esta tesis, incluyendo una comparación entre CLIQUE-COLORING y BICLIQUE-COLORING y se plantean problemas abiertos como trabajo futuro.

2 Complejidad computacional de biclique-coloreo

En este capítulo exploramos la complejidad del problema k -BICLIQUE-COLORING en el caso general. Este análisis tiene sus raíces en el estudio de k -CLIQUE-COLORING, problema para el que se determinó que la complejidad es Σ_2^p -Completo en 2004 [Mar04].

La estructura general de la demostración es la misma que en el caso de clique coloreo: en primer lugar vemos que k -BICLIQUE-COLORING está en Σ_2^p para todo $k \geq 2$. Luego, por medio de una reducción del problema QSAT₂ a 2-BICLIQUE-COLORING, probamos que 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo. Para mostrar que k -BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo para todo $k \geq 3$, presentamos una reducción de $(k - 1)$ -BICLIQUE-COLORING a k -BICLIQUE-COLORING.

Debido a que los grafos que construimos para realizar ambas demostraciones son $K_{3,3}$ -free y no poseen pares de vértices que sean gemelos, podemos afirmar que la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING se preserva incluso para la clase de grafos con estas características.

Ambas reducciones siguen las ideas esenciales subyacentes a las correspondientes para clique coloreo, pero adaptadas al contexto de bicliques.

2.1. Preliminares

Antes de establecer la complejidad computacional del problema de biclique coloreo, será necesario repasar la definición y complejidad del problema QSAT₂, y definir dos nuevas estructuras que utilizaremos para las demostraciones de este capítulo: los preservadores- r y los alternadores.

2.1.1. El problema QSAT₂

Para probar la Σ_2^p -Complejidad de 2-BICLIQUE-COLORING, construiremos una reducción polinomial a partir de QSAT₂. La definición de QSAT₂ es la siguiente.

QSAT₂:

Entrada: Una fórmula $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ de $n + m$ variables en forma 3DNF, con $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$.

Pregunta: ¿Existe un vector $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$ tal que $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ sea verdadera para todo $\vec{y} \in \{0, 1\}^m$? Es decir, ¿ $\forall \vec{y} \Phi(\vec{x}, \vec{y})$ es satisfacible?

Este problema es en realidad un caso particular de la generalización QSAT_{*i*}. Para cada *i*, QSAT_{*i*} toma *i* conjuntos de variables, y la pregunta es si la fórmula que tiene cuantificadores existenciales y universales alternados sobre estos conjuntos de variables es satisfacible. Meyer y Stockmeyer [SM73] probaron que QSAT_{*i*} es Σ_i^p -Completo para todo *i*. En particular, QSAT₂ es Σ_2^p -Completo.

Entonces, como mencionamos anteriormente, basta encontrar una reducción polinomial de QSAT₂ a un problema $\Pi \in \Sigma_2^p$ para ver que Π es un problema Σ_2^p -Completo.

2.1.2. Preservadores y alternadores

En este capítulo requeriremos la construcción de grafos con ciertas restricciones sobre el biclique coloreo. En particular, deseamos poder afirmar, por un lado, que dos vértices particulares deben tener el mismo color en cualquier *k*-biclique-coloreo, y por otro lado, para el caso de $k = 2$, que deben tener color distinto.

Para garantizar que dos vértices *v* y *w* tienen el mismo color en cualquier *k*-biclique-coloreo *f* de *G*, tiene que existir una biclique que sea necesariamente monocromática si fueran de colores diferentes. Esto quiere decir que para cada color de *w* distinto de *f*(*v*), existe una biclique monocromática.

Una manera de lograr esto es utilizando la estructura que definiremos a continuación (ver Figura 2.1).

Definición 2.1 (semi-preservador-*k*). Decimos que un vértice *v* se conecta por un semi-preservador-*k* a otro vértice *w*, si existe el siguiente subgrafo *H* en *G*: Se tienen C_1, \dots, C_{k-1} , grafos completos de tamaño *k*. El vértice *v* es totalmente adyacente a C_i , para todo $1 \leq i \leq k - 1$. A su vez, existen $k - 1$ vértices d_1, \dots, d_{k-1} tales que d_i es totalmente adyacente a C_i para $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Los vértices d_1, \dots, d_{k-1} forman un completo *D*, y *w* es totalmente adyacente a *D*. Ningún vértice de *H*, salvo *v* y *w*, es adyacente a otro vértice de *G*. Notar que, en particular, *v* y *w* pueden ser adyacentes.

Veamos que, efectivamente, si dos vértices *v* y *w* están conectados por un semi-preservador-*k*, entonces deben tener el mismo color en cualquier *k*-biclique-coloreo.

Lema 2.1. Si un vértice *v* de un grafo *G* se conecta por un semi-preservador-*k* a un vértice $w \neq v$, entonces *v* y *w* tienen el mismo color en cualquier *k*-biclique-coloreo de *G*.

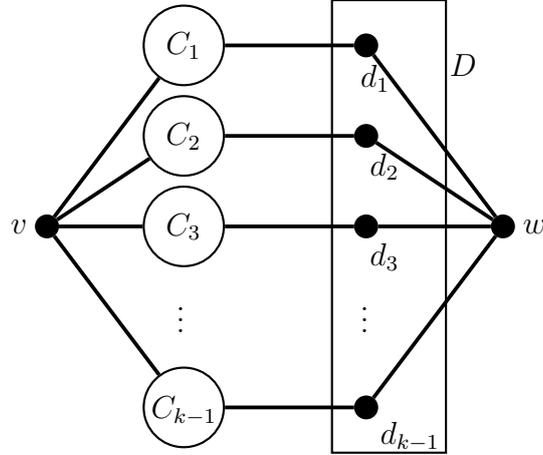


Figura 2.1: Un semi-preservador- k conectando los vértices v y w .

Demostración. Sean $v, w, D = \{d_1, \dots, d_{k-1}\}, C_1, \dots, C_{k-1}$ los vértices y aristas del semi-preservador- k como en la Figura 2.1. En primer lugar, notemos que C_i es un bloque para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Luego, por Lema 1.1, el conjunto C_i contiene exactamente un vértice de cada color.

Consideremos un k -bicoloreo de G y supongamos que en este, el vértice v tiene color $\rho \in \{1, \dots, k\}$. Ningún vértice $d_i \in D$ puede ser de color ρ , debido a que si d_i fuera de color ρ , entonces $\{\{c_i\}, \{v, d_i\}\}$ sería una biclique monocromática, donde c_i es el vértice de C_i de color ρ .

Por otra parte, ningún par de vértices $d_i, d_j \in D$ pueden ser del mismo color, debido a que si fueran ambos de color $\phi \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\{\{d_j\}, \{d_i, c_j\}\}$ sería una biclique monocromática, donde c_j es el vértice de C_j de color ϕ .

En resumen, v es de color ρ , y D contiene exactamente un vértice por cada color distinto a ρ en el k -bicoloreo.

El vértice w , entonces, debe tener el color ρ , dado que si fuera de color $\gamma \in \{1, \dots, k\} \setminus \rho$, la biclique $\{\{d_j\}, \{c_j, w\}\}$ sería monocromática, donde d_j es el vértice de D de color γ y c_j es el vértice de C_j de color γ . \square

Si bien un semi-preservador- k efectivamente fuerza el mismo color sobre dos vértices, posee dos desventajas: es asimétrico, y no es k -bicoloreable. Para ver esto último, observemos que la estrella centrada en v que incluye, para cada i , al vértice de C_i del mismo color que v , es una biclique monocromática.

Nos gustaría, en cambio, contar con una estructura simétrica que, además de preservar el color entre dos vértices, se pueda k -bicolorear, independientemente de la estructura del resto del grafo.

Entonces, para las demostraciones en este capítulo utilizaremos una nueva estructura basada en los semi-preservadores- r , que definiremos a continuación.

Definición 2.2 (preservador- r). Decimos que dos vértices, v y w en G , se hallan *conectados por un preservador- k* , si existe el siguiente subgrafo H de G :

- Existen dos vértices adyacentes z, z' , en H .
- El vértice z está conectado por un semi-preservador- k a v , y conectado por un semi-preservador- k a w .
- Ningún vértice de H , salvo v y w , es adyacente a otro vértice de G .

Nuevamente, notar que v y w pueden ser adyacentes en G .

Nos referiremos a los vértices conectados por un preservador- k como sus *extremos*, y al resto de los vértices del preservador- k como sus *vértices internos*. En la Figura 2.2 vemos la estructura de un preservador- k .

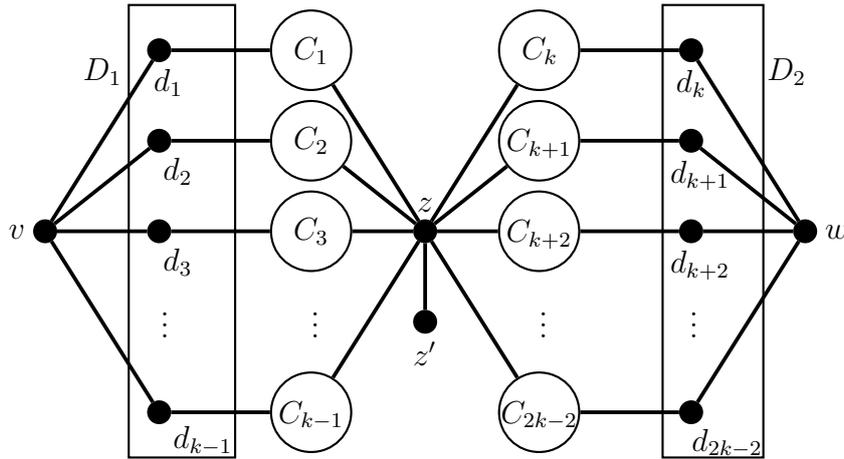


Figura 2.2: Un preservador- k conectando los vértices v y w .

Notación. Cuando dos vértices v y w están conectados por un preservador- k , los notaremos con una arista punteada que contiene la etiqueta “ \equiv_k ”. Si v y w son además adyacentes, entonces utilizamos una arista que contiene la etiqueta “ \equiv_k ”. La Figura 2.3 muestra la notación para preservadores- k .

Por Lema 2.1, en cualquier k -bicoloreo, el vértice v tiene el mismo color que z , que a su vez tiene el mismo color que w . Registramos este hecho en el siguiente lema.

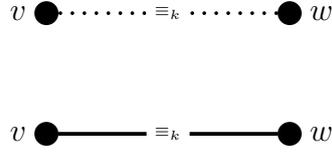


Figura 2.3: La notación que emplearemos para indicar que dos vértices v y w están conectados por un preservador k . Arriba, el caso cuando v y w no son adyacentes, y abajo el caso cuando lo son.

Lema 2.2. *Todo par de vértices v, w en un grafo G que están conectados por un preservador- k tienen el mismo color en cualquier k -biclique-coloreo de G .*

Ahora observemos que un preservador- k en un grafo G se puede k -biclique-colorear de forma tal que sus vértices internos no formen bicliques monocromáticas, independientemente de la estructura de G .

Lema 2.3. *Sea G tal que P es un preservador- k que une a v y $w \in G$. Entonces, los vértices de P se pueden k -biclique-colorear de manera tal que todas las bicliques de G que contienen algún vértice interno de P son policromáticas.*

Demostración. Sean $v, w, D_1, D_2, C_1, \dots, C_{2k-2}, z$ y z' como en la Figura 2.2. Utilizamos el siguiente k -coloreo.

- v, w y z tienen el mismo color $\phi \in \{1, \dots, k\}$.
- Cada C_i ($1 \leq i \leq 2k - 2$) se colorea usando los k colores disponibles.
- Los conjuntos D_1 y D_2 se colorean usando los colores $\{1, \dots, k\} \setminus \phi$.
- El vértice z' es de cualquier color en $\{1, \dots, k\} \setminus \phi$.

Ahora veamos que sea cual sea la estructura de G , no hay bicliques monocromáticas en G que incluyan un vértice interno de P .

Debido a que ningún vértice interno de P es adyacentes a algún vértice de $G \setminus P$, los C_4 inducidos que incluyen algún vértice interno de P y algún vértice de $G \setminus P$ deben incluir a v y w . Sin embargo, ningún vértice interno de P es adyacente simultáneamente a v y w . Tampoco hay ningún C_4 inducido formado enteramente por vértices de P , incluso cuando v y w son adyacentes. Por lo tanto, las únicas bicliques que contienen vértices internos de P son estrellas centradas en algún vértice de P .

Revisemos que no hay estrellas monocromáticas centradas en ningún vértice de P .

- Las estrellas centradas en los extremos deben tener como punta algún $d_i \in D_1 \cup D_2$. Como d_i tiene un color distinto a ϕ , estas estrellas son policromáticas.

- La estrella centrada en $d \in D_j$, $j \in \{1, 2\}$, incluye a algún vértice $d' \in D_j$ o al extremo de P al que es adyacente. Como tanto d' como los dos extremos de P tienen colores distintos al de d , entonces esta biclique estrella es policromática.
- Las estrellas centradas en un vértice de C_i , $i \in \{1, \dots, 2k - 2\}$, siempre incluyen a z y a d_i . Como z es de un color diferente a d_i , la biclique es policromática.
- La biclique centrada en z incluye a z' , que coloreamos de color diferente, por lo que la biclique es policromática.

Entonces este k -coloreo no produce bicliques monocromáticas que incluyan algún vértice interno de P . \square

El Lema 2.3 nos indica que podemos abstraernos de los preservadores- k al buscar un k -biclique-coloreo de un grafo, ya que el esquema de coloreo mostrado hace que sus vértices internos estén siempre en bicliques policromáticas.

Es importante notar que estamos probando que bajo el coloreo del Lema 2.3 las estrellas centradas en los extremos de un preservador- k siempre son policromáticas. Utilizaremos esto más adelante.

Los preservadores- k nos permiten definir grafos donde en cualquier k -biclique-coloreo, ciertos vértices son necesariamente del mismo color. Otra construcción en la que estamos interesados es una que, para cualquier 2-biclique-coloreo, permita asegurarnos que dos vértices son de color distinto.

Observemos el semi-preservador-2. En este caso, entre v y w sólo existe un completo $C = \{c_1, c_2\}$ y un vértice d . En la Figura 2.4 podemos ver cómo es su estructura.

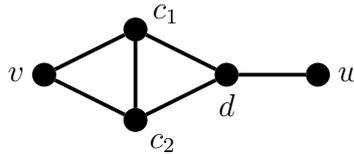


Figura 2.4: Un semi-preservador-2 conectando los vértices v y w .

Tomando el semi-preservador-2, vamos a definir una nueva estructura que nos permitirá garantizar que dos vértices son de color distinto en cualquier 2-biclique-coloreo.

Definición 2.3 (alternador). Decimos que dos vértices v y w de G están *conectados por un alternador* si existe el siguiente subgrafo H de G :

- Existe un vértice z en H , tal que z está conectado por un semi-preservador-2 a w .
- El vértice v es adyacente a z .

- Ningún vértice de H , salvo v y w , es adyacente a otro vértice de G .

En la Figura 2.5 vemos la estructura de un alternador. Notar que en este caso la construcción no depende de un parámetro, ya que los alternadores sólo se definen para 2-biclique-coloreos. Como en el caso de los preservadores- k , llamaremos a v y w *extremos* del alternador, y al resto de los vértices que lo componen *vértices internos*. Veamos ahora que los alternadores efectivamente garantizan que sus extremos son de colores distintos.

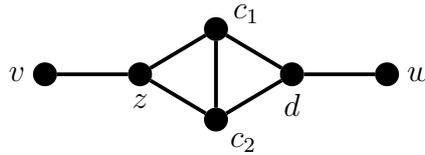


Figura 2.5: Un alternador conectando los vértices v y w

Notación. Cuando dos vértices v y w están conectados por un alternador, los notaremos con una arista punteada que contiene la etiqueta “ \times ”. Si v y w son además adyacentes, entonces utilizamos una arista que contiene la etiqueta “ \times ”. La Figura 2.6 muestra la notación para alternadores.

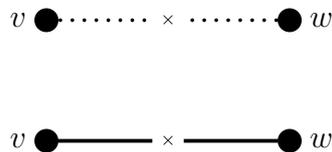


Figura 2.6: La notación que emplearemos para indicar que dos vértices v y w están conectados por un alternador. Arriba, el caso cuando v y w no son adyacentes, y abajo el caso cuando lo son.

Lema 2.4. *Todo par de vértices v y w conectados por un alternador en un grafo G tienen colores distintos en cualquier 2-biclique-coloreo de G .*

Demostración. Sean v , w , d , z , c_1 y c_2 como en la Figura 2.5 y consideremos un 2-biclique-coloreo de G . En primer lugar notemos que como c_1 y c_2 son vértices mellizos, por Lema 1.1, son de distinto color.

El vértice z está conectado por un semi-preservador-2 a w . Entonces, por Lema 2.2, deben ser del mismo color. Ahora, v es adyacente a z . Si v fuera del mismo color que

z , entonces $\{\{z\}, \{v, c_i\}\}$ sería una biclique monocromática, donde c_i ($i \in \{1, 2\}$) es el vértice del mismo color que z . Por lo tanto v tiene color distinto a z . \square

Veamos además que, como en el caso de los preservadores- r , se puede 2-biclique-colorear un alternador de manera tal que sus vértices internos no estén en ninguna biclique monocromática, independientemente de la estructura del resto del grafo.

Lema 2.5. *Sean v y w dos vértices de un grafo G que se encuentran unidos por un alternador A . Entonces, los vértices de A se pueden 2-colorear de manera tal que todas las bicliques de G que contienen algún vértice interno de A son bicromáticas.*

Demostración. Sea $A = \{v, w, z, d, c_1, c_2\}$ con sus vértices como en la Figura 2.5. Utilizamos el siguiente 2-coloreo para los vértices de A :

- Los vértices v y w llevan colores distintos.
- El vértice d se colorea con el mismo color que v .
- El vértice z se colorea con el mismo color que w .
- El vértice c_1 se colorea con el color 1, y c_2 con el color 2.

Veamos que toda biclique de G con algún vértice interno de A es bicromática.

Como ningún vértice interno de A es adyacente con los vértices de $G \setminus A$, y no forman ningún C_4 , las únicas bicliques que hay que revisar son las estrellas centradas en algún vértice de A :

- Las estrellas centradas en v incluyen a z , que es de color distinto a v . Análogamente, las estrellas centradas en w incluyen a d , que es de color distinto a w .
- Las estrellas centradas en z incluyen a v , que es de color distinto a v . Análogamente, las estrellas centradas en d incluyen a w , que es de color distinto a v .
- Las estrellas centradas en c_1 o en c_2 siempre incluyen a d y z , que son de colores distintos entre sí, así que son bicromáticas.

Esto muestra que todas las bicliques que incluyen algún vértice interno de A son bicromáticas. \square

El Lema 2.5, entonces, nos dice cómo 2-biclique-colorear un alternador. La Figura 2.7 muestra cómo quedan coloreados los vértices de un alternador luego de aplicar el esquema del Lema 2.5.

Ahora, utilizando los preservadores- k , alternadores, y los Lemas 2.2–2.5, estamos en condiciones de construir los grafos que nos permiten determinar la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING.

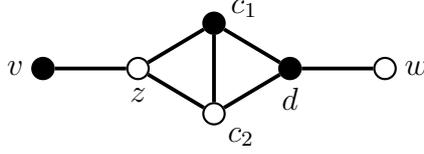


Figura 2.7: Alternador coloreado según el esquema propuesto en el Lema 2.5.

2.2. Complejidad de biclique coloreo

Vamos a probar que k -BICLIQUE-COLORING está en Σ_2^p -Completo en el caso general. El esquema de esta demostración es el siguiente. Primero observamos que el problema está en Σ_2^p . Luego, vemos que QSAT₂ es polinomialmente reducible a 2-BICLIQUE-COLORING, mostrando que 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo.

Una vez probado que 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo, probamos que para todo $k \geq 2$, k -BICLIQUE-COLORING es reducible en tiempo polinomial a $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING, mostrando por lo tanto que para todo $k \geq 2$, k -BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo.

Vamos a ver, además, que estas mismas demostraciones nos permiten afirmar que el problema se mantiene en Σ_2^p incluso para la clase de grafos $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos.

Comencemos mostrando que k -BICLIQUE-COLORING es un problema que está en Σ_2^p .

Teorema 2.1. *El problema k -BICLIQUE-COLORING pertenece a Σ_2^p , para todo $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.*

Demostración. Por Teorema 1.1, basta probar que el problema de verificación de un certificado positivo de k -BICLIQUE-COLORING es un problema en coNP. Un certificado positivo para k -BICLIQUE-COLORING de un grafo G es un coloreo de los vértices de G . Veamos que verificar que f es un k -biclique-coloreo es un problema en coNP.

Dado f , y un conjunto de vértices $B \subseteq G$, se puede verificar en tiempo polinomial si B es una biclique y si todos los vértices de B son del mismo color en f . Entonces, B es un certificado negativo para el problema de ver si f es un k -biclique-coloreo, y su verificación toma tiempo polinomial. Esto nos dice que la verificación de un k -biclique-coloreo es un problema en coNP.

Entonces, k -BICLIQUE-COLORING está en la clase de complejidad Σ_2^p . □

Una vez probado que k -BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p , pasamos a ver que 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo.

Teorema 2.2. *El problema 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo, incluso para la clase de grafos $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos.*

Demostración. Para ver que 2-BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo, tenemos que ver que el problema pertenece a la clase de complejidad Σ_2^p , y que hay un problema Σ_2^p -completo que se reduce polinomialmente a él. El hecho de que 2-BICLIQUE-COLORING $\in \Sigma_2^p$ lo probamos en el Teorema 2.1.

El problema a partir del cual mostraremos una reducción a 2-BICLIQUE-COLORING es QSAT₂. Dada una fórmula $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$, con ℓ cláusulas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell$ y $n + m$ variables, $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$, $\vec{y} = y_1, \dots, y_m$, construimos un grafo G que es 2-biclique-coloreable si y sólo si existe un $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$ tal que para todo $\vec{y} \in \{0, 1\}^m$, $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ es verdadera.

El grafo se construye de la siguiente manera (Ver Figura 2.8):

- Por cada variable x_i ($1 \leq i \leq n$), existen dos vértices adyacentes, x_i y \bar{x}_i , conectados por un alternador.
- Por cada variable y_j ($1 \leq j \leq m$), existen dos vértices adyacentes, y_j y \bar{y}_j , conectados por un preservador-2. Adicionalmente, para $j \in \{1, \dots, m-1\}$, \bar{y}_j se halla conectado a y_{j+1} por medio de un preservador-2.
- Por cada cláusula \mathcal{P}_k ($1 \leq k \leq \ell$), existe un vértice p_k . Los vértices p_1, \dots, p_ℓ conforman un completo, y, para todo $i \in \{1, \dots, \ell-1\}$, p_i está conectado por medio de un preservador-2 a p_{i+1} . Además, p_k es adyacente al vértice l que corresponde al literal l si y sólo si \bar{l} no es un literal de \mathcal{P}_k , para todo $l \in \{x_i, \bar{x}_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j, \bar{y}_j | 1 \leq j \leq m\}$. Es decir, p_k es adyacente a todos los vértices correspondientes a los literales de Φ , salvo aquellos cuya negación pertenece a \mathcal{P}_k .
- Existe un vértice, al que llamaremos *core*, adyacente a x_i , \bar{x}_i , y_j e \bar{y}_j , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.
- Existe un par de vértices adyacentes c_1 y c_2 , adyacentes a *core*, y adyacentes a p_k para todo $k \in \{1, \dots, \ell\}$. Notar que $\{p_1, \dots, p_\ell, c_1, c_2\}$ es un completo de tamaño $\ell + 2$.
- Existe un vértice c_3 , adyacente a c_1 y c_2 .
- Existe un vértice, al que llamaremos *colorset*, que está conectado por medio de un preservador-2 a \bar{y}_m , conectado por medio de un alternador a p_k , y conectado por medio de un alternador a c_3 .

Esto concluye la construcción de G . Es fácil ver que G puede ser construido en tiempo polinomial. En la Figura 2.8 se muestra un ejemplo de G para una fórmula Φ_0 .

Ahora veamos que G es 2-biclique-coloreable si y sólo si existe algún \vec{x} que satisface Φ para todo \vec{y} .

En primer lugar supongamos que existe algún \vec{x} que satisface Φ para todo \vec{y} . Definimos un 2-biclique-coloreo de G de la siguiente manera:

está contenida en el bipartito completo $B \cup \{p_k\}$, absurdo.

Para analizar las bicliques de G de la forma $K_{a,b}$, $a, b \geq 2$, vamos a probar que todos los C_4 que se forman en G son bicromáticos, ya que el grafo C_4 es $K_{2,2}$ por lo tanto toda biclique de la forma $K_{a,b}$, $a, b \geq 2$ de G incluye un C_4 .

- Los vértices internos de los preservadores-2 y los alternadores no están contenidos en ningún C_4 de G .
- Los C_4 que contienen a x_i y \bar{x}_i , son de la forma x_i, \bar{x}_i, p_j, p_k , con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j, k \in \{1, \dots, l\}$, tal que $x_i \in \mathcal{P}_k$ y $\bar{x}_i \in \mathcal{P}_j$. Como x_i es de color distinto a \bar{x}_i , estos C_4 son bicromáticos. De manera análoga, los C_4 que contienen a y_i y \bar{y}_i son bicromáticos.
- Los C_4 que contienen a $core$ y p_k , con $k = 1, \dots, l$, son de la forma $core, p_k, l_a, l_b$, donde $l_a, l_b \in \{x_i, \bar{x}_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{y_i, \bar{y}_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$, $l_a \neq l_b$. En este caso, como $core$ es de color 1, mientras que p_k es de color 2 para todo k , estos C_4 son bicromáticos.
- Observemos que aunque \bar{y}_m es un caso especial porque pertenece a un preservador-2, ningún vértice interno de un preservador-2 pertenece a un C_4 , por lo que \bar{y}_m no pertenece a ningún C_4 que no hayamos contemplado.

Es fácil ver que c_3 y $colorset$ no pertenecen a ningún C_4 de G , y que todos los C_4 inducidos que contienen a $core, p_k$ para algún $k \in \{1, \dots, l\}$, a c_1 o a c_2 también contienen algún vértice $l \in \{x_i, \bar{x}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, \bar{y}_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, por lo que ya fueron considerados. Entonces, no quedan C_4 inducidos en G potencialmente monocromáticos.

Dado que cualquier biclique de la forma $K_{a,b}$, $a, b \geq 2$ contiene un C_4 inducido, y todos los C_4 de G son bicromáticos, no pueden haber bicliques monocromáticas de este tipo.

Veamos ahora que dado un coloreo válido de G , podemos definir una valuación que satisface Φ para todo valor de \vec{y} .

Sea f un 2-biclique-coloreo de G y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(colorset) = 1$. Definamos el vector \vec{x} de manera tal que x_i es verdadera si y sólo si $f(x_i) = 1$. Dado que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i y \bar{x}_i están conectados por un alternador, por Lema 2.4, son de color distinto. Por lo tanto, el vector \vec{x} está bien definido.

Para ver que esta valuación cumple que para cualquier \vec{y} , se satisface $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$, tomemos un \vec{y}_0 y consideremos $X = \{x_i \mid x_i \text{ es verdadera en } \vec{x}\} \cup \{\bar{x}_i \mid x_i \text{ es falsa en } \vec{x}\}$, y por otro lado $Y = \{y_j \mid y_j \text{ es verdadera en } \vec{y}_0\} \cup \{\bar{y}_j \mid y_j \text{ es falsa en } \vec{y}_0\}$.

Todos los vértices de X son de color 1.

Por otra parte, el vértice $colorset$ es de color 1 y está conectado por medio de un preservador-2 al vértice \bar{y}_m . Dado que para todo $j \in \{1, \dots, m-1\}$, \bar{y}_j está conectado a y_{j+1} por un preservador-2 y para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ y_j y \bar{y}_j están conectados por un preservador-2, todos los vértices de Y son de color 1.

De manera similar, como *colorset* está conectado por un alternador a p_ℓ , y como para todo $k \in \{2, \dots, \ell\}$, p_k está conectado por medio de un preservador-2 a p_{k-1} , entonces para todo $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $f(p_k) = 2$.

Además, dado que los vértices c_1 y c_2 son mellizos, por Lema 1.1 deben ser de colores distintos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(c_1) = 1$ y $f(c_2) = 2$.

También vale que $f(c_3) = 2$, dado que c_3 se halla conectado por un alternador a *colorset*. Esto hace que *core* sea de color 1, ya que si fuera de color 2, las bicliques estrella $\{\{c_2\}, \{core, c_3, p_k\}\}$ ($k \in \{1, \dots, \ell\}$) serían bicliques monocromáticas.

Entonces, la estrella en G centrada en *core*, que tiene por puntas a todos los vértices de $X \cup Y$, y a c_1 , tiene todos sus vértices de color 1. Como f es un 2-biclique-coloreo, esta estrella no puede ser una biclique, por lo tanto existe al menos un vértice z que es totalmente adyacente a X , totalmente adyacente a Y , adyacente a c_1 , y de color 2. Este vértice z debe ser igual a p_q para algún $q \in \{1, \dots, \ell\}$.

Si el vértice p_q es adyacente a todo vértice de X , quiere decir, por construcción de G , que $\{l_1, l_2, l_3\} \subseteq X$, donde $\mathcal{P}_q = (l_1 \wedge l_2 \wedge l_3)$. Pero entonces, l_1 , l_2 y l_3 son verdaderas, implicando que $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ es verdadera.

Dado que no establecimos restricciones en la elección de \vec{y}_0 , el vector \vec{x} efectivamente satisface Φ para todo \vec{y} .

Por último, veamos que el grafo G no contiene ningún $K_{3,3}$ ni vértices gemelos.

Para ver que G no posee ningún $K_{3,3}$, recordemos que los vértices internos de los preservadores-2 y los alternadores no pertenecen a ningún C_4 , y por lo tanto tampoco a ningún $K_{3,3}$, y veamos que los C_4 que se forman en G no se pueden extender a un $K_{3,3}$.

- En el caso de los C_4 de la forma x_i, \bar{x}_i, p_j, p_k , con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j, k \in \{1, \dots, l\}$, vemos que dado que no hay otro vértice en G que sea adyacente simultáneamente a x_i y a p_j , o a \bar{x}_i y a p_k , no se puede completar un $K_{3,3}$. Análogamente, los C_4 que contienen a y_i y \bar{y}_i con $i \in \{1, \dots, m\}$, también son biclique.
- En el caso de los C_4 de la forma *core*, p_k, l_a, l_b vemos que, si bien puede existir l_c no adyacente a l_a y l_b y adyacente a *core* y p_k , no hay en G otro vértice que sea adyacente simultáneamente a l_a y l_b , y sea no adyacente a p_k . Por lo tanto, no se puede formar un $K_{3,3}$.

Por último, para ver que G no posee vértices gemelos, notemos que todo vértice que pertenece a un preservador-2 es adyacente a vértices internos de dicho preservador-2, y como no hay vértices gemelos internos en un preservador-2, no puede tener vértices gemelos en G . Análogamente, si pertenece a un alternador, tampoco puede tener vértices gemelos en G .

Los únicos vértices que no pertenecen a un preservador-2 o un alternador en G son *core*, c_1 , y c_2 . De estos vértices, sólo c_2 y c_3 tienen los mismos vecinos, pero como son adyacentes, son mellizos.

Por lo tanto, no hay ningún par de vértices de G son gemelos. El grafo G es entonces $K_{3,3}$ sin vértices gemelos.

□

Ahora que probamos que 2-BICLIQUE-COLORING está en Σ_2^p -Completo, vamos a probar que k -BICLIQUE-COLORING está en Σ_2^p -Completo para todo $k \geq 3$, mostrando que k -BICLIQUE-COLORING se reduce polinomialmente en $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING.

Es decir, vamos a mostrar cómo, dado un grafo G , podemos construir otro grafo H tal que G es k -biclique-coloreable si y sólo si H es $(k + 1)$ -biclique-coloreable.

La idea de la reducción es construir H de manera que exista un conjunto de vértices W en H tal que W induce G . Si para cada biclique de G , los vértices correspondientes de W también inducen una biclique, y por otro lado H requiere un color extra que no se puede utilizar en los vértices de W , entonces estaríamos en condiciones de afirmar que H es $(k + 1)$ -biclique-coloreable si y sólo si G es k -biclique-coloreable.

Teorema 2.3. *El problema k -BICLIQUE-COLORING se puede reducir a $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING en tiempo polinomial.*

Demostración. Sea G grafo de n vértices v_1, \dots, v_n . Veamos la construcción del grafo H , tal que H es $(k + 1)$ -biclique-coloreable si y sólo si G es k -biclique-coloreable.

- Hay n vértices w_1, \dots, w_n en H , tales que w_i es adyacente a w_j en H si y sólo si v_i es adyacentes a v_j en G .
- Por cada $i = 1, \dots, n$, existe en H un vértice z_i , tal que z_i es totalmente adyacente a $N[w_i] \cap \{w_1, \dots, w_n\}$.
- Para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, z_i y z_{i+1} están conectados por un preservador- $(k + 1)$.

Esto concluye la construcción de H . Es sencillo ver que esta construcción se puede realizar en tiempo polinomial. La Figura 2.10 muestra un ejemplo de la construcción H para el grafo C_5 .

Veamos que las bicliques de G y de H cumplen la siguiente propiedad.

Propiedad 2.1. *Un conjunto de vértices B es una biclique de G si y sólo si $B' = \{w_i \mid v_i \in B\}$ es una biclique de H .*

Demostración. Dado que para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, v_i es adyacente a v_j en G si y sólo si w_i es adyacente a w_j en H , obtenemos que si B es una biclique, entonces B' es un bipartito completo, contenido en una biclique B'' .

Supongamos, para obtener una contradicción, que $B' \subset B''$. Dado que ningún vértice interno de un preservador- $(k + 1)$ es adyacente a un vértice de B' , B'' contiene a z_i para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Supongamos primero que $w_i \in B''$. Como para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, el vértice z_i es adyacente a w_j si y sólo si w_i es adyacente a w_j , obtenemos que $B'' \cap \{w_1, \dots, w_n\} = \{w_i\}$, ya que de otro modo se formaría un triángulo. Dado que $B' \subset B''$, esto implica

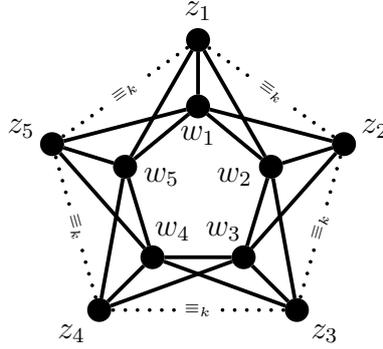


Figura 2.10: Construcción de H para reducción de k -BICLIQUE-COLORING a $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING, usando como entrada el grafo C_5 .

que $B = \{v_i\}$ o $B = \emptyset$. En ambos casos, B por definición no es biclique, por lo que llegamos a un absurdo.

Ahora supongamos que $w_i \notin B'$. Como $z_i \in B''$, debe existir una arista que conecta a z_i con un vértice de B' w_j . En la partición de B'' que incluye a w_j , todos los elementos deben ser adyacentes a z_i , pues si no z_i no podría pertenecer a la biclique. Por otra parte, en la partición de B'' donde no está w_j , ningún elemento debe ser adyacente a z_i . Pero entonces, en G , el vértice $v_i \notin B$ es adyacente a todos los vértices de la partición de B que incluye a v_j , y no adyacente a ningún vértice de la partición de B que no incluye a v_j . Es decir, B no es un bipartito completo maximal, lo cual es absurdo.

Para la recíproca, basta observar que el subgrafo H' de H inducido por w_1, \dots, w_n es isomorfo a G . Por lo tanto, todas las bicliques de H con vértices de H' son bicliques de H' . Luego, si B' es una biclique de H' , B es una biclique de G . \square

Ahora veamos que H es $(k+1)$ -biclique-coloreable si y sólo si G es k -biclique-coloreable.

Partiendo de la hipótesis de que G admite un k -biclique-coloreo f , definimos el coloreo $g : V(H) \rightarrow \{1, \dots, k + 1\}$ de la siguiente manera:

- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $g(w_i) = f(v_i)$.
- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $g(z_i) = k + 1$.
- Los preservadores- $(k + 1)$ entre los vértices de $\{z_1, \dots, z_n\}$ se colorean según lo indica el Lema 2.3. Notar que esto es consistente debido a que para todo i , z_i es del color $k + 1$.

Veamos que g es efectivamente un $(k + 1)$ -biclique-coloreo de H . Sea B una biclique de H . Analicemos los siguientes casos según los vértices que conforman B .

- Si B contiene un vértice interno de un preservador- $(k + 1)$, entonces B es una biclique bicromática por Lema 2.3.

- Si $B \cap \{w_1, \dots, w_n\} \neq \emptyset$ y $B \cap \{z_1, \dots, z_n\} \neq \emptyset$, entonces B es policromática, ya que $g(z_j) = k + 1$ para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$, y $g(w_i) \neq k + 1$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$.
- El caso donde $B \subseteq \{z_1, \dots, z_n\}$ no es posible porque $\{z_1, \dots, z_n\}$ es un conjunto independiente.
- Si $B \subseteq \{w_1, \dots, w_n\}$, entonces por la Propiedad 2.1, el conjunto de vértices $B' = \{v_i \mid w_i \in B\}$ es una biclique de G . Dado que f es un k -biclique-coloreo de G , B' es una biclique policromática, y como para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $g(w_i) = f(v_i)$, B debe ser una biclique policromática.

Entonces a partir de un k -biclique-coloreo válido de G hemos obtenido un $(k + 1)$ -biclique-coloreo válido para H .

Para la recíproca, tomemos un $(k + 1)$ -biclique-coloreo válido de H . Dado que para $i = 1, \dots, n - 1$, z_i está conectado por un preservador- $(k + 1)$ con z_{i+1} , por Lema 2.2 todos los vértices z_1, \dots, z_n deben ser del mismo color ρ , para $\rho \in \{1, \dots, k + 1\}$.

Sea B la estrella centrada en w_i con puntas $\{z_j \mid w_j \in N[w_i]\}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Por construcción, B es una biclique de H . Si w_i tuviera color ρ , entonces todos los vértices de B serían de color ρ , lo cual es absurdo. Luego, w_i tiene color distinto a ρ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces, si a v_i le asignamos el color de w_i , en G obtenemos que:

- Todas las bicliques de G son policromáticas, pues por Propiedad 2.1, si el conjunto $\{v_a, \dots, v_q\}$ es una biclique en G , $\{w_a, \dots, w_q\}$ es una biclique en H , y en H todas las bicliques son policromáticas.
- Ningún vértice de G es de color ρ , pues w_j es de color distinto a ρ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces el coloreo propuesto para G es un biclique-coloreo que utiliza $(k + 1) - 1 = k$ colores, siendo por lo tanto un k -biclique-coloreo. \square

Para ver que k -BICLIQUE-COLORING se mantiene en la clase de complejidad Σ_2^p -Completo incluso para grafos $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos, vamos a mostrar que la construcción que presentamos en el Teorema 2.3 no genera un $K_{3,3}$ ni un par de vértices gemelos.

Propiedad 2.2. *El problema k -BICLIQUE-COLORING para grafos $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos se reduce en el problema $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING para grafos $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos.*

Demostración. Vamos a tomar la construcción del grafo H presentada en la demostración del Teorema 2.3 y vamos a probar que si el grafo de entrada G es $K_{3,3}$ -free y no posee vértices gemelos, entonces H también es $K_{3,3}$ -free sin vértices gemelos.

Supongamos que H contiene un subgrafo H' que induce un $K_{3,3}$. Dado que los vértices de los preservadores- $(k+1)$ no pertenecen a ningún C_4 , $H' \subseteq \{w_1, \dots, w_n\} \cup \{z_1, \dots, z_n\}$.

Si $z_j \in H'$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $w_j \notin H'$, dado que como $N[w_j] \subseteq N[z_j]$, si w_j perteneciera a H' se formaría un triángulo en el $K_{3,3}$. Sin embargo, $N[w_j] \cap H' = N[z_j] \cap H'$ por construcción. Por lo tanto, $(H' \setminus \{z_j\}) \cup \{w_j\}$ induce un $K_{3,3}$ en H . En consecuencia, $\{v_i \mid \{w_i, z_i\} \cap H' \neq \emptyset\}$ induce un $K_{3,3}$ en G .

Para ver que H tampoco contiene vértices gemelos, basta con notar que todos los vértices pertenecientes a un preservador- $(k+1)$ P siempre son adyacentes a vértice internos de P . Por lo tanto, los vértices que pertenecen a preservadores- $(k+1)$ no poseen gemelos. Luego, si dos vértices x, y son gemelos de H entonces $\{x, y\} = \{w_i, w_j\}$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y, consecuentemente, v_i y v_j son gemelos en G . □

3 Clases de grafos con biclique-coloreo \in NP

En este capítulo estudiaremos familias de grafos para las cuales k -BICLIQUE-COLORING está en NP. En primer lugar, tomaremos la clase de grafos split, donde mostramos que k -BICLIQUE-COLORING es NP-Completo.

Luego, mostraremos que k -BICLIQUE-COLORING sobre grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free también está en NP, para i_0 y j_0 , constantes. Adicionalmente, veremos que 2-BICLIQUE-COLORING es NP-Completo para grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free.

3.1. Preliminares

Hemos visto que el caso general del problema k -BICLIQUE-COLORING es Σ_2^p -Completo. Esto se debe a que en general validar un k -biclique-coloreo es de por sí costoso, ya que un grafo G puede tener una cantidad exponencial de bicliques.

Esto no sucede en las clases de grafos donde podemos asegurar que la cantidad de bicliques es polinomial. En esos casos, se puede verificar un k -biclique-coloreo en tiempo polinomial, bajando la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING a NP.

Teorema 3.1. *Sea \mathcal{C} una clase de grafos tal que todo $G \in \mathcal{C}$ tiene una cantidad polinomial de bicliques. Entonces, k -BICLIQUE-COLORING restringido a la clase \mathcal{C} está en NP para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Un certificado positivo de k -BICLIQUE-COLORING para un grafo G es un k -coloreo de G . Verificar que un coloreo es un k -biclique-coloreo consiste en chequear que no hay bicliques monocromáticas.

Por hipótesis, la cantidad de bicliques de G es $O(n^{O(1)})$. Estas bicliques se pueden obtener en tiempo polinomial [DdFS07].

Luego, se puede observar cada biclique y certificar que en cada una existen al menos dos vértices de color distinto. Esto claramente se realiza en tiempo polinomial, garantizando que la verificación se hace en $O(n^{O(1)})$. \square

Por otra parte, en este capítulo mostraremos clases de grafos donde el problema de encontrar un k -biclique-coloreo es NP-Completo. Para esto utilizaremos una reducción a partir del problema NOT-ALL-EQUAL-3SAT. La definición de este problema es la siguiente.

NOT-ALL-EQUAL-3SAT:

Entrada: Fórmula Φ en forma normal conjuntiva tal que para cada cláusula $C \in \Phi$, $|C| = 3$.

Pregunta: ¿Existe una valuación de Φ tal que cada cláusula $C \in \Phi$ tenga por lo menos un literal verdadero y un literal falso?

El problema NOT-ALL-EQUAL-3SAT, comúnmente conocido con el nombre NAE-SAT, es NP-Completo [Sch78], y resulta particularmente útil para reducciones relacionadas con coloreo, debido a que es un problema de lógica que no sólo pide satisfacibilidad, sino que requiere que ciertos conjuntos de literales tengan valores de verdad diferentes.

3.2. Grafos split

La primera clase de grafos que estudiaremos es la de los grafos split. Un grafo G es *split* si sus vértices se pueden dividir en dos conjuntos, I y K , de tal manera que K induce un completo e I es un conjunto independiente. En la Figura 3.1 vemos un ejemplo de grafo split.

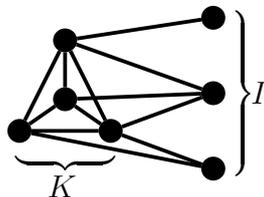


Figura 3.1: Ejemplo de grafo split. En este caso, $|K| = 4$ e $|I| = 3$.

Para el propósito de las demostraciones que vamos a hacer, conviene introducir la siguiente notación: si $G = (K \cup I, E)$ es un grafo split, los *satélites* de G son los vértices del conjunto I . Si $v \in K$, los *satélites de v* son los vértices del conjunto $S(v) = N(v) \cap I$. Adicionalmente, si $X \subseteq K$, los *satélites de X* , son los vértices del conjunto $S(X) = \cup_{v \in X} N(v) \cap I$.

La familia de grafos split, además, son exactamente los grafos $(2K_2, C_4, C_5)$ -free [Gol04] y, por lo tanto, las únicas bicliques posibles son estrellas, debido a que cualquier otra biclique contiene un C_4 . Además, cada estrella tiene a lo sumo dos vértices de K , dado que K es un completo y cualquier conjunto de tres vértices de K siempre forma un triángulo.

Esto nos da la pauta de que la cantidad de bicliques en los grafos split es polinomial.

Lema 3.1. *Los grafos split tienen $O(n + m)$ bicliques.*

Demostración. Como los grafos split no poseen subgrafos inducidos isomorfos a C_4 , las únicas bicliques posibles son estrellas.

Dado que un grafo split está compuesto por un completo K y un conjunto independiente I , las bicliques de un grafo split G se pueden categorizar en 2 conjuntos:

- Bicliques con exactamente una arista (v_1, v_2) de K . Por cada arista, hay a lo sumo dos bicliques: La estrella centrada en v_1 y la centrada en v_2 . Sabemos que no puede haber una biclique con dos aristas de K porque como K es un completo, para cualquier par de aristas que tomemos siempre existe la tercera que forma un triángulo.
- Bicliques sin aristas de K , que son estrellas centradas en un vértice v de K , donde las puntas son exactamente el conjunto $S(v)$.

Esto significa que hay $O(m)$ bicliques del primer grupo, y $O(n)$ del segundo, lo que quiere decir que la cantidad total de bicliques es $O(n + m)$. \square

Luego, por Teorema 3.1, k -BICLIQUE-COLORING está en NP para la clase de grafos split. Ahora veamos que es NP-Completo. Para esto, mostramos que el problema NP-Completo NAE-SAT se reduce polinomialmente en k -BICLIQUE-COLORING para grafos split.

Teorema 3.2. *Para todo $k \geq 2$, k -BICLIQUE-COLORING para grafos split es un problema NP-Completo.*

Demostración. El hecho de que k -BICLIQUE-COLORING está en NP en grafos split se sigue del Lema 3.1 y del Teorema 3.1.

Veamos que NAE-SAT se puede reducir a k -BICLIQUE-COLORING en tiempo polinomial. Para esto, partimos una instancia de NAE-SAT, consistente en una fórmula en forma normal conjuntiva Φ , con m cláusulas C_1, \dots, C_m y n variables x_1, \dots, x_n , donde cada una de las cláusulas tiene 3 literales. Nos referiremos como l_q , con $q \in \{1, \dots, 2n\}$, a los literales de Φ , de manera tal que para $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = l_i$ y $\bar{x}_i = l_{i+n}$. A partir de Φ construimos el siguiente grafo split $G = (K \cup I, E)$:

- Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existen dos vértices en I , x_i y \bar{x}_i . Denotamos l_q al vértice correspondiente al literal l_q , para $q \in \{1, \dots, 2n\}$.
- Existe en K , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, un conjunto X_i de k vértices x_{i1}, \dots, x_{ik} , adyacentes a x_i, \bar{x}_i , y a otros dos satélites llamados x_i -ancla₁ y x_i -ancla₂.
- Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe en K un conjunto C_j de k vértices c_{j1}, \dots, c_{jk} , adyacente a un par de satélites llamados c_j -ancla₁ y c_j -ancla₂. Adicionalmente, para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$, el vértice l_q es totalmente adyacente a C_j si el literal l_q pertenece a C_j , y no es adyacente a ningún vértice de C_j en caso contrario.

- Por cada $q \in \{1, \dots, 2n\}$, existe en K un conjunto L_q de k vértices $\ell_{q1}, \dots, \ell_{qk}$, con dos satélites llamados $\ell_q\text{-ancla}_1$ y $\ell_q\text{-ancla}_2$. Adicionalmente, para todo $q' \in \{1, \dots, 2n\} \setminus q$, $L_{q'}$ es totalmente adyacente a L_q .
- También existe en K un conjunto M de $k - 2$ vértices m_1, \dots, m_{k-2} , tal que para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$, el vértice ℓ_q es totalmente adyacente a M . Notemos que para el caso $k = 2$, este conjunto es vacío.
- Además, existe en K un conjunto A de k vértices a_1, \dots, a_k , tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, 2n\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, los vértices $x_i\text{-ancla}_\alpha$, $c_j\text{-ancla}_\beta$, y $\ell_q\text{-ancla}_\gamma$ son totalmente adyacentes a A .

Esto concluye la construcción de G . Notemos que esta construcción se puede realizar en tiempo polinomial, y que K está compuesto por $3n + m + 2$ bloques: X_i para $i \in \{1, \dots, n\}$; C_j para $j \in \{1, \dots, m\}$; L_q , para $q \in \{1, \dots, 2n\}$, M y A . En la Figura 3.2 vemos un esquema de G para cierta fórmula Φ_0 .

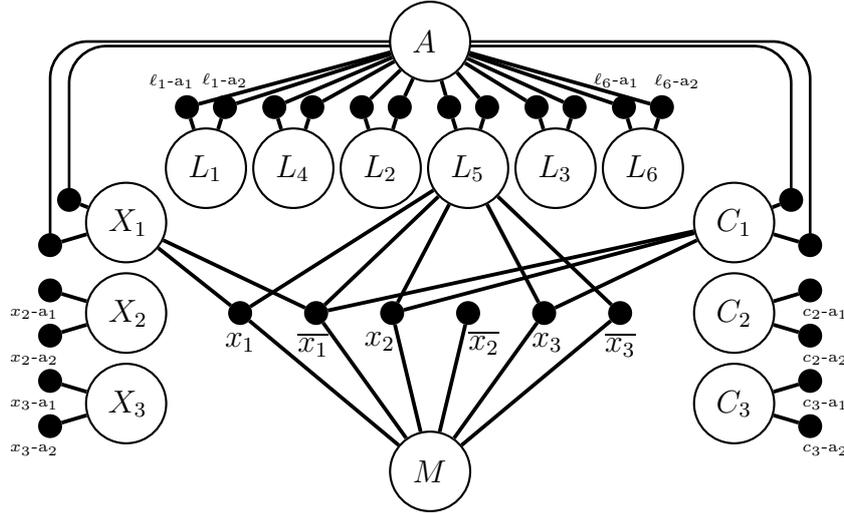


Figura 3.2: Construcción de G para reducción de NAE-SAT a k -BICLIQUE-COLORING de grafos split, con entrada $\Phi_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$. Por simplicidad, sólo se grafican las adyacencias con los vértices de $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$ del bloque X_1 , el bloque C_1 correspondiente a la cláusula $C_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$, el bloque M y el bloque L_5 . Similarmente, sólo se grafican las adyacencias de A con los vértices ancla de los bloques L_1, \dots, L_6 , X_1 y C_1 . Además, recordar que todos los bloques mostrados son adyacentes de a pares, ya que todos pertenecen a K .

Veamos ahora que este grafo es k -biclique-coloreable si y sólo Φ satisface NAE-SAT.

Supongamos que val es una valuación de Φ que satisface NAE-SAT. A partir de ella construimos un coloreo para G de la siguiente manera:

- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, 2n\}$, y $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, asignamos a los vértices $x_{i\alpha}$, $c_{j\alpha}$, $l_{q\alpha}$ y a_α el color α .
- Para todo $\beta \in \{1, \dots, k-2\}$, asignamos al vértice m_β el color $(\beta+2)$.
- Para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$, asignamos al vértice l_q el color 1, si $\text{val}(l_q)$ es verdadero, y el color 2, en caso contrario.
- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, y $q \in \{1, \dots, 2n\}$, asignamos a los vértices $v_i\text{-ancla}_1$, $c_j\text{-ancla}_1$ y $l_q\text{-ancla}_1$ el color 1, mientras que a $v_i\text{-ancla}_2$, $c_j\text{-ancla}_2$ y $l_q\text{-ancla}_2$, les asignamos de color 2.

Ahora veamos que este coloreo es válido. Como hemos visto en el desarrollo del Lema 3.1, todas las bicliques de G son estrellas centradas en algún vértice $v \in K$. Las bicliques que contienen vértices mellizos son policromáticas por la definición del coloreo. Estudiemos las bicliques de la forma $\{\{v\}, W\}$ según el bloque al que pertenezca el vértice v .

Si $v \in X_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, o bien W contiene a $x_i\text{-ancla}_1$ y $x_i\text{-ancla}_2$, que son de color distinto, o a algún $a \in A$. En este último caso, los vértices x_i y \bar{x}_i pertenecen a W , y también son de color distinto, ya que en la valuación val la variable x_i necesariamente tiene valor de verdad distinto a \bar{x}_i .

Si $v \in C_j$ para algún $j \in \{1, \dots, m\}$, o bien W incluye a los vértices $c_j\text{-ancla}_1$ y $c_j\text{-ancla}_2$, que son de color distinto, o a algún $a \in A$. En este último caso, los vértices l_r , l_s , y l_t , tales que los literales l_r , l_s , y l_t pertenecen a C_j , están en W . Al menos uno de estos vértices es de color 1 y otro de color 2 porque, en val , los literales l_r , l_s , y l_t tienen valores de verdad distintos. Por lo tanto la estrella $\{\{v\}, W\}$ siempre es policromática.

Análogamente, si $v \in L_q$ para algún $q \in \{1, \dots, 2n\}$, o bien W contiene a $l_q\text{-ancla}_1$, y $l_q\text{-ancla}_2$, que son de color distinto, o a algún $a \in A$. En este último caso, $l_{q'}$ está en W para todo $q' \in \{1, \dots, 2n\} \setminus q$. Esto incluye, en particular, al par x_i , \bar{x}_i , para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, debido a que la variable correspondiente al literal l_q no puede ser la única en Φ . Los vértices x_i y \bar{x}_i son, además, de color distinto. Por lo tanto, la estrella $\{\{v\}, W\}$ siempre es policromática.

Cuando $k > 2$ y $v \in M$, v es adyacente a por lo menos un vértice l_q , donde $q \in \{1, \dots, 2n\}$. El vértice l_q es de color 1 o de color 2, mientras que v tiene un color estrictamente mayor a 2. Entonces, la biclique es policromática.

Si $v \in A$, para algún $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, o bien W incluye a $x_1\text{-ancla}_1$ y $x_1\text{-ancla}_2$, que son de color distinto, o a $x \in X_1$. En este último caso, $c_1\text{-ancla}_1$ y $c_1\text{-ancla}_2$, que también son de color distinto, pertenecen a W .

Por lo tanto, todas las bicliques son policromáticas y el coloreo de G es un k -biclique-coloreo.

Ahora supongamos que G es k -biclique-coloreable. Tomando un k -coloreo f de G que es k -biclique-coloreo, construimos una valuación val para Φ que satisface NAE-SAT.

En primer lugar observemos que los vértices del conjunto M forman un bloque. Por lo tanto, por Lema 1.1, deben ser de color diferente. Sin pérdida de generalidad consideremos que $f(m_\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in \{1, \dots, k-2\}$.

En *val*, asignamos el valor de verdad verdadero al literal l_q si $f(l_q) = k-1$, y falso si $f(l_q) = k$, para cada $q \in \{1, \dots, 2n\}$.

Para asegurarnos de que este esquema da un valor de verdad a todos los literales, y que es consistente, debemos verificar que para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$, el vértice l_q es de color $(k-1)$ o k , y que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, vale que $f(x_i) \neq f(\bar{x}_i)$.

Observemos nuevamente que, los conjuntos X_i , C_j , L_q y A son bloques para $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, y $q \in \{1, \dots, 2n\}$. Una vez más, por Lema 1.1, todos los vértices de cada bloque deben ser de color diferente. Sin pérdida de generalidad supondremos que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, 2n\}$, $\beta \in \{1, \dots, k\}$, $f(x_{i\beta}) = f(c_{j\beta}) = f(l_{q\beta}) = f(a_\beta) = \beta$.

Entonces, podemos ver que el vértice l_q debe ser de color $(k-1)$ o k . Si fuera de otro color $\rho \in \{1, \dots, k-2\}$, la biclique $\{\{m_\rho\}, \{l_{q\rho}, l_q\}\}$ sería monocromática. Notemos que si $k=2$, el conjunto M no existe, pero por otra parte los únicos colores que pueden tener los vértices de G son 1 y 2. Por lo tanto, el vértice l_q siempre es de color $(k-1)$ o k .

Además, si x_i y \bar{x}_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) fueran del mismo color $\phi \in \{k-1, k\}$, la biclique $\{\{x_{i\phi}\}, \{a_\phi, x_i, \bar{x}_i\}\}$ sería monocromática. Luego, x_i es de color distinto a \bar{x}_i y, por lo tanto, la valuación *val* está bien definida.

Veamos que *val* satisface NAE-SAT para Φ . Para esto tenemos que ver que la cláusula C_j contiene dos literales con valores de verdad distintos para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Consideremos el bloque C_j . Los vértices de este bloque son adyacentes a tres vértices l_r , l_s , l_t tales que l_r , l_s , y l_t pertenecen a C_j . Los tres vértices no pueden ser del mismo color, ya que si todos fueran del color $\rho \in \{k-1, k\}$, la biclique $\{\{c_{j\rho}\}, \{a_\rho, l_r, l_s, l_t\}\}$ sería monocromática. Por definición de *val*, si los vértices l_r , l_s , l_t no son todos del mismo color, los literales l_r , l_s y l_t no tienen el mismo valor de verdad. Entonces C_j satisface NAE-SAT y por lo tanto, *val* satisface NAE-SAT. □

Con esto hemos probado que para todo $k \geq 2$, k -BICLIQUE-COLORING restringido a grafos split es un problema NP-Completo. Es interesante notar que k -CLIQUE-COLORING es fácil para los grafos split, ya que el color clique-cromático de todo grafo split es 2.

Observación 1. *Todo grafo split es 2-clique-coloreable.*

Demostración. Las cliques de un grafo split $G = (K \cup I, E)$ son exactamente K y $N[v]$ para todo $v \in I$. Entonces, definimos un coloreo que consiste en determinar un $w \in K$ arbitrario, asignar el color 1 a los vértices de $K \setminus \{w\}$ y $S(w)$, y el color 2 al resto de $V(G)$. En este esquema, si K tiene más de un vértice, entonces contiene al menos un vértice de color 1 y un vértice de color 2. Por otra parte, si $v \in S(w)$, entonces v y

w , que tienen colores distintos, están en $N[v]$, mientras que si $v \notin S(w)$, entonces v y $z \in K \setminus \{w\}$, que tienen colores distintos, están en $N[v]$. \square

3.3. Grafos (W_4 , dart, gem)-free

Como discutimos en la Sección 3.1, la dificultad de verificar que un coloreo de un grafo G es un k -biclique-coloreo se debe a la posibilidad de que G tenga una cantidad exponencial de bicliques.

Una forma de disminuir la complejidad de este problema es restringirlo a familias de grafos con una cantidad polinomial de bicliques. Como vimos en el Teorema 3.1, si se restringe k -BICLIQUE-COLORING a una clase de grafos con una cantidad polinomial de bicliques, pasa a estar en NP. En la Sección 3.2 vimos como, utilizando este mecanismo, pudimos determinar que la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para grafos split es NP-Completo.

En esta sección vamos a presentar una familia de grafos donde la verificación de un k -biclique-coloreo se puede hacer en tiempo polinomial, pero no porque tenga una cantidad de bicliques polinomial, sino porque su estructura nos permite verificar un coloreo sin tener que revisar todas las bicliques.

En esta sección, utilizaremos los grafos que se muestran en la Figura 3.3. Por simplicidad, nos referiremos a los vértices universales de un diamante como sus *vértices centrales*.

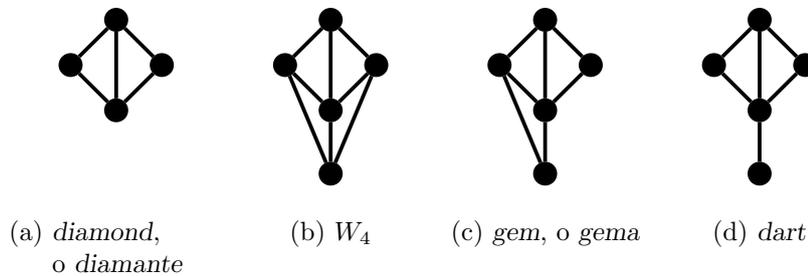


Figura 3.3: Algunos grafos que utilizaremos en esta sección.

Para poder hacer la verificación de un k -biclique-coloreo en tiempo polinomial, vamos a restringirnos a grafos en los que sus vértices cumplan la propiedad de ser bloque separables.

Sea G grafo. Diremos que $v \in V(G)$ es *bloque-separable* si todo par de vértices adyacentes $w, z \in N[v]$ que no dominan a v , son mellizos en $G[N[v]]$. Notemos que si v es bloque-separable, entonces el vecindario cerrado de v se puede particionar en conjuntos B_0, B_1, \dots, B_ℓ , de manera tal que para todo $i \in \{0, 1, \dots, \ell\}$, los elementos de B_i son mellizos en $G[N[v]]$, $v \in B_0$, y para $1 \leq i, j \leq \ell$, no hay aristas entre B_i

y B_j . Llamaremos a B_0, B_1, \dots, B_ℓ la *bloque-separación* de $N[v]$. Observemos, además, que la bloque-separación del vecindario de un vértice v se puede obtener en tiempo $O(|E(G[N[v]])|) = O(d(v)B_0)$, ya que sólo requiere agrupar los elementos de $N[v]$ según sus vértices mellizos en $G[N[v]]$.

Veamos que la clase de grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem})$ -free son los grafos bloque-separables. Adicionalmente, observemos que los vértices centrales de todos los diamantes de estos grafos deben ser mellizos.

Teorema 3.3. *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

- i. No hay subgrafos W_4 , dart, ni gem inducidos en G .*
- ii. Para todo diamante inducido en G , sus vértices centrales son mellizos.*
- iii. Todo vértice v de G es bloque-separable.*

Demostración.

- *$i \Rightarrow ii$)* Supongamos que los vértices $a, b, c, d \in G$ inducen un diamante, de manera tal que a y b son sus vértices centrales, y a y b no son mellizos. Luego, existe un vértice e tal que e es adyacente a a y no a b o viceversa. Sin pérdida de generalidad supongamos que es adyacente a a . El vértice e puede o no ser adyacente a c y d , pero en cualquier caso, los vértices $\{a, b, c, d, e\}$ inducen un W_4 , un *dart*, o un *gem*: Si no es adyacente a ninguno de los dos, inducen un *dart*, si es adyacente a exactamente uno, inducen un *gem*, y si es adyacente a los dos, inducen un W_4 .
- *$ii \Rightarrow iii$)* Supongamos que existe un vértice v que no es bloque-separable. Es decir, v tiene un par de vecinos w, z , que no dominan a v , son adyacentes entre sí, y no son mellizos en $G[N[v]]$. Por lo tanto, existe en $N[v]$ un vértice x , que, sin pérdida de generalidad, es adyacente a z pero no a w . Como se puede apreciar en la Figura 3.4, los vértices v, w, z y x forman un diamante inducido en G .

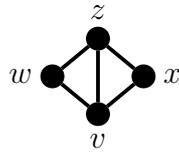


Figura 3.4: Diamante con los vértices v, w, z y x

Como por hipótesis z no domina a v , entonces v y z no son mellizos en G . Por lo tanto, el diamante inducido por v, w, z y x es tal que sus vértices centrales no son mellizos.

- *iii* \Rightarrow *i*) Si G contiene un W_4 , *dart* o *gem* inducidos, entonces $V(G)$ contiene 5 vértices a, b, c, d, e tales que $\{a, b, c, d\}$ inducen un diamante con vértices centrales a y b , y e es adyacente a a y no a b . Pero entonces, $N[a]$ tiene dos vértices adyacentes, c y b , que no son mellizos y tales que ninguno domina a a , i.e., el vértice a no es bloque separable.

□

Observemos algunas propiedades de los grafos $(W_4, \textit{dart}, \textit{gem})$ -free.

Lema 3.2. *Si v es un vértice bloque-separable de un grafo G , y B_0, \dots, B_ℓ la bloque-separación de $N[v]$, entonces $\ell \neq 1$.*

Demostración. Supongamos que $\ell = 1$, i.e., $N[v] = B_0 \cup B_1$. Como B_0 es el conjunto de vértices mellizos a v en $G[N[v]]$, todos los vértices de B_0 son adyacentes a todos los de B_1 . Pero entonces, $B_0 \cup B_1$ es un bloque en $G[N[v]]$, lo cual es absurdo, pues todos los vértices mellizos a v en $G[N[v]]$ pertenecen a B_0 . □

Lema 3.3. *Sea G un grafo $(W_4, \textit{dart}, \textit{gem})$ -free, $v \in G$, y B_0, \dots, B_ℓ la bloque-separación $N[v]$. Si $\ell \geq 2$, entonces todos los elementos de $B_0 \setminus \{v\}$ son mellizos con v en G .*

Demostración. Sean $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$, y $w \in B_0 \setminus \{v\}$. Dado que no hay aristas entre los vértices de B_1 y B_2 , los vértices v, w, b_1 y b_2 inducen un diamante en G , donde v y w son los vértices centrales. Por Teorema 3.3, los vértices v y w son mellizos en G . □

Vamos a ver cómo se extiende la propiedad de descomposición en bloques para conjuntos de vértices.

Lema 3.4. *Sea G un grafo $(W_4, \textit{dart}, \textit{gem})$ -free, $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq V(G)$ un conjunto independiente, y $T = \bigcap_{i=1}^s N(v_i)$. Si $s > 2$ y $w, z \in T$ son adyacentes, entonces w y z son mellizos en G .*

Demostración. Consideremos los vértices v_1, v_2, w y z . Por hipótesis, v_1 no es adyacente a v_2 , y w es adyacente a z . Además, como w y z pertenecen a $N[v_1] \cap N[v_2]$, obtenemos que v_1, v_2, w y z forman un diamante, donde los vértices centrales son w y z . Entonces, por Teorema 3.3, w y z deben ser mellizos. □

Corolario 3.1. *Sea G un grafo $(W_4, \textit{dart}, \textit{gem})$ -free, $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq V(G)$ un conjunto independiente, y $J = \bigcap_{i=1}^s N[v_i]$. Sea H el grafo que se obtiene de identificar los vértices mellizos en $G[J]$. Si $s > 2$, entonces H es un grafo bipartito completo.*

Demostración. El Lema 3.4 indica que las únicas aristas en el conjunto $T = \bigcap_{i=1}^s N(v_i) = J \setminus \{v_1, \dots, v_s\}$ son entre vértices mellizos. Entonces, $V(H) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto independiente de H . Por otra parte, por definición, $\{v_1, \dots, v_s\}$ es un conjunto independiente, y todo $w \in T$ pertenece a $N[v_i]$ para $i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces, H es bipartito completo. □

Estamos listos para hacer la verificación de un k -biclique-coloreo en tiempo polinomial. El algoritmo se puede aplicar a cualquier grafo, pero, para que corra en tiempo polinomial, es necesario que existan i_0 y j_0 tales que el grafo de entrada no posea un $K_{i,j}$ inducido con $i \geq i_0$, $j \geq j_0$. Es decir, la verificación es polinomial para grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free, con i_0, j_0 constantes.

Teorema 3.4. *Sea \mathcal{C}_{i_0, j_0} la clase de grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free, para $2 \leq i_0 \leq j_0$. Si $j_0 \in O(1)$, entonces k -BICLIQUE-COLORING \in NP restringido a \mathcal{C}_{i_0, j_0} .*

Demostración. Un certificado positivo de k -BICLIQUE-COLORING para $G \in \mathcal{C}_{i_0, j_0}$ es un k -coloreo f de G . Veamos un algoritmo que verifique que todas las bicliques de G son policromáticas respecto del coloreo f . Este funciona haciendo la evaluación en tres etapas:

1. Verificación de bicliques $K_{i,j}$, con $i \leq i_0, j < j_0$.
2. Verificación de bicliques $K_{1,j}$, con $j \geq j_0$.
3. Verificación de bicliques $K_{i,j}$, con $2 \leq i < i_0, j \geq j_0$.

Notemos que estos 3 ítems cubren todas las bicliques posibles en un grafo (K_{i_0, j_0}) -free. Consideremos una biclique que induce un $K_{i,j}$, $i \leq j$, en uno de estos grafos. Por propiedad de (K_{i_0, j_0}) -free, no puede ser que $j \geq j_0$ e $i \geq i_0$ simultáneamente. Entonces, las alternativas son que $i \leq i_0$ y $j < j_0$, caso que está cubiertos en el ítem 1, o que $i < i_0$ y $j \geq j_0$, caso que se contempla en los ítems 2 y 3 haciendo la subdivisión $i = 1$ y $1 < i < i_0$. Dado que suponemos que $i \leq j$, el caso $i > i_0$ no es posible porque implicaría un subgrafo prohibido.

Veamos cómo se verifica cada etapa. La primera la evaluamos de manera directa, buscando cada subconjunto de $V(G)$ con $i+j$ vértices (para $i \leq i_0, j < j_0$), y verificando si es una biclique monocromática. Si encontramos tal biclique, el algoritmo devuelve **no**; y en caso contrario devuelve **sí**. En el Algoritmo 3.1 podemos ver la estructura de esta etapa del algoritmo.

Para ver que esta etapa requiere tiempo polinomial, basta con observar que los subconjuntos de $V(G)$ con hasta $i_0 + j_0$ vértices pueden recorrerse en tiempo polinomial, ya que i_0 y j_0 son constantes. Las verificaciones que realizamos para cada subconjunto tomado (ver si es un $K_{i,j}$, ver si todos los vértices son del mismo color, corroborar maximalidad), son claramente polinomiales.

En la segunda etapa verificamos que no haya bicliques monocromáticas de la forma $K_{1,j}$ con $j \geq j_0$. Para ello generamos, para cada vértice v , con conjunto de estrellas maximales monocromáticas centradas en v que tienen al menos $j_0 + 1$ vértices. Si alguna de estas estrellas es una biclique, entonces la verificación es negativa. Veamos que el algoritmo anterior se puede implementar de forma tal que requiera tiempo polinomial.

Algoritmo 3.1 Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa I

Entrada: Constantes i_0, j_0 , grafo G ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0}$)-free, coloreo $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

Salida: **no**, G contiene una biclique monocromática con respecto al coloreo f de la forma $K_{i, j}$, con $i \leq i_0, j < j_0$, y **sí**, en caso contrario.

1. Para cada $i = 1, \dots, i_0, j = i, \dots, (j_0 - 1)$:
 2. Para cada conjunto C de $(i + j)$ vértices:
 3. Si los vértices de C son todos del mismo color, e inducen una biclique en G , entonces devolver **no**.
 4. Devolver **sí**.
-

Para generar las estrellas maximales monocromáticas centradas en v , primero computamos la bloque-separación B_0, \dots, B_ℓ de v . Las estrellas centradas en v contienen exactamente un vértice $b_i \in B_i$ para cada $1 \leq i \leq \ell$. Si $\ell < j_0$, entonces no hay ninguna estrella centrada en v con al menos $j_0 + 1$ vértices. Por otra parte, si todos los vértices de B_i tienen colores distintos a $f(v)$ para algún $1 \leq i \leq \ell$, entonces todas las estrellas maximales centradas en v son policromáticas. Supongamos, pues, que $\ell \geq j_0$ y que $B'_i = \{b \in B_i \mid f(b) = f(v)\}$ no es vacío, para todo $1 \leq i \leq \ell$.

Notemos que B'_i no contiene un par de vértices que sean mellizos en G , ya que en ese caso habría una biclique $K_{1,1}$ monocromática en G , por Lema 1.1, y ésta habría sido encontrada en la Etapa 1. Luego, ningún vértice $w \in V(G) \setminus N[v]$ es adyacente a dos vértices $b, b' \in B'_i$; caso contrario, v, b, b', w inducirían un diamante cuyo vértices centrales b y b' no son mellizos, contradiciendo el Teorema 3.3. Por lo tanto, para cada $w \notin N[v]$ existe a lo sumo una estrella maximal monocromática S , conformada por v y un vértice $b_i \in B'_i$ para $i \in \{1, \dots, \ell\}$, tal que $S \cup \{w\}$ induce un bipartito completo. Por lo tanto, el algoritmo de verificación necesita generar a lo sumo $n - 1$ estrellas maximales monocromáticas centradas en v , una por cada $w \notin N[v]$, antes de detectar una biclique monocromática.

Para cada vértice v , el cómputo de B_0, \dots, B_ℓ se puede realizar en tiempo polinomial haciendo la partición en bloques del grafo $G[N[v]]$. Luego, es fácil ver que $n - 1$ estrellas maximales monocromáticas centradas en v se pueden generar en tiempo polinomial. El chequeo de si la estrella es una biclique se realiza en tiempo polinomial buscando si existe un $w \in V(G) \setminus N[v]$ que sea adyacente a todos los vecinos de v en la estrella. Por lo tanto, esta etapa requiere tiempo polinomial. El pseudocódigo de esta etapa se puede encontrar en el Algoritmo 3.2.

En la tercera etapa del algoritmo, tomamos cada conjunto C de i vértices, para i entre 2 e i_0 . Verificamos que C sea independiente y que todos sus elementos sean del mismo

Algoritmo 3.2 Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa II

Entrada: Constantes i_0, j_0 , grafo G (W_4 , *dart*, *gem*, K_{i_0, j_0})-free, coloreo $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tal que G no posee bicliques monocromáticas de la forma $K_{i, j}$, con $i \leq i_0, j < j_0$, respecto del coloreo f .

Salida: **no**, si existe en G , coloreado según f , una biclique monocromática de la forma $K_{1, j}$, con $j \geq j_0$, y **sí**, en caso contrario.

1. Para cada vértice $v \in V(G)$:
 2. Obtener B_0, B_1, \dots, B_l , bloque-separación de $N[v]$.
 3. Si l es mayor a j_0 ,
 4. Obtener, para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, el conjunto B'_i , como los vértices de B_i que son del color $f(v)$.
 5. Para cada tupla b'_1, \dots, b'_l , con $b_i \in B'_i$ ($i \in \{1, \dots, l\}$):
 6. Determinar si la estrella $\{v, \{b'_1, \dots, b'_l\}\}$ es una biclique. En tal caso, devolver **no**.
 7. Si ya se han verificado n tuplas distintas, devolver **no**.
 8. Devolver **sí**.
-

color. Si ese es el caso, consideramos $T = \bigcap_{c \in C} N(c)$. Llamemos al color que tienen todos los vértices de C , $f(C)$.

Como vimos en el Lema 3.4, los vértices del conjunto I están agrupados en B_1, \dots, B_ℓ , conjuntos de vértices mellizos. Si alguno de estos conjuntos de vértices mellizos no contiene un vértice del color $f(C)$, entonces cualquier biclique que contiene a C tiene al menos un vértice de color distinto a $f(C)$ y es policromática.

Si para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$, en B_i hay un vértice b_i del color $f(C)$ entonces hay que verificar que exista un vértice $w \in G \setminus (I \cup C)$, de color distinto a $f(C)$, tal que w es adyacente a b_i para todo i . Sabemos que para $i \in \{1, \dots, \ell\}$, hay a lo sumo un vértice de color $f(C)$ en B_i , ya que si hubieran dos, como todos los vértices de B_i son mellizos, formarían una biclique monocromática que habría sido encontrada en la primera etapa del algoritmo.

Entonces, basta con buscar un vértice w de $G \setminus (I \cup C)$ tal que w es adyacente a b_i para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ y $f(w) \neq f(C)$. En caso de encontrarlo, la biclique que incluye a C , w y a $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ es policromática. Si tal w no existe, entonces $\{C, \{b_1, \dots, b_\ell\}\}$ es una biclique monocromática. Dado el conjunto C de i vértices, tanto obtener los conjuntos de bloques B_1, \dots, B_ℓ como determinar si existe el vértice w adyacente al vértice $b_i \in B_i$ de color $f(C)$ para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$, son acciones que se pueden realizar en tiempo polinomial. Por lo tanto, esta etapa se ejecuta en tiempo polinomial. El pseudocódigo

de esta etapa se puede encontrar en el Algoritmo 3.3.

Algoritmo 3.3 Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa III

Entrada: Constantes i_0, j_0 , grafo G ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0}$)-free, coloreo $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tal que G no posee bicliques monocromáticas de la forma $K_{i, j}$, con $i \leq i_0, j < j_0$ ni de la forma $K_{1, j}$, con $j \geq j_0$, respecto del coloreo f .

Salida: **no**, si existe en G , coloreado según f , una biclique monocromática de la forma $K_{i, j}$, con $2 \leq i < i_0, j \geq j_0$, y **sí**, en caso contrario.

1. Para cada $i = 1, \dots, i_0$:
 2. Para cada conjunto C de i vértices en G :
 3. Si C es un conjunto independiente, y todos los vértices de C son del mismo color $f(C)$,
 4. Obtener $T = \bigcap_{c \in C} N(c)$.
 5. Si en cada bloque de T hay un vértice del color $f(C)$, entonces si no hay un $w \in G \setminus (I \cup C)$ de color distinto a $f(C)$, y adyacente a todos los vértices de T , devolver **no**.
 6. Devolver **sí**.
-

Por lo tanto, hemos verificado todas las bicliques posibles de G en tiempo polinomial. □

Hasta este punto hemos visto que el problema k -BICLIQUE-COLORING restringido a la clase de grafos ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0}$)-free está en NP para todo $k \geq 2$. Ahora quisiéramos ver que el problema es NP-Completo. Vamos probar esto para el caso $k = 2$, por medio de una reducción a partir de NAE-SAT. Esta reducción es similar a la realizada en el Teorema 3.2, aunque posee algunos mecanismos diferentes.

Teorema 3.5. *El problema 2-BICLIQUE-COLORING, restringido a la clase de grafos ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4$)-free, es NP-Completo.*

Demostración. Los grafos ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4$)-free son en particular una subfamilia de los grafos ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}$)-free, que están en NP por Teorema 3.4.

Para ver que el problema es NP-Completo, mostramos que NAE-SAT se reduce polinomialmente a 2-BICLIQUE-COLORING de grafos ($W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4$)-free, como hicimos con los grafos split.

Entonces, tomamos una instancia de NAE-SAT, consistente en una fórmula en Forma Normal Conjuntiva Φ con m cláusulas, C_1, \dots, C_m , y n variables x_1, \dots, x_n , donde cada una de las cláusulas tiene 3 literales. Nos referiremos como ℓ_q , con $q \in \{1, \dots, 2n\}$, a los

literales de Φ , de manera tal que para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\chi_i = l_i$ y $\bar{\chi}_i = l_{i+n}$. La construcción del grafo G es la siguiente.

- Para cada i , $1 \leq i \leq n$, existen cuatro vértices, $l_i, l_{i+n}, x_{i1}, x_{i2}$, que inducen un diamante, con x_{i1} y x_{i2} como vértices centrales.
- Para cada par $q, r \in \{1, \dots, 2n\}$, $q < r$, $r \neq (q+n)$, existe un vértice w_{qr} , adyacente a l_q y a l_r .
- Para cada j , $1 \leq j \leq m$, existen dos vértices, c_{j1} y c_{j2} , tales que c_{j1} es adyacente a c_{j2} , y para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$, el vértice l_q es adyacente a c_{j1} y c_{j2} si y sólo si el literal l_q aparece en C_j .

Esto concluye la construcción de G . Se puede ver que esta construcción se puede realizar en tiempo polinomial. En la Figura 3.5 se ve una construcción para una fórmula Φ_0 .

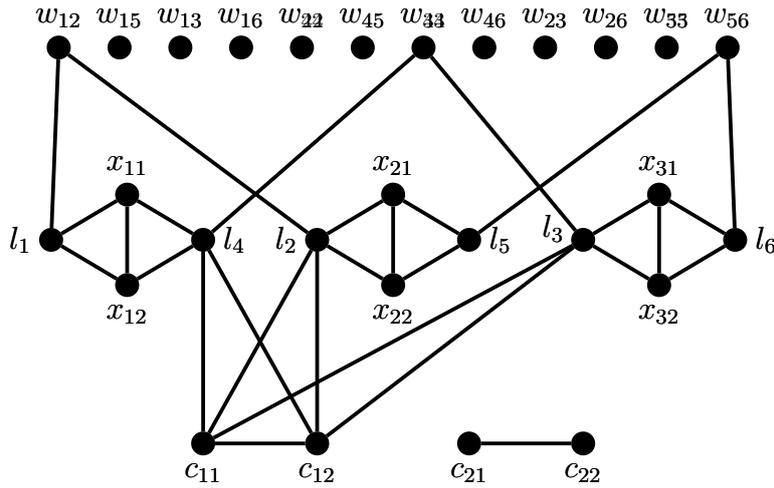


Figura 3.5: Construcción de G para reducción de NAE-SAT a k -BICLIQUE-COLORING de grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free, con entrada $\Phi_0 = (\bar{\chi}_1 \vee \bar{\chi}_2 \vee \chi_3) \wedge (\bar{\chi}_1 \vee \chi_2 \vee \bar{\chi}_3)$. Por simplicidad, sólo se grafican las adyacencias con los vértices de $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$ de sus correspondientes diamantes, $w_{12}, w_{43}, w_{56}, c_{11}$ y c_{12} .

Veamos que G es efectivamente un grafo $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free. Para esto comencemos por buscar los triángulos que se forman en G .

Debido a que $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$ es un conjunto independiente, y a que el vértice $w_{qr} \in V(G)$ es adyacente sólo a dos vértices de este conjunto, los únicos triángulos que se forman en G son de la forma (x_{i1}, x_{i2}, l_i) , $(x_{i1}, x_{i2}, l_{i+n})$ o (c_{j1}, c_{j2}, l_q) , para $i \in \{1, \dots, n\}$,

$j \in \{1, \dots, m\}$, y $q \in \{1, \dots, 2n\}$. En ninguno de estos tres tipos de triángulos existe un vértice que pueda agregarse para inducir un K_4 .

Notemos, además, que todos los diamantes inducidos de G tienen como vértices centrales al par x_{i1}, x_{i2} , para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, o a un par c_{j1}, c_{j2} , para algún $j \in \{1, \dots, m\}$. Como ambos pares de vértices son siempre mellizos, se cumple que los vértices centrales de todo diamante en G son mellizos. Por Teorema 3.3, esto significa que G no contiene W_4 , *darts*, ni *gems* inducidos.

Nos queda ver que G es $K_{3,3}$ -free. Para esto, veamos qué vértices podrían llegar a inducir un $K_{3,3}$. En primer lugar, x_{i1} y x_{i2} ($1 \leq i \leq n$) son mellizos y tienen grado 3, por lo tanto no pueden pertenecer a un $K_{3,3}$ inducido. Por otra parte, el vértice w_{qr} es adyacente sólo a dos vértices para todo par $q, r \in \{1, \dots, 2n\}$, $q < r$, $r \neq (q + n)$. Entonces, tampoco puede estar en un $K_{3,3}$. Además, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, los vértices c_{j1} y c_{j2} son mellizos, así que si hay un $K_{3,3}$ inducido en G , este incluye a lo sumo a uno de ellos. Tanto c_{j1} como c_{j2} son adyacentes a un conjunto independiente de tres vértices, formado por l_r, l_s , y l_t , para l_r, l_s , y $l_t \in C_j$. Sin embargo, l_r, l_s , y l_t no tienen otro vecino en común del tipo c_{k1} o c_{k2} , con $1 \leq k \leq m, k \neq j$. Si existiera dicho vértice, significaría que C_j y C_k son la misma cláusula.

Por lo tanto, G es un grafo (W_4 , *dart*, *gem*, $K_{3,3}$, K_4)-free.

Ahora probemos que G es 2-biclique-coloreable si y sólo si Φ es NAE-SAT.

Supongamos que *val* es una valuación de Φ que satisface NAE-SAT. A partir de ella construimos un 2-coloreo f para G , de la siguiente forma.

Este es:

- A los vértices x_{i1} y c_{j1} les asignamos color 1, y a los vértices x_{i2} y c_{j2} el color 2, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.
- Al vértice l_q le asignamos el color 1, si el literal l_q es verdadero en *val*, y el color 2, si l_q es falso en *val*, para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$.
- Al vértice w_{qr} le asignamos un color de forma tal que entre l_q, l_r y w_{qr} haya al menos un vértice de color 1 y un vértice de color 2, para todo par $q, r \in \{1, \dots, 2n\}$.

Para ver que el coloreo es un 2-biclique-coloreo, comencemos por notar que los vértices x_{i1} y x_{i2} , para $i \in \{1, \dots, n\}$, son mellizos. Por Lema 1.1, forman una biclique, pero como x_{i1} es de color 1 y x_{i2} es de color 2, es bicromática. Análogamente, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, c_{j1} y c_{j2} forman una biclique bicromática.

Ahora observemos que cualquier arista de G que no es una de las mencionadas siempre involucra exactamente un vértice l_q para $q \in \{1, \dots, 2n\}$. Entonces, sólo queda revisar las posibles bicliques en las que una bipartición esté compuesta enteramente por vértices del conjunto $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$.

La cantidad máxima de vértices de este tipo que tienen un vecino en común son tres, y esto sucede cuando hay una tripla l_r, l_s, l_t , con $r, s, t \in \{1, \dots, 2n\}$ tal que l_r, l_s y l_t aparecen en la cláusula C_j para algún $j \in \{1, \dots, m\}$. Pero entonces, si l_r, l_s y l_t fueran

del mismo color, significaría que l_r , l_s y l_t tienen el mismo valor de verdad, haciendo que \mathcal{C}_j viole NAE-SAT, lo cual es absurdo.

Consideremos el caso donde la biclique tiene dos vértices, l_r y l_s , con $r, s \in \{1, \dots, 2n\}$, $r < s$. Existen dos casos: Si $s = r + n$, entonces l_s y l_r tienen color distinto, pues el literal l_s es la negación de l_r y los vértices están coloreados según el valor de verdad de los literales. Si en cambio $s \neq r + n$, entonces existe el vértice w_{rs} , adyacente a ambos y no adyacente a ningún otro vértice de G . Luego, w_{rs} pertenece a la biclique. Ahora, si l_r y l_s son de color distinto, la biclique ya es bicromática, y si son del mismo color, entonces, por definición del coloreo, w_{rs} es de color distinto.

Queda entonces el caso de la estrella centrada en l_q para $q \in \{1, \dots, 2n\}$. Esta estrella contiene entre sus puntas, para cualquier r tal que $r \neq q$ y que $l_r \neq \bar{l}_q$, al vértice w_{qr} , si $r > q$, o al vértice w_{rq} , si $q > r$. En particular, como no puede haber una única variable en Φ , existe $s \in \{1, \dots, n\}$, tal que l_q es adyacente a w_{qs} (o w_{sq}) y a $w_{q(s+n)}$ (o $w_{(s+n)q}$). El literal l_q tiene un valor de verdad en *val*. Si este es igual al valor de verdad de l_s , entonces los vértices l_q y l_s son del mismo color, por lo que el coloreo define que w_{qs} es de color distinto. Si l_q tiene el valor de verdad opuesto a l_s , entonces $l_{(s+n)}$ tiene el mismo valor de verdad que l_q , por lo que los vértices l_q y $l_{(s+n)}$ son del mismo color, y entonces $w_{q(s+n)}$ es de color distinto a l_q . En ambos casos, existe una punta en la biclique centrada en l_q que es de color diferente.

Por lo tanto, vemos que el esquema de coloreo propuesto no contiene bicliques monocromáticas, por lo que el coloreo es un 2-biclique-coloreo.

Ahora supongamos que G es 2-biclique-coloreable. Entonces, a partir de un 2-biclique-coloreo f , construimos una valuación *val* para Φ que satisface NAE-SAT.

La valuación *val* se define asignando al literal l_q el el valor de verdad verdadero si $f(l_q) = 1$, y falso, si $f(l_q) = 2$, para todo $q \in \{1, \dots, 2n\}$.

Primero verifiquemos que esta valuación es consistente. Para esto, notemos que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, el par de vértices x_{i1} , x_{i2} son mellizos, por lo tanto, por Lema 1.1, x_{i1} y x_{i2} deben tener colores distintos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f(x_{i1}) = 1$ y $f(x_{i2}) = 2$. Esto lleva a que los vértices l_i y l_{i+n} deban tener colores distintos, ya que si fueran del mismo color $\rho \in \{1, 2\}$, la biclique $\{\{x_{i\rho}\}, \{l_i, l_{i+n}\}\}$ sería monocromática. Entoces, la valuación *val* es consistente.

Ahora observemos que cumple NAE-SAT. Para esto, nuevamente veamos que para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, el par de vértices c_{j1} , c_{j2} son mellizos, por lo tanto, por Lema 1.1, c_{j1} y c_{j2} deben tener colores distintos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que c_{j1} es de color 1, y c_{j2} es de color 2. Ahora, si l_r , l_s , y l_t son adyacentes a c_{j1} y c_{j2} , no puede ser que los tres sean del mismo color, ya que si los tres fueran del color $\rho \in \{1, 2\}$, la biclique $\{\{c_{j\rho}\}, \{l_r, l_s, l_t\}\}$ sería monocromática. Por construcción de *val*, esto quiere decir que los literales l_r , l_s , y l_t no pueden tener los 3 el mismo valor de verdad, que a su vez significa que \mathcal{C}_j satisface NAE-SAT.

Entonces, *val* es una valuación de Φ que satisface NAE-SAT y por lo tanto NAE-SAT se reduce a 2-BICLIQUE-COLORING para grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free. □

4 Clases de grafos con biclique-coloreo $\in P$

Hasta este momento hemos analizado familias de grafos en las que el problema k -BICLIQUE-COLORING es computacionalmente difícil, y no conocemos algoritmos polinomiales exactos para resolverlo. En esta sección, en cambio, veremos algunas familias de grafos donde la resolución de k -BICLIQUE-COLORING se puede hacer a un costo computacional muy bajo, i.e., de orden lineal.

En primer lugar estudiaremos algunos casos particulares de grafos split. Aunque vimos en la Sección 3.2 que restringido a esta clase de grafos el problema es NP-Completo, imponiendo algunas restricciones más en el grafo de entrada respecto al tamaño de los bloques se puede reducir la complejidad notablemente.

Otra subclase de los grafos split que veremos es la de los grafos threshold. Para estos grafos, podemos caracterizar sus bicliques y establecer un algoritmo que realiza un k -biclique-coloreo en tiempo lineal.

Por otra parte, veremos la clase de los grafos sin C_r , ($r \geq 4$), sin diamantes inducidos. Este caso es similar al de los grafos threshold pero con una estructura de árbol.

Finalmente, estudiaremos algunas clases de grafos donde podemos determinar el número biclique-cromático. Veremos la clase de grafos multipartitos completos, y luego analizaremos las clases de grafos donde cada arista pertenece a una única biclique.

4.1. Casos especiales en grafos split

Si bien vimos en la Sección 3.2 que para todo $k \geq 2$, k -BICLIQUE-COLORING restringido a grafos split es NP-Completo, existen situaciones en las que determinar la existencia de un coloreo tiene complejidad lineal. En esta sección y en la próxima veremos algunas subclases de grafos split donde esto sucede. Comenzaremos abordando algunas subclases donde podemos resolver k -BICLIQUE-COLORING en tiempo lineal, estableciendo restricciones sobre los bloques que se pueden formar en el conjunto K del grafo de entrada.

Sabemos por la Propiedad 1.2 que, para todo G , $\chi_{bc}(G) \geq \beta(G)$. Esto nos permite afirmar que si $\beta(G) > k$, entonces G no es k -biclique-coloreable. Para los grafos split, además, también vale que si $\beta(G) < k$, entonces G sí es k -biclique-coloreable.

Propiedad 4.1. *Si G es un grafo split con $\beta(G) < k$, entonces G es k -biclique-coloreable. Más aún, se puede encontrar un k -biclique-coloreo de G en tiempo lineal.*

Demostración. Dado $G = (K \cup I, E)$, basta con colorear los bloques usando un color distinto entre 1 y $\beta(G)$ en cada vértice, y todos los vértices de I con el color k . En el Algoritmo 4.1 podemos ver este procedimiento.

Algoritmo 4.1 Algoritmo de coloreo para grafos split con $\beta(G) < k$

Entrada: Grafo $G = (K \cup I, E)$ split, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\beta(G) < k$.

Salida: Función de coloreo f de G que es un k -biclique-coloreo.

1. Determinar los bloques B_1, \dots, B_r de G .
 2. Definir $f(b_{ij}) = j$ para $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, |B_i|\}$.
 3. Definir $f(v) = k$ para todo vértice $v \in I$.
 4. Devolver f .
-

Para ver que este coloreo es correcto, basta ver que toda biclique que es una arista que conecta dos vértices mellizos es bicromática, dado que todos los vértices de cada bloque son de color distinto, y que cualquier otra biclique en G tiene al menos un vértice de K y un vértice de I , y no hay ningún vértice de K de color k , puesto que $\beta(G) < k$.

Para ver que el algoritmo es lineal, observemos que los bloques de un grafo se pueden obtener en tiempo $O(n + m)$, aplicando el algoritmo de partición en bloques mencionado en la Sección 1.4. Luego, se recorren los vértices de 3 subconjuntos de G y a cada uno se le hace la asignación. Esto último cuesta $O(n)$ tiempo, y en consecuencia la complejidad total es $O(n + m)$. \square

Notar que esta propiedad nos dice, en particular, que cuando G no contiene vértices mellizos, se puede 2-biclique-colorear.

Corolario 4.1. *Si G es un grafo split sin vértices mellizos, entonces G se puede 2-biclique-colorear en tiempo lineal.*

Lo visto hasta aquí nos muestra que k -BICLIQUE-COLORING para grafos split es fácil cuando $\beta(G) < k$. Sin embargo, si $\beta(G) = k$ y el bloque de tamaño k es único, existen casos en los que k -BICLIQUE-COLORING sigue siendo fácil de resolver. Veamos cómo, para los casos $k = 2$ y $k \geq 3$.

Propiedad 4.2. *Sea G un grafo split con $\beta(G) = 2$. Si existe un único bloque B de tamaño 2 en G , y $\bigcup_{v \in S(B)} N(v) \subset K$, entonces G es 2-biclique-coloreable. Más aún, se puede encontrar un 2-biclique-coloreo de G en tiempo lineal.*

Demostración. Sea $B = \{b_1, b_2\}$. Coloreamos G de manera tal que b_1 es de color 1, b_2 es de color 2, los vértices de $K \setminus B$ del color 1, y los vértices de I del color 2. Este esquema de coloreo se ve representado en el Algoritmo 4.2.

Algoritmo 4.2 Algoritmo de coloreo para grafos split, con un solo bloque de tamaño 2

Entrada: Grafo $G = (K \cup I, E)$ split, tal que existe un único bloque $B = \{b_1, b_2\}$ en G y $\bigcup_{v \in S(B)} N(v) \subset K$.

Salida: 2-biclique-coloreo f de G .

1. Definir $f(b_1) = 1, f(b_2) = 2$.
 2. Definir $f(v) = 1$ para todo $v \in K \setminus B$.
 3. Definir $f(v) = 2$ para todo $v \in I$.
 4. Devolver f .
-

Para ver que la salida del algoritmo es un 2-biclique-coloreo, observemos que la arista (b_1, b_2) es bicromática porque b_1 y b_2 son de colores distintos. Cualquier otra biclique de G incluye al menos un vértice de K y un vértice de I . Dado que todos los vértices de I son de color 2, y que el único vértice de K que es de color 2 es b_2 , si existe una biclique monocromática, ésta debe ser la estrella centrada en b_2 . Sin embargo, como $\bigcup_{v \in S(B)} N(v) \subset K$, la estrella $\{\{b_2\}, S(b_2)\}$ no es maximal, ya que existe al menos un $w \neq b_2 \in K$ que es adyacente a b_2 y no es adyacente a ningún vertice de $S(b_2)$. Como w es de color 1, la biclique es bicromática.

Si los vértices b_1 y b_2 vienen indicados en la entrada, entonces el coloreo se obtiene en $O(n)$, dado que sólo se está recorriendo la lista de vértices y asignando un color a cada uno según a qué conjunto pertenece. Si hay que buscar b_1 y b_2 , hay que realizar una rutina de reconocimiento de vértices mellizos, llevando la complejidad a $O(n + m)$. \square

Propiedad 4.3. *Sea $G = (K \cup I, E)$ un grafo split y sean B_1, \dots, B_r sus bloques de manera tal que $k = |B_1| \geq |B_2| \geq \dots \geq |B_r|$. Si $k \geq 3$, $|S(B_1)| \geq 2$ y $|B_2| \leq k - 2$, entonces G es k -biclique-coloreable. Más aún, se puede encontrar un k -biclique-coloreo de G en tiempo lineal.*

Demostración. Para colorear G en este caso, nuevamente utilizamos un color distinto entre 1 y k para cada vértice en cada bloque. Por otra parte, coloreamos todos los vértices de I , salvo un vértice arbitrario tomado de $S(B_1)$, con el color k . Al vértice elegido de $S(B_1)$ le asignamos el color $(k - 1)$. El desarrollo de este procedimiento se ve en el Algoritmo 4.3.

Para verificar que este coloreo es correcto, empecemos por ver que las bicliques formadas por vértices mellizos seguro son bicromáticas, debido a que todos los vértices dentro de un mismo bloque son de color distinto.

Cualquier otra biclique de G incluye al menos un vértice de K y un vértice de I . Existe un único vértice $z \in I$ de color $(k - 1)$ y un único vértice $b \in K$ de color $(k - 1)$, que pertenece a B_1 . Estos dos vértices no son mellizos, y por el Lema 1.1, no forman

Algoritmo 4.3 Algoritmo de coloreo para grafos split con un bloque de tamaño k y segundo bloque más grande de tamaño $(k - 2)$

Entrada: Grafo $G = (K \cup I, E)$ split, tal que B_1, \dots, B_r son los bloques de G , $k = |B_1| \geq |B_2| \geq \dots \geq |B_r|$, $k \geq 3$, $|B_2| \leq k - 2$ y $|S(B_1)| \geq 2$.

Salida: k -biclique-coloreo f de G .

1. Definir $f(b_{ij}) = j$ para $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, |B_i|\}$.
 2. Definir $f(z) = k - 1$ para un vértice arbitrario $z \in S(B_1)$.
 3. Definir $f(v) = k$ para todo vértice $v \in I \setminus \{z\}$.
 4. Devolver f .
-

una biclique. Entonces, están contenidos en alguna biclique que contiene vértices de otro color.

El resto de los vértices de I son de color k , y nuevamente hay un único vértice $b \in K$ de color k , en el bloque B_1 . Corroboremos entonces que no hay una estrella centrada en b que sea una biclique monocromática.

Si existe una estrella centrada en b que tiene por puntas exactamente a $S(B_1)$, entonces la biclique es policromática, debido a que z , pertenece a $S(B_1)$. Si, en cambio, la estrella incluye algún vértice de $K \setminus B_1$, la biclique también es bicromática, porque no hay otro vértice en K salvo b de color k .

Si el grafo de entrada ya tiene discriminados los bloques, entonces el proceso requiere pasar una vez por cada vértice para asignarle su correspondiente color. Determinar el vértice z , además, va a requerir recorrer el vecindario de por lo menos un vértice para encontrar un elemento de I . Por lo tanto, el algoritmo requiere a lo sumo $O(n)$ tiempo.

Si en cambio el grafo de entrada no tiene los bloques determinados, su búsqueda más la construcción del coloreo se realizan en tiempo $O(n + m)$. \square

4.2. Grafos threshold

Otra subfamilia de los grafos split en la que se puede determinar si existe un k -biclique-coloreo en tiempo polinomial es la de los grafos threshold.

Los grafos threshold se definen como aquellos para los cuales existe una *asignación threshold*, consistente de una función $a : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, y una constante entera t tal que, para todo $X \subseteq V(G)$ vale que:

$$X \text{ es un conjunto independiente en } G \text{ si y sólo si } \sum_{x \in X} a(x) \leq t$$

Sin embargo, para el propósito del análisis del problema k -BICLIQUE-COLORING en grafos threshold, utilizaremos otras caracterizaciones equivalentes. La familia de grafos threshold corresponde a los grafos $(2K_2, C_4, P_4)$ -free, es decir, son los grafos split que no poseen un P_4 inducido. Además, en todo grafo G threshold, los vértices de G admiten un orden v_1, v_2, \dots, v_n tal que v_i es o bien universal o bien aislado de $G[\bigcup_{j<i} v_j]$. Nos referiremos a un ordenamiento de los vértices que cumple esta característica como *ordenamiento threshold* y diremos que v_i es de *tipo aislado* o *tipo universal* de acuerdo a si v_i es aislado o universal en $G[\bigcup_{j<i} v_j]$. Se puede ver que los ordenamientos threshold de un grafo G difieren a lo sumo en la permutación de algún conjunto de vértices consecutivos que son todos de tipo universal o todos de tipo aislado. Además, dado un ordenamiento threshold v_1, \dots, v_n , se considera el vértice v_1 del mismo tipo que v_2 , ya que permutar v_1 por v_2 de esta manera también resulta en una secuencia threshold válida.

Las demostraciones para estas equivalencias se pueden encontrar en [Gol04].

Vamos a definir la *secuencia de conjuntos* de G agrupando todos los vértices consecutivos del mismo tipo de la secuencia threshold de G . Es decir, la secuencia de conjuntos de G es $B_1, I_1, B_2, I_2, \dots, B_r, I_r$, donde B_1 contiene todos los vértices consecutivos de la secuencia threshold de G desde v_1 hasta el primero que es de tipo aislado, I_1 contiene desde el primero que es de tipo aislado hasta el siguiente que es de tipo universal, siguiendo consecutivamente hasta B_r . Debido a que v_1 y v_2 pueden ser de tipo aislado, el conjunto B_1 puede ser vacío. Todo otro conjunto de la secuencia es no vacío. Además, como v_1 y v_2 son del mismo tipo, el primer conjunto no vacío de la secuencia tiene por lo menos dos vértices. Además, como trabajamos con grafos conexos, el conjunto I_r siempre es vacío, pero por simplicidad de notación lo listaremos.

Entonces, para $i \in \{1, \dots, r-1\}$, los vértices de I_i son adyacentes únicamente a los vértices de B_j con $i \leq j \leq r$, mientras que los vértices de B_i son no adyacentes únicamente a los vértices de I_j con $i \leq j \leq r$.

Como los grafos threshold son en particular grafos split, un grafo G threshold se puede descomponer en un completo K y un conjunto independiente I . Es fácil ver que, si $B_1, I_1, B_2, I_2, \dots, B_r, I_r$ es la secuencia de conjuntos de G , entonces $I = \bigcup_{i=1}^r I_i$ y $K = \bigcup_{i=1}^r B_i$ forman una partición válida. Vamos a suponer que K e I se definen así para todo grafo threshold, a no ser que aclaremos lo contrario. Luego, para $i \in \{1, \dots, r\}$, $S(B_i) = \bigcup_{j<i} I_j$.

La Figura 4.1 muestra los vértices de un grafo G threshold agrupados según su secuencia de conjuntos.

Notar que $S(B_i) \subset S(B_j)$ si $i < j \leq r$. Esta inclusión es estricta, pues como son dos bloques distintos, ha de existir al menos el conjunto I_i , que es no vacío, y los vértices de I_i son satélites de los vértices de B_j pero no de los de B_i . Entonces, podemos categorizar las bicliques de un grafo threshold de la siguiente manera:

Observación 2. Sea G un grafo threshold, $B_1, I_1, B_2, I_2, \dots, B_r, I_r$ la secuencia de conjuntos de G , y D una biclique de G . Entonces se verifica alguno de estos tres casos:

1. D es una estrella $\{v\}\{S(B_i)\}$ con $v \in B_i$, para $i \in \{1, \dots, r\}$. Este caso es posible

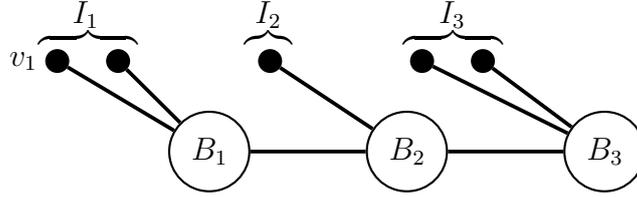


Figura 4.1: Esquema de la secuencia de conjuntos para un grafo G threshold. Si bien por simplicidad no están graficadas las aristas, los vértices de I_1 son totalmente adyacentes a B_2 y B_3 , y los vértices de I_2 son totalmente adyacentes a B_3 .

sólo si $B_1 = \emptyset$.

2. D es $\{v\}\{w\}$, con v y w vértices mellizos.

3. D es una estrella centrada en $b_j \in B_j$ para $j \in \{2, \dots, r\}$, donde una punta es $b_i \in B_i$, con $i \in \{1, \dots, j-1\}$, $i \neq j$, y el resto son el conjunto $\bigcup_{i \leq k < j} I_k$.

Demostración. En primer lugar, debido a que los grafos threshold son split, se aplica el Lema 3.1, es decir, las bicliques de G tienen a lo sumo una arista que conecta dos vértices de K . Entonces, si se considera la secuencia de conjuntos $B_1, I_1, B_2, I_2, \dots, B_r, I_r$ de un grafo G threshold, las bicliques que tienen un solo vértice de K son las estrellas que tienen a $b_i \in B_i$ por centro, y a $S(b_i) = S(B_i)$ como puntas, para algún $i \in \{1, \dots, r\}$. Para que la biclique sea maximal, $\bigcup_{w \in S(b_i)} N[w] = K$, es decir, los vértices de $S(B_i)$ deben ser adyacentes a todos los vértices de K , en particular a los pertenecientes a B_1 . Como los vértices de I_j para cualquier $j \in \{1, \dots, r\}$ sólo son adyacentes a los vértices de B_k para $k \geq j$, esto sucede sólo si B_1 es vacío.

Por otra parte, si hay una arista que conecta dos vértices de K en la biclique, estos dos vértices pueden pertenecer al mismo bloque B_i , para $i \in \{1, \dots, r\}$, o ser $b_i \in B_i$, $b_j \in B_j$, para $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $i < j$. En el primer caso, por ser mellizos y por Lema 1.1, la arista propia es una biclique. En el segundo, como $S(B_i) \subset S(B_j)$, la biclique es una estrella centrada en b_j , y sus puntas son exactamente b_i y $S(B_j) \setminus (B_i)$, es decir, $\bigcup_{i \leq k < j} I_k$. □

Debido a que los grafos threshold son una subclase de los grafos split, por la Propiedad 4.1, si $\beta(G) < k$ el problema k -BICLIQUE-COLORING se puede resolver en tiempo polinomial. Veamos que, en particular para esta familia, aún cuando $\beta(G) = k$ podemos determinar si existe un k -biclique-coloreo de G de manera eficiente.

Teorema 4.1. *Sea G un grafo threshold tal que $\beta(G) = k$, y sea además $B_1, I_1, B_2, I_2, \dots, B_r, I_r$ su secuencia de conjuntos. Entonces son equivalentes:*

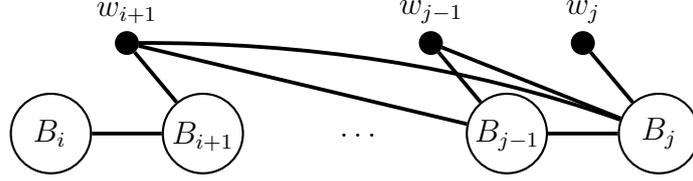


Figura 4.2: Un esquema de la estructura prohibida para la k -biclique-coloreabilidad de un grafo threshold. Los bloques B_i y B_j son de tamaño k , mientras que los bloques B_{i+1}, \dots, B_{j-1} son de tamaño $k-1$. Para $q \in \{i+1, \dots, j\}$, el conjunto I_q contiene un único vértice w_q .

- G es k -biclique-coloreable.
- No existen i y $j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $i < j$, $|B_i| = |B_j| = k$, $|B_q| = k-1$, e $|I_h| = 1$ para todo $q \in \{i+1, \dots, j-1\}$ y todo $h \in \{i, \dots, j-1\}$.

Demostración. Comencemos viendo que si existen B_i y B_j que cumplen las condiciones descritas, no se pueden utilizar k colores para biclique-colorear G . Vamos a hacer esta prueba separándola en los casos en los que $j = i+1$ y $j \geq i+2$.

Supongamos, para obtener una contradicción, que G admite un k -biclique-coloreo f . En primer lugar, notemos que B_i y B_j son bloques de tamaño k y, por Lema 1.1, todos sus vértices tienen que ser de colores distintos. Entonces hay un vértice de cada uno de los k colores tanto en B_i como en B_j . Para todo $q \in \{i+1, \dots, j-1\}$, el bloque B_q por hipótesis es de tamaño $(k-1)$, lo que quiere decir que contiene vértices de todos los colores menos exactamente uno.

Si $j = i+1$, entonces B_i y B_j son bloques consecutivos, y en la secuencia sólo los separa un conjunto $I_i = \{w\}$. Existe una biclique por cada arista (b_i, b_j) , con $b_i \in B_i$ y $b_j \in B_j$, que es exactamente $\{\{b_j\}, \{b_i, w\}\}$. Entonces, si a, b son los vértices de color $f(w)$ en B_i y B_j respectivamente, la biclique $\{\{b\}, \{a, w\}\}$ monocromática.

Veamos ahora el caso en el que $j \geq i+2$. Sean $B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_{j-1}$ los bloques entre B_i y B_j , todos de tamaño $(k-1)$, y sea $I_h = \{w_h\}$ para todo $i \leq h < j$. Este caso se ve representado en la Figura 4.2.

Consideremos el vértice w_{j-1} y llamemos ρ a su color. Sea $W^{(0)}$ el conjunto $S(B_j) \setminus S(B_i) = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{j-1}\}$. Si todos los vértices de $W^{(0)}$ tuvieran el color ρ , entonces los vértices de color ρ de B_i y B_j , junto con $W^{(0)}$, formarían una biclique monocromática. Por lo tanto al menos un vértice de $W^{(0)}$ es de color distinto a ρ . Tomemos aquel de mayor índice, digamos $w_{i+\alpha}$, y llamemos ϕ a su color.

Dado que el vértice $w_{i+\alpha}$ es el último que no es de color ρ , entonces, $S(B_j) \setminus S(B_{i+\alpha+1})$ está enteramente compuesto por vértices de color ρ . Por lo tanto, si $B_{i+\alpha+1}$ tuviera un

vértice de color ρ , tomando a éste, el vértice de color ρ de B_j , y a $S(B_j) \setminus S(B_{i+\alpha+1})$, se formaría una biclique monocromática. Luego, el bloque $B_{i+\alpha+1}$ no puede contener un vértice del color ρ , y como el tamaño de $B_{i+\alpha+1}$ es $(k-1)$, $B_{i+\alpha+1}$ contiene un vértice de color ϕ .

Consideremos el conjunto de vértices $W^{(1)} = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+\alpha}\}$. Como $B_{i+\alpha+1}$ posee un vértice de color ϕ , si todos los vértices de $W^{(1)}$ fueran de color ϕ , el vértice de color ϕ de B_i , el de $B_{i+\alpha+1}$, y $W^{(1)}$ inducirían una biclique monocromática. Entonces hay por lo menos un vértice de color distinto a ϕ en $W^{(1)}$. Tomemos aquél de índice más alto, digamos $w_{i+\beta}$, y llamemos ψ a su color.

Ahora, $B_{i+\beta+1}$ no posee vértices de color ϕ , porque si hubiera uno formaría una biclique monocromática junto con el vértice de color ϕ de $B_{i+\alpha+1}$ y los vértices $w_{i+\beta+1}, w_{i+\beta+2}, \dots, w_{i+\alpha}$, que son todos de color ϕ porque $w_{i+\beta}$ es el vértice de color distinto a ϕ de índice más alto en $W^{(1)}$. Por lo tanto, el conjunto $B_{i+\beta+1}$ posee un vértice de color ψ .

Análogamente, definimos $W^{(2)}$ como $w_{i+1}, \dots, w_{i+\beta}$, y como $B_{i+\beta+1}$ posee un vértice de color ψ , tiene que existir en $W^{(2)}$ un $w_{i+\gamma}$ que no sea de color ψ . Aplicando este razonamiento de manera iterativa, obtenemos que el conjunto $W^{(t)} = w_{i+1}, \dots, w_{i+\tau}$ siempre debe tener un vértice de color distinto al de $w_{i+\tau}$, lo que nos permite definir un conjunto $W^{(t+1)}$, de cardinal estrictamente menor, para todo $t > 0$. Pero esto es una contradicción, ya que $|W^{(1)}|$ es finito.

Recíprocamente, supongamos que no existen B_i y B_j que cumplan las condiciones del teorema. Podemos establecer el siguiente esquema de coloreo de G , basándonos en un ordenamiento threshold de sus vértices:

1. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, colorear los vértices del bloque B_i utilizando los colores $1, 2, \dots, |B_i|$.
2. Para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, si el bloque $|B_{i+1}| = k$, colorear un vértice de I_i con el color k . Si el $|B_{i+1}| = q < k$, colorear un vértice de I_i con el color $q+1$. Asignar al resto de los vértices de I_i el color 1.

Para ver que este coloreo es válido, analizaremos las bicliques separándolas en los 3 conjuntos especificados en la Observación 2.

- Las bicliques que son la estrella centrada en un vértice $v \in K$, con el conjunto de puntas igual a $S(v)$, sólo existen si $B_1 = \emptyset$. En ese caso, I_1 contiene por lo menos dos vértices. Entonces, a un vértice $u \in I_1$ se le asignó el color $|B_2| + 1$ ó k , y a los demás el color 1. Como $I_1 \subseteq S(v)$ para todo $v \in K$, e I_1 contiene a u y a un vértice de color 1, la biclique es policromática.
- Las bicliques que son aristas entre vértices mellizos son bicromáticas, ya que a todos los vértices de cada bloque se les asignaron colores distintos.

- Por último, analicemos las bicliques que están conformadas por $b_i \in B_i$, $b_j \in B_j$, y $\bigcup_{i < k < j} I_k$. En el caso que b_i y b_j son de color distinto, la biclique ya es policromática. Si $|B_j| < k$, entonces un vértice de I_{j-1} es de algún color $|B_j| + 1$ distinto al color de b_j . Entonces, la biclique es policromática. Si $|B_j| = k$, y $|B_i| < k$, entonces el algoritmo determina que un vértice de I_{j-1} es de color k . Como este vértice pertenece a $\bigcup_{i < k < j} I_k$, y b_i no es de color k , por ser de tamaño menor, la biclique es policromática. Si $|B_i| = |B_j| = k$, entonces hay algún s , tal que o bien $i < s < j$ y $|B_s| < k - 1$, o bien $i \leq s < j$ y $|I_s| > 1$. En el primer caso, el coloreo determina que un vértice de I_{s-1} es de color $q < k - 1$, mientras que un vértice de I_{j-1} es de color k . Como ambos conjuntos están contenidos en $\bigcup_{i < k < j} I_k$, la biclique es policromática. En el segundo caso, un vértice $v \in I_s$ es de color $|B_{s+1}| + 1$, si $|B_{s+1}| < k$, o de color k , si $|B_{s+1}| = k$, y hay al menos otro vértice de color 1 en I_s . Como $I_s \subseteq \bigcup_{i < k < j} I_k$, la biclique es policromática.

Como hemos visto, esta categorización cubre todas las bicliques posibles, mostrando que el coloreo es efectivamente un k -biclique-coloreo. □

Ahora, utilizando el resultado del Teorema 4.1, podemos mostrar un algoritmo que determina un k -biclique-coloreo de un grafo threshold en tiempo lineal, si esto es posible.

Teorema 4.2. *El problema k -BICLIQUE-COLORING para grafos threshold se puede resolver en tiempo $O(n)$, si tenemos los grados de los vértices del grafo de entrada, y en $O(n + m)$, si no.*

Demostración. Vamos a presentar un algoritmo que, para un grafo G threshold, determina si G es k -biclique-coloreable mediante el criterio del Teorema 4.1, y en caso afirmativo devuelve un k -biclique-coloreo de G .

En primer lugar, dados los grados de los vértices de G , obtenemos la secuencia de conjuntos de G . Para ver cómo hacer esto notemos que, en un grafo threshold, dos vértices tienen el mismo grado si y sólo si son gemelos o mellizos (Es decir, pertenecen al mismo conjunto de la secuencia $B_1, I_1, \dots, B_r, I_r$). Si contamos la cantidad de vértices de cada grado que hay en G , obtenemos la cantidad s de conjuntos no vacíos en la secuencia $B_1, I_1, \dots, B_r, I_r$ y el cardinal de cada uno. Como I_r es siempre vacío, si s es un número impar, entonces sabemos que $r = \lceil \frac{s}{2} \rceil$, y si s es par, entonces $r = \frac{s}{2} + 1$ y B_1 es vacío. Luego, como conocemos el cardinal de cada conjunto, podemos determinar a qué conjunto pertenece cada vértice de G , ya que para $i \in \{1, \dots, r - 1\}$, los vértices de $v \in I_i$ tienen grado $\sum_{i < j \leq r} |B_j|$, y para $i \in \{1, \dots, r\}$, los vértices de $v \in B_i$ tienen grado $n - \sum_{i < j \leq r} |I_j|$. Estas ecuaciones provienen del hecho que los vértices de I_i son de tipo aislado y los vértices de B_i son de tipo universal.

El siguiente paso es recorrer los conjuntos de la secuencia en orden. Cada vez que encontramos un conjunto B_x de k vértices, verificamos que no sea el comienzo de una secuencia de la forma $(k, 1, k - 1, 1, k - 1, 1, \dots, k - 1, 1, k)$. Si ello llegara a suceder, sabemos

que G no es k -biclique-coloreable. También verificamos que no hayan bloques de tamaño mayor a k , en cuyo caso tampoco existe un k -biclique-coloreo posible.

Una vez realizado esto, volvemos a recorrer la secuencia de conjuntos. En este caso, aplicando el criterio visto en el Teorema 4.1, determinamos los colores de sus vértices. El Algoritmo 4.4 muestra el esquema enunciado.

Algoritmo 4.4 Algoritmo de coloreo para grafos threshold

Entrada: Grafo G threshold, $k \in \mathbb{N}$.

Salida: **no**, si G no es k -biclique-coloreable, y f , k -biclique-coloreo de G si G es k -biclique-coloreable.

1. Obtener los conjuntos de vertices mellizos y gemelos de G junto con sus cardinales.
2. Determinar a qué elemento de la secuencia $B_1, I_1, \dots, B_r, I_r$ corresponde cada conjunto obtenido por medio de su cardinal.
3. Recorrer los conjuntos $B_1, I_1, \dots, B_r, I_r$ y:
 4. Cuando aparece un bloque B_x de tamaño k , se mantiene registro de que no sea el comienzo de una subsecuencia $(k, 1, k-1, 1, \dots, k-1, 1, k)$. Si esto sucede, o aparece una secuencia de vértices universales de longitud mayor a k , devolver **no**.
5. Para cada $x \in \{1, \dots, r\}$:
 6. En el conjunto B_x , asignar a sus vértices los colores $1, 2, \dots, |B_x|$.
 7. En el conjunto I_x , si $|B_{x+1}| = k$, colorear un vértice de I_x con el color k . Si $|B_{x+1}| = s < k$, asignar a un vértice de I_x el color $s + 1$. En ambos casos, asignar el color 1 al resto de los vértices de I_x .
8. Devolver la asignación obtenida.

La correctitud de este algoritmo es resultado del Teorema 4.1, ya que la evaluación que realizamos es exactamente la aplicación del criterio que allí se enuncia.

Veamos que si tenemos los grados de los vértices este algoritmo toma tiempo $O(n)$. En primer lugar, determinar los conjuntos de mellizos o gemelos y el cardinal de cada uno se puede hacer en $O(n)$ porque sólo es necesario llevar cuenta de los vértices con mismo grado. Luego, determinar la secuencia también se puede hacer en $O(n)$, despejando las ecuaciones sobre los cardinales desde r hasta 1. Finalmente, el algoritmo recorre dos veces la lista de conjuntos de G , aplicando el criterio del Teorema 4.1, lo que nuevamente toma $O(n)$.

Notemos que si no se nos proveen los grados de los vértices de G , podemos calcularlos, pero en ese caso requerimos $O(n + m)$ tiempo para ejecutar el algoritmo. \square

Notemos que como los grafos threshold son en particular split, vale la Observación 1, es decir, todo grafo threshold es 2-clique-coloreable.

4.3. Grafos cordales diamond-free

Los grafos *cordales* son aquellos que no poseen ciclos inducidos de longitud mayor a 3. En la Sección 3.2 estudiamos a los grafos *split*, que son una subfamilia de los cordales. En esta sección estudiaremos otra subclase, la de los grafos cordales que son *diamond-free*.

Los grafos cordales *diamond-free* son usualmente referidos en la literatura como *grafos bloque*, pero dado que esta denominación se basa una definición de bloque diferente a la que adoptamos, no la utilizaremos.

La característica de los grafos cordales *diamond-free* que nos permite estudiar su versión de k -BICLIQUE-COLORING es que tienen la siguiente caracterización: un grafo G es cordal *diamond-free* si y sólo si se puede obtener a partir de un árbol T , reemplazando cada arista (v, w) de T por un completo C de manera tal que $v, w \in C$. Esta caracterización y su demostración se puede encontrar en [Har63, BM86]. Vamos a llamar a T el *árbol principal* de G , y vamos a definir la función $K : E(T) \rightarrow \mathcal{P}(V(G))$, que asigna a cada arista de T el conjunto de vértices de G que forma el completo correspondiente a esa arista. Por simplicidad, notamos $K((v, w))$ como $K(v, w)$.

Veamos cómo utilizar esta caracterización para resolver el problema k -BICLIQUE-COLORING en grafos cordales y *diamond-free*. Para esto comenzaremos notando que las bicliques presentes en grafos de esta familia son de apenas dos tipos distintos.

Observación 3. *Sea G cordal diamond-free, T el árbol principal G , y B una biclique de G . Entonces, se verifica alguna de las siguientes posibilidades:*

- a) *B es una estrella centrada en un vértice $v \in G$ tal que v es vértice interno de T , y por cada clique C que contiene a v , B tiene una punta que es un elemento de $C \setminus \{v\}$.*
- b) *B es una arista que une dos vértices mellizos.*

Demostración. En primer lugar, como G es cordal, no posee ningún C_4 inducido. Luego, todas las bicliques son estrellas.

Sea $B = \{\{v\}, W\}$ una estrella que es biclique. Si v no es un vértice interno de T , entonces $N[v]$ es un completo. Luego, $W \subseteq N[v]$ contiene exactamente un vértice w y, por Lema 1.1, v y w son mellizos, i.e., B satisface la condición b. Si v es un vértice interno de T , entonces v tiene al menos dos vecinos en T . Sean $\{w_1, \dots, w_k\} = N[v] \cap T$. Por definición, ningún vértice de $K(v, w_i)$ es adyacente a un vértice de $K(v, w_j)$ para $1 \leq i < j \leq k$. Por otra parte, $K(v, w_i)$ es un completo. Luego, W contiene exactamente un vértice de $K(v, w_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$, i.e., B satisface la condición a. □

La Observación 3 nos indica que, dado un coloreo de G , la verificación de que un coloreo es un k -biclique-coloreo sólo requiere verificar la no existencia de ciertos colores en sus completos.

Lema 4.1. Sea G cordal *diamond-free* y sea T el árbol principal de G . Un k -coloreo f de G es un k -biclique-coloreo si y sólo si todos los vértices de cada bloque son de color distinto y para cada vértice interno v de T , existe un vértice $w \in N[v] \cap T$ tal que $K(v, w) \setminus \{v\}$ no contiene vértices de color $f(v)$.

Demostración. Usando la categorización de bicliques de la Observación 3, es inmediato que las bicliques que son aristas entre vértices mellizos son bicromáticas si y sólo si en cada bloque todos los vértices son de color distinto.

Para el caso de estrellas centradas en vértices internos de T , consideremos un vértice interno v de T con $\{w_1, \dots, w_k\} = V(T) \cap N(v)$. Si para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ ocurre que $K(v, w_i) \setminus \{v\}$ contiene un vértice z_i de color $f(v)$, entonces $\{v\}\{z_1, \dots, z_k\}$ es una biclique monocromática por Observación 3. En cambio, si ningún vértice de $K(v, w_i)$ es de color $f(v)$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces toda biclique estrella centrada en v es policromática porque, por Observación 3, contiene algún $z \in K(v, w_i)$. \square

Consideremos un grafo G cordal *diamond-free*, tal que T es el árbol principal de G . Llamaremos *árbol etiquetado* de G , y lo denotamos por T^G , al árbol con los mismos vértices y aristas que T , pero en el que toda arista $(v, w) \in E(T)$ se etiqueta con el valor $|K(v, w)| - |\{x \in \{v, w\} \mid x \text{ no es hoja de } T\}|$. Es decir, la arista (v, w) se etiqueta con $|K(v, w)| - 2$ si v y w son ambos vértices internos de T , y con $|K(v, w)| - 1$ si uno entre v y w es interno y el otro hoja de T , y con $|K(v, w)| = 2$ si ambos son hojas. Del desarrollo de la Observación 3 podemos ver que la etiqueta de la arista (v, w) de T^G representa la cantidad de vértices mellizos de $K(v, w)$. En la Figura 4.3 vemos un ejemplo de esta construcción.

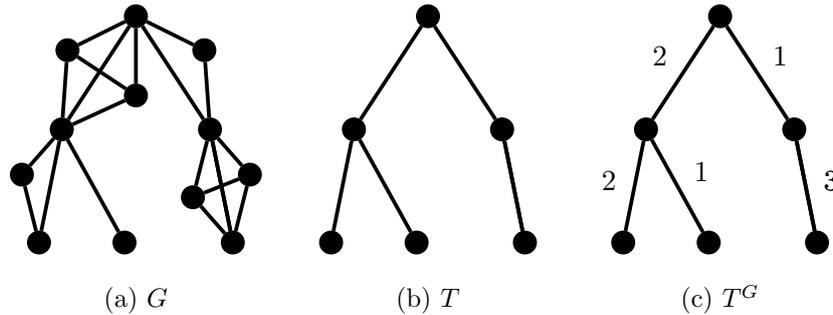


Figura 4.3: Ejemplo de grafo G cordal *diamond-free*, con su árbol principal T y árbol etiquetado T^G .

Por otra parte, diremos que un *subárbol entero* de un árbol T es un subárbol inducido $H \subseteq T$ tal que los vértices internos de H tienen el mismo grado en H y en T .

Ahora estamos listos para enunciar la propiedad de biclique-coloreo de grafos cordales *diamond-free*.

Teorema 4.3. *Sea G un grafo cordal diamond-free con $\beta(G) = k$ y sea T^G su correspondiente árbol etiquetado. Son equivalentes:*

- i. G no es k -biclique-coloreable.*
- ii. Existe un subárbol entero H de T^G , con al menos 3 vértices, tal que todas las hojas de H pertenecen a aristas etiquetadas con el valor k , y que todas las demás aristas de H están etiquetadas con el valor $k - 1$.*

Demostración. Supongamos que existe un subárbol H de T como el que se describe en el ítem *ii*, y aún así G admite un k -biclique-coloreo f . Consideremos las siguientes propiedades.

Propiedad 4.4. *El subárbol H contiene una arista entre vértices internos (v, w) tal que $K(v, w) \setminus \{v\}$ no contiene ningún vértice de color $f(v)$.*

Demostración. Sea v un vértice interno de H . Por Lema 4.1, existe algún $w \in V(T)$ tal que $K(v, w) \setminus \{v\}$ no contiene vértices de color $f(v)$, ya que si no f no sería un k -biclique-coloreo. Por definición de árbol maximal, $w \in V(H)$. Si w fuera hoja de H , entonces $K(v, w) \setminus \{v\}$ contendría k vértices mellizos por hipótesis. Pero entonces, $K(v, w)$ contendría un vértice de color $f(v)$ por Lema 1.1, lo cual es absurdo. Luego, w es un vértice interno de H . \square

Propiedad 4.5. *Si H contiene un camino v_1, \dots, v_j ($j > 1$) de vértices internos tales que $K(v_i, v_{i+1}) \setminus \{v_i\}$ no contiene ningún vértice de color $f(v_i)$ para todo $1 \leq i < j$, entonces existe un vértice v_{j+1} que es interno de H tal que $K(v_j, v_{j+1}) \setminus \{v_j\}$ no contiene vértices de color $f(v_j)$ y v_1, \dots, v_{j+1} es un camino de H .*

Demostración. Por Lema 4.1, existe algún vértice $v_{j+1} \in V(T)$ tal que $K(v_j, v_{j+1}) \setminus \{v_j\}$ no contiene vértices de color $f(v_j)$. Por definición de H , $v_{j+1} \in V(H)$. Si v_{j+1} fuera hoja de H , entonces, como en la Propiedad 4.4, obtendríamos que $K(v_j, v_{j+1}) \setminus \{v_j\}$ tiene un vértice de color $f(v_j)$, lo cual es una contradicción. Luego, v_{j+1} es un vértice interno de H . Como H es un árbol, $v_{j+1} \notin \{v_1, \dots, v_{j-2}\}$. Por último, (v_j, v_{j-1}) está etiquetada con el valor $k - 1$. Luego, $K(v_j, v_{j-1}) \setminus \{v_j, v_{j-1}\}$ tiene $k - 1$ vértices mellizos y todos tienen colores distintos por Lema 1.1. Como todos los vértices de $K(v_j, v_{j-1}) \setminus \{v_{j-1}\}$ tienen colores distintos a v_{j-1} , entonces algún vértice de $K(v_j, v_{j-1}) \setminus \{v_{j-1}\}$ tiene color $f(v_j)$. Luego, $v_{j+1} \neq v_{j-1}$. \square

Las Propiedades 4.4 y 4.5 (esta última aplicada iterativamente) implican que H contiene un camino simple de longitud $|V(H)| + 1$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción proviene de suponer que G es k -biclique-coloreable.

Para el recíproco, supongamos que T^G no contiene un subárbol entero con las características mencionadas. Vamos a describir un algoritmo para el coloreo para G que emplea a lo sumo k colores.

En primer lugar, computamos cada subárbol maximal H de T^G que contiene únicamente aristas etiquetadas con el valor $k - 1$. Aquí, la maximalidad es en cuanto a la inclusión de aristas, i.e., ningún vértice de H incide en una arista etiquetada con el valor $k - 1$ que no pertenezca a H . Por hipótesis, H debe contener un vértice $z(H)$ que o bien sea hoja de T^G , o bien incida en una arista de T^G etiquetada con un valor menor a $k - 1$. Caso contrario, el subárbol entero H' cuyos vértices internos son los vértices de H sería un árbol como el mencionado en *ii*, ya que todas las hojas de H' estarán conectadas con el resto del árbol por medio de aristas etiquetadas con el valor k , y todas las demás aristas de H' estarían etiquetadas con el valor $k - 1$. Por lo tanto, podemos fijar $z(H)$ para cada H de T^G .

En segundo paso, fijamos un vértice $r \in T^G$ como raíz y coloreamos los vértices de T^G por niveles, de manera que los vértices en niveles pares tienen color 1 y los de niveles impares tienen color 2. Los vértices de $V(G) \setminus V(T^G)$ pertenecen a un completo $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ para alguna arista $(v, w) \in E(T^G)$. En el tercer paso, según v , w , y la etiqueta que posea la arista (v, w) en T^G , determinamos el coloreo de los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ de acuerdo con las siguientes reglas.

- Si (v, w) está etiquetada con el valor k , entonces asignamos a los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ los k colores.
- Si (v, w) está etiquetada con el valor $q \leq k - 2$, entonces coloreamos los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ con los colores $3, \dots, q + 2$.
- Si v o w es hoja de T^G , y (v, w) está etiquetada con el valor $k - 1$, coloreamos los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ con los colores $3, \dots, k$.
- Si ni v ni w son hojas de T^G , y (v, w) está etiquetada con el valor $k - 1$, entonces (v, w) pertenece a un único subárbol maximal H de T^G que contiene únicamente aristas etiquetadas con el valor $k - 1$. En tal caso, coloreamos $k - 2$ de los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ con los colores $3, \dots, k$, y al vértice restante le asignamos el mismo color que aquel entre v y w que se encuentre a menor distancia de $z(H)$.

Para ver que este coloreo es un k -biclique-coloreo, debemos chequear las condiciones del Lema 4.1. Verifiquemos primero que ningún bloque tiene dos vértices del mismo color. Consideremos una arista (v, w) de T^G . De acuerdo con las reglas de arriba, los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ reciben siempre colores distintos. Más aún, si alguno de v o w es hoja, entonces ningún vértice de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ utiliza el color 1 o 2. Luego, los vértices mellizos en $K(v, w)$ tienen colores diferentes.

Veamos ahora que para todo vértice v interno de T^G , existe un vértice $w \in N(v)$ tal que $K(v, w) \setminus \{v\}$ no tiene vértices del mismo color que v . Para esto, consideremos la arista (v, w) cuya etiqueta tiene el valor q mínimo. Si $q = k$, entonces el vecindario de v en T^G induce un subárbol como el descrito en *ii*, lo que es imposible. Si $q \leq k - 2$, entonces los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ utilizan los colores $3, \dots, q + 2$, por lo que ningún

vértice de $K(v, w) \setminus \{v\}$ es del mismo color que v . Por último, supongamos que $q = k - 1$. En este caso, (v, w) pertenece a un subárbol maximal H de T^G cuyas aristas tienen todas el valor $k - 1$. Como v no es hoja de T^G y no incide en ninguna arista etiquetada con un valor menor a $k - 1$, entonces $v \neq z(H)$. Luego, existe algún $x \in N(v) \cap V(H)$ en el camino entre v y $z(H)$. Como la distancia de x a $z(H)$ es menor que la distancia de v a $z(H)$, entonces los vértices de $K(v, w) \setminus \{v, x\}$ se colorean con los colores $3, \dots, k$, más el color de x . Por lo tanto, $K(v, w) \setminus \{v\}$ no contiene vértices del mismo color que v . Entonces, el coloreo es válido. \square

Podemos ver el pseudocódigo del algoritmo presentado en el Teorema 4.3, en el Algoritmo 4.5.

Algoritmo 4.5 k -biclique-coloreo para grafos cordales *diamond-free*

Entrada: grafo G cordal *diamond-free*, $k \in \mathbb{N}$.

Salida: **no**, si G no es k -biclique-coloreable, k -biclique-coloreo f de G si G es k -biclique-coloreable.

1. Determinar el árbol etiquetado T^G .
 2. Si alguna arista entre vértices internos queda etiquetada con un valor mayor a k , o una arista que incide en una hoja de T queda etiquetada con un valor $q \geq k$, devolver **no**.
 3. Determinar los subárboles maximales de T^G en los que toda arista tenga etiqueta $k - 1$.
 4. Para cada subárbol H , buscar los vértices de salida de H . Si alguno no tiene vértices de salida, devolver **no**. Si tiene más de uno, elegir uno $z(H)$ arbitrariamente.
 5. Elegir un vértice arbitrario r de T^G y colorear los vértices de T^G , de manera que a los vértices de niveles impares se les asigna el color 1 y a los de niveles pares, el color 2.
 6. Para los vértices pertenecientes a $K(v, w) \setminus \{v, w\}$ para una arista (v, w)
 7. Si (v, w) está etiquetada con el valor k , se colorean utilizando los k colores.
 8. Si (v, w) está etiquetada con un valor $q \leq k - 2$, se colorean utilizando los colores $3, 4, \dots, q + 2$.
 9. Si v o w es hoja de T^G , y (v, w) está etiquetada con el valor $k - 1$, se colorean con los colores $3, 4, \dots, k$.
 10. Si v y w son vértices internos de T^G , y (v, w) está etiquetada con el valor $k - 1$, se utilizan los colores $2, \dots, k$ más el color de aquel entre v y w que tenga menor distancia con el vértice z correspondiente al subárbol maximal que contiene la arista (v, w) .
-

Veamos que dado un grafo G cordal *diamond-free*, podemos correr este algoritmo y, de ser posible, calcular un k -biclique-coloreo de G , en tiempo polinomial.

Teorema 4.4. *Sea G un grafo cordal diamond-free. Se puede determinar si G es k -biclique-coloreable, y, en caso afirmativo, obtener un k -biclique-coloreo de G , en tiempo lineal.*

Demostración. Para probar esto basta con ver que el Algoritmo 4.5 funciona en tiempo lineal. Entonces, vamos a revisar los pasos del algoritmo y ver su costo computacional.

La obtención del árbol etiquetado de T^G , y la evaluación de que ninguna arista esté etiquetada con un valor mayor a k , se puede hacer en tiempo $O(n + m)$ haciendo una exploración *BFS* de G .

Luego, la obtención de los subárboles maximales con aristas etiquetadas con el valor $k - 1$ se puede hacer en $O(n)$, ya que se trabaja recorriendo las aristas del árbol T^G , y existe a lo sumo un subárbol maximal por cada arista. La evaluación de la existencia del vértice de salida para cada uno de estos subárboles se puede hacer en el mismo recorrido en el que se establece su extensión.

Los pasos 5–10 recorren primero los vértices de G , para hacer el coloreo por niveles, y luego recorren sus aristas, para las cuales hacen una evaluación que toma $O(1)$ y con su resultado establecen el color de todos los vértices pertenecientes a la clique de G que corresponde a esa arista. Esta etapa cuesta, entonces, $O(n)$.

Por lo tanto hemos visto que podemos evaluar si un grafo cordal *diamond-free* es k -biclique-coloreable, y, en caso afirmativo, presentar un k -biclique-coloreo, en tiempo $O(n + m)$. \square

Como con otras familias de grafos, nos podemos preguntar como se compara la complejidad del problema k -BICLIQUE-COLORING contra k -CLIQUE-COLORING en grafos cordales *diamond-free*. Nuevamente encontramos que la pregunta de k -CLIQUE-COLORING para esta familia de grafos se puede responder de manera inmediata.

Observación 4. *Sea G grafo cordal, diamond-free. Entonces G es 2-clique-coloreable.*

Demostración. Sabiendo que los grafos cordales *diamond-free* son aquellos se obtienen de un árbol principal T , reemplazando cada arista por un completo, es fácil ver que las cliques de G son exactamente $K(v, w)$ para cada arista (v, w) de T .

Entonces, basta con colorear los vértices de T por niveles, es decir, todos los de niveles pares con el color 1, y los de niveles impares con el color 2. Luego, como toda clique es un completo que contiene una arista de T , siempre incluye un vértice del color 1 y uno de color 2. \square

4.4. Grafos donde cada arista pertenece a una única biclique

Para completar este capítulo, vamos a ver que en los grafos donde cada arista pertenece a una única biclique podemos determinar el número biclique-cromático, haciendo inmediata la respuesta a la pregunta de k -BICLIQUE-COLORING.

En esta sección utilizaremos el grafo *paw*. Un *paw* es un grafo de 4 vértices como el que se ve en la Figura 4.4.

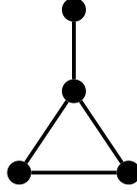


Figura 4.4: El grafo *paw*.

Para empezar, veamos que podemos determinar el número biclique-cromático para grafos multipartitos completos. Un grafo G es *multipartito completo* cuando $V(G)$ se puede particionar en $s \geq 1$ subconjuntos independientes I_1, \dots, I_s tales que $\{I_i, I_j\}$ es una biclique para $1 \leq i < j \leq s$.

Veamos que el número biclique cromático de los grafos multipartitos completos coincide con su cantidad de vértices universales, si tiene más de uno, o 2, en caso contrario.

Teorema 4.5. *Si G es un grafo multipartito completo no trivial, entonces, vale que $\chi_{bc}(G) = \max(r, 2)$, donde r es la cantidad de vértices universales de G .*

Demostración. Sea G multipartito completo con multipartición I_1, \dots, I_s . Observemos que si $I_i = \{v\}$ para algún $i \in \{1, \dots, s\}$, entonces v es un vértice universal, ya que debe ser adyacente a $\bigcup_{j \in \{1, \dots, s\}} I_j \setminus \{v\}$. Por otra parte, todos los vértices universales de G son mellizos, y forman un bloque.

Por lo tanto, coloreamos los vértices de G de manera que los vértices universales son todos de color disinto, y en cada conjunto I_i con $|I_i| \geq 2$, coloreamos un vértice de color 1 y el resto de color 2.

Notemos que toda biclique de G es de la forma $\{I_i, I_j\}$, para un par $i, j \in \{1, \dots, s\}$. Si alguno de i o j es un conjunto de 2 o más vértices, entonces la biclique es policromática porque en estos conjuntos hay un vértice de color 1 y uno de color 2. Si tanto I_i como I_j son conjuntos de un vértice, entonces la biclique es bicromática porque todos los vértices universales son de colores distintos.

Por lo tanto tenemos un biclique-coloreo que utiliza $\chi_{bc}(G) = \max(r, 2)$ colores, donde r es la cantidad de vértices universales de G . Dado que el conjunto de vértices universales de G es un bloque, por Propiedad 1.2, no se pueden utilizar menos de r colores para biclique-colorear G . \square

Por otra parte, es sencillo ver que desde el punto de vista del clique coloreo, los grafos multipartitos completos son siempre 2-clique-coloreables.

Observación 5. *Sea G grafo multipartito completo. Entonces, G es 2-clique-coloreable.*

Demostración. Si G es multipartito completo con multipartición I_1, \dots, I_s , toda clique de G contiene exactamente un vértice $v_i \in I_i$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces, basta con asignar el color 1 a los vértices de I_1 , y el color 2 a los vértices de $V(G) \setminus I_1$. Luego, como toda clique incluye un vértice de I_1 y otro de I_2 , es bicromática. \square

Veamos ahora que número biclique-cromático también se puede determinar sobre la familia de grafos en los que cada arista pertenece a una única biclique. En primer lugar veamos que esta es exactamente la familia de grafos (P_4, paw) -free.

Lema 4.2. *Sea G grafo conexo. Toda arista de G pertenece a una única biclique si y sólo si G es (P_4, Paw) -free.*

Demostración. Veamos en primer lugar que si hay un P_4 o un paw en G , entonces existe al menos una arista que pertenece a dos bicliques distintas.

Sean $a, b, c, d \in G$ tales que (a, b) , (b, c) , y $(c, d) \in E(G)$, y tales que a y c no son adyacentes, y a y d no son adyacentes. En este caso, podemos ver que $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ pertenece a una biclique. Observemos las posibilidades para la adyacencia entre b y d .

- Si b y d no son adyacentes, entonces a, b, c y d inducen un P_4 . Entonces, $\{\{c\}, \{b, d\}\}$ pertenece a una biclique distinta a $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, por lo que la arista (b, c) se encuentra en dos bicliques distintas. Este caso se puede ver en la Figura 4.5a.
- Si b y d son adyacentes, entonces a, b, c y d inducen un paw . Entonces, $\{\{b\}, \{a, d\}\}$ pertenece a una biclique distinta a $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, por lo que la arista (a, b) se encuentra en dos bicliques distintas. Este caso se puede ver en la Figura 4.5b.

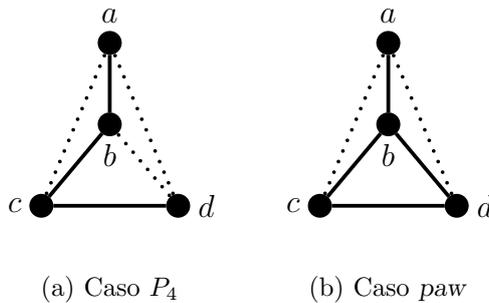


Figura 4.5: Prueba de que la existencia de un P_4 o un paw implica la existencia de una arista presente en más de una biclique.

Por lo tanto, la existencia de un paw o un P_4 inducido en G hace que exista al menos una arista contenida en más de una biclique.

Ahora supongamos que existe una arista (v, w) que pertenece a dos bicliques distintas, y veamos que entonces existe un P_4 o un paw inducido en G .

Sean $A = (V, W)$ y $B = (X, Y)$ las dos bicliques que comparten la arista (v, w) . Sin pérdida de generalidad, supongamos que v está en V y X , mientras que w está en W e Y .

Ahora, como A y B son bicliques distintas, tiene que existir al menos un vértice en cada una que no esté en la otra (pues, dado que las bicliques por definición son maximales respecto de la inclusión, no puede ser que una esté incluida en la otra). Sea a un vértice que está en la biclique A y no en B . Sin pérdida de generalidad, supongamos que a está en V . Como a no constituye un bipartito completo al unirlo con B , debe suceder que a es adyacente a un vértice de $X \setminus V$, o no adyacente a un vértice de $Y \setminus W$.

Supongamos que a es adyacente a un vértice b de $X \setminus V$. Por otra parte, a tiene ser adyacente a w , y no adyacente a v , pues los tres pertenecen a A . Análogamente, b debe ser adyacente a w y no a v , pues los tres pertenecen a B . Pero entonces, v, w, a y b forman un paw . Esta situación se muestra en la Figura 4.6a.

Ahora supongamos que a es no adyacente a un vértice c de $Y \setminus W$. En este caso, a es adyacente a w , y no adyacente a v , ya que los tres pertenecen a A , y v debe ser adyacente a c , y no adyacente a w , ya los tres pertenecen a B . Entonces, v, w, a y c forman un P_4 . Esta situación se muestra en la Figura 4.6b.

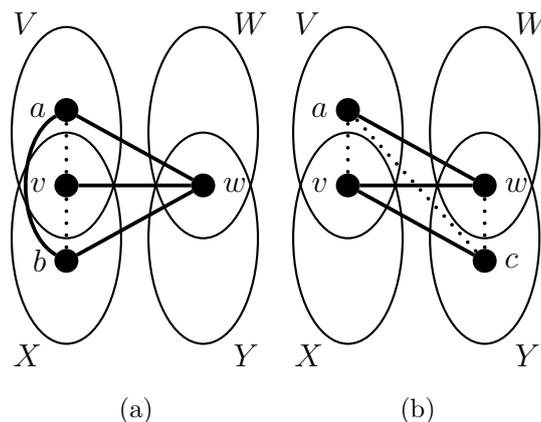


Figura 4.6: Prueba de que la existencia de una arista presente en dos bicliques lleva a la presencia de un W_4 o un paw inducido.

Por lo tanto, si hay una arista en dos bicliques, existe un P_4 o un Paw en G . □

Ahora, como un grafo (P_4, paw) -free es en particular paw -free, podemos aplicar el siguiente resultado de Stephan Olariu.

Teorema 4.6 ([Ola88]). *El grafo G es paw -free si y sólo si cada componente conexa de G no contiene triángulos o es un multipartito completo.*

Como los grafos (P_4, paw) -free son un caso particular de los paw -free, y no tienen ningún P_4 inducido, podemos realizar la siguiente afirmación.

Corolario 4.2. *Sea G (P_4, paw) -free. Entonces, toda componente conexa de G es un multipartito completo o un bipartito.*

Demostración. Dado que G es paw -free, por Teorema 4.6, toda componente conexa de G no contiene triángulos o es un multipartito completo. Como G es P_4 -free, además, no posee ciclos inducidos de longitud mayor a 4. En particular, no posee ciclos inducidos impares de longitud mayor o igual a 5.

Entonces, si G es libre de triángulos, es libre de ciclos impares, y por lo tanto es bipartito. Si en cambio contiene triángulos, todas sus componentes conexas deben ser multipartitos completos. \square

Como vimos, conocemos el valor del número biclique-cromático en ambos casos, por lo que conocemos la respuesta de k -BICLIQUE-COLORING para todo grafo en el que cada arista pertenece a una única biclique.

Por otra parte, el Teorema 4.6 también nos revela que el problema k -BICLIQUE-COLORING para el caso general de grafos paw -free es tan difícil como lo es para grafos sin triángulos, problema que por el momento queda abierto.

Tras estudiar la familia de grafos donde cada arista pertenece a una única biclique, podríamos preguntarnos qué sucede en la familia de grafos donde cada vértice pertenece a cada biclique. Sin embargo, en estos casos es inmediato que los miembros de esta familia son los grafos donde cada componente conexa es un bipartito completo, y por lo tanto no son un caso de estudio relevante.

5 Conclusiones y Problemas Abiertos

En esta tesis definimos el problema k -BICLIQUE-COLORING, inspirados por los resultados conocidos para k -CLIQUE-COLORING. En primer lugar, determinamos una cota inferior para el valor k tal que un grafo es k -biclique-coloreable, dada por el tamaño del mayor bloque del grafo. Esto nos da una herramienta muy útil para decidir si un grafo es k -biclique-coloreable.

Una cuestión que nos preguntamos al descubrir este resultado es si esto nos permite afirmar algo sobre los grafos cuyos bloques son de tamaño 1, es decir, que no contienen vértices mellizos. Nuestra hipótesis era que siempre existe un 2-biclique-coloreo de estos grafos. Descubrimos, sin embargo, que esta afirmación es falsa. En la Figura 5.1 vemos un ejemplo de un grafo sin vértices mellizos que no es 2-biclique-coloreable. Este grafo se puede generalizar. En un ejercicio de [Gol04], Martin Golumbic presenta la familia de grafos n -ógonos estrella (*star n -gon*). Estos se definen a partir de un ciclo de n vértices c_1, \dots, c_n y, para cada arista (c_i, c_{i+1}) , agrega un vértice b_{i+1} adyacente a c_i y a c_{i+1} . Es fácil ver que un n -ógono estrella no posee vértices mellizos. Vamos a ver que, si n es impar mayor o igual a 5, no se puede 2-biclique-colorear.

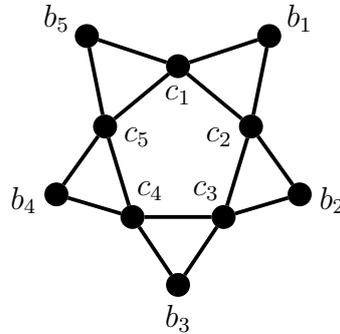


Figura 5.1: Un pentágono estrella.

Teorema 5.1. *Para todo n impar, mayor o igual a 5, el n -ógono estrella no es 2-biclique-coloreable.*

Demostración. Sean $c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_n$, los vértices que conforman un n -ógono estrella, con $n \geq 5$ impar, de manera tal que c_1, \dots, c_n inducen un ciclo y que para $i \in \{1, \dots, n\}$,

b_{i+1} es adyacente a c_i y c_{i+1} , con suma módulo n . Si utilizamos dos colores para colorear los vértices c_1, \dots, c_n , dado que forman un ciclo impar, necesariamente existen dos vértices consecutivos en el ciclo tienen el mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que c_1 y c_2 son de color 1. Ahora, para todo $j \geq 3$, si j es impar, c_j y b_j tienen que ser de color 2, mientras que si j es par, c_j y b_j deben ser de color 1. Esto se puede hacer de manera inductiva: Para $j = 3$ vale, ya que c_1 y c_2 forman una biclique con c_3 , y c_1 y c_2 son de color 1, así que c_3 debe ser de color 2. Análogamente, b_3 debe ser de color 2. Ahora veamos el caso general. Supongamos que vale para $j - 1$ y veamos el caso de j . Si j es impar, $j - 1$ es par. Por hipótesis inductiva, c_{j-1} y b_{j-1} tienen que ser de color 1. Pero entonces, c_j tiene que ser de color 2, ya que forma una biclique con c_{j-1} y b_{j-1} , y b_j también tiene que ser de color 2, ya que también forma biclique con c_{j-1} y b_{j-1} . Análogamente, si j es par, por hipótesis inductiva c_{j-1} y b_{j-1} deben ser de color 2, y eso lleva a que c_j y b_j deban ser de color 1. Esta observación determina que c_n y b_n deben ser de color 2, ya que n es impar. Pero ahora consideremos b_1 , el vértice adyacente a c_n y a c_1 . Si fuera de color 1, entonces b_1 , c_1 y c_2 forman una biclique monocromática, y si fuera de color 2, b_n , c_n y b_1 forman una biclique monocromática. Entonces el n -ógono estrella no es 2-biclique-coloreable. \square

En el Capítulo 2 nos propusimos determinar la complejidad computacional de k -BICLIQUE-COLORING. Descubrimos que, como en el caso de k -CLIQUE-COLORING, k -BICLIQUE-COLORING es un problema que se encuentra en la clase de complejidad Σ_2^p -Completo. Vimos, adicionalmente, que este problema permanece Σ_2^p -Completo incluso si se lo restringe a grafos que no continenen un $K_{3,3}$ inducido ni vértices gemelos. Habiendo obtenido este resultado, nos interesamos en buscar familias de grafos donde el problema k -BICLIQUE-COLORING esté en la clase NP o P.

En el Capítulo 3 adoptamos dos enfoques para buscar familias de grafos donde k -BICLIQUE-COLORING estuviera en la clase de complejidad NP. Por un lado, nos restringimos a familias de grafos con una cantidad polinomial de bicliques. Aunque vimos que en este caso el problema es NP, descubrimos que para los grafos split, que pertenecen a esta clase, k -BICLIQUE-COLORING es NP-Completo. Por otro lado, encontramos la familia de grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem})$ -free, para los cuales encontramos un algoritmo polinomial para la verificación de un k -biclique-coloreo. Sin embargo, también encontramos una reducción de NAE-SAT a 2-BICLIQUE-COLORING en un grafo $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_4, K_{3,3})$ -free. Esto quiere decir que hemos aplicado dos estrategias para reducir la complejidad del problema k -BICLIQUE-COLORING a la clase NP, y para cada una de ellas encontramos una subclase de grafos donde el problema es NP-Completo.

Sin embargo, el trabajo con los grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem})$ -free no está completo. Si bien probamos que 2-BICLIQUE-COLORING es NP-Completo para una subfamilia de esta clase, nos interesa conocer la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para cualquier k . Esto nos puede dar nueva información sobre la naturaleza del problema de buscar un k -biclique-coloreo.

Finalmente, en el Capítulo 4 nos enfocamos en encontrar familias de grafos donde

k -BICLIQUE-COLORING se pueda resolver en tiempo polinomial. Para esto, estudiamos algunos casos especiales de los grafos split, y la subfamilia de los grafos threshold. En ambos casos, las restricciones adicionales nos permiten determinar un k -biclique-coloreo en tiempo lineal. También exploramos la familia de grafos cordales *diamond-free*, donde también encontramos un algoritmo polinomial para encontrar un k -biclique-coloreo. Por último, vimos clases donde podemos conocer directamente el número biclique-cromático, es decir, aquellas donde podemos calcular el mínimo k tal que G es k -biclique-coloreable. Vimos que esto se cumple para grafos donde todo vértice pertenece a una única biclique, ya que probamos que estos grafos son siempre bipartitos. Además vimos que también se cumple para grafos donde toda arista pertenece a una única biclique, pues probamos que esta familia es equivalente a la de grafos (P_4, paw) -free, y que sólo pueden ser bipartitos o multipartitos completos.

El hecho de haber encontrado estas familias no triviales de grafos donde k -BICLIQUE-COLORING se puede resolver en tiempo polinomial nos muestra que, a pesar de que en el caso general este problema es intratable, hay muchos contextos donde es computacionalmente factible resolverlo de forma exacta.

5.1. Complejidad según subgrafos prohibidos

Una característica que tienen los resultados encontrados respecto a la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para distintas familias de grafos, es que todas las clases estudiadas son caracterizables por subgrafos prohibidos acotados. Esto nos permite tener un panorama de la complejidad de resolver k -BICLIQUE-COLORING sobre una familia de grafos si se conoce qué subgrafos inducidos prohibidos tiene.

El Cuadro 5.1 nos muestra un resumen de la información que provee este trabajo sobre la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING según los subgrafos prohibidos de la clase de grafos a la que pertenezca la entrada.

Cuadro 5.1: Complejidad de k -BICLIQUE-COLORING según los subgrafos prohibidos de la entrada

Subgrafos Prohibidos	Complejidad de k -BICLIQUE-COLORING
$K_{3,3}$	Σ_2^P -Completo (Teo. 2.1, 2.3)
$2K_2, C_4, C_5$	NP-Completo (Teo. 3.2)
$W_4, dart, gem, K_4, K_{3,3}$	NP-Completo ($\mathbf{k=2}$) (Teo. 3.5)
$P_4, 2K_2, C_4$	$O(n + m)$ (Teo. 4.1)
$C_n (n \geq 4), diamond$	$O(n + m)$ (Teo. 4.4)

Todavía queda por determinar la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para familias con otros subgrafos prohibidos. Por ejemplo, no conocemos la clase de complejidad para grafos $K_{1,3}$ -free.

Sabemos que k -BICLIQUE-COLORING está en NP para la familia de grafos $K_{1,3}$ -free, ya que al no permitir subgrafos $K_{1,3}$ inducidos, la verificación de un coloreo consiste en tomar todos los conjuntos de vértices que induzcan un $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, o un $K_{2,2}$. Sin embargo, no hallamos un algoritmo polinomial general para esta familia, ni una prueba de que en ella la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING sea NP-Completo.

Por otra parte, en el Cuadro 5.2 vemos las familias de grafos para las que conocemos el número biclique-cromático.

Cuadro 5.2: Familias de grafos y número biclique-cromático

Clase	$\chi_{bc}(G)$
Completo	n (Corolario 1.1)
Bipartito	2 (Corolario 1.2)
Ciclo C_n $n > 3$	2 (Teorema 1.2)
Multipartitos Completos	$\max\{r, 2\}$ (Teorema 4.5) ($r =$ cantidad de vértices universales de G)

Recordemos que vimos que los grafos donde cada arista pertenece a una única biclique son bipartitos o multipartitos completos y los grafos donde cada vértice pertenece a una única biclique son bipartitos.

5.2. Clique-coloreo y biclique-coloreo

Un objetivo importante de esta tesis es el de comparar la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING con la de k -CLIQUE-COLORING en diferentes familias de grafos. Con esta intención en mente, a medida que fuimos obteniendo resultados de complejidad para k -BICLIQUE-COLORING, investigamos, o determinamos, la complejidad de k -CLIQUE-COLORING para las mismas clases de grafos.

El Cuadro 5.3 resume nuestros conocimientos acerca de la complejidad de k -CLIQUE-COLORING en comparación con k -BICLIQUE-COLORING.

Es interesante notar que, al alcance de esta tesis, no conocemos una clase de grafos donde el problema k -CLIQUE-COLORING sea computacionalmente más difícil que k -BICLIQUE-COLORING. Si bien es esperable que existan, por el momento no tenemos un ejemplo de esta situación para presentar.

También llama la atención el hecho de que en muchas de las clases con las que trabajamos, el problema k -CLIQUE-COLORING es resoluble de manera inmediata, porque los grafos de tales clases son 2-clique-coloreables.

Cuadro 5.3: Comparación de complejidades de k -BICLIQUE-COLORING y k -CLIQUE-COLORING

Familia	k -CLIQUE-COLORING	k -BICLIQUE-COLORING
Caso General	Σ_2^p -Completo [Mar04]	Σ_2^p -Completo Teo. 2.1, 2.3
$K_{3,3}$ -free	?? —	Σ_2^p -Completo Teo. 2.1, 2.3
Split	$O(1)$ Obs. 1	NP-Completo Teo. 3.2
K_4 -free	NP-Completo ($k=2$) [Déf09]	NP-Hard ($k=2$) Teo. 3.5
$(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free	?? —	NP-Completo ($k=2$) Teo. 3.5
Threshold	$O(1)$ Obs. 1	$O(n + m)$ Teo. 4.1
Cordal, <i>diamond</i> -free	$O(1)$ Obs. 4	$O(n + m)$ Teo. 4.4
Multipartito Completo	$O(1)$ Obs. 5	$O(1)$ Teo. 4.5

5.3. Problemas abiertos y trabajo futuro

Algunos problemas y áreas donde creemos que se puede profundizar el trabajo y encontrar nuevos resultados son:

- Biclique Coloreo Hereditario:** Como hemos visto, la propiedad de k -biclique-coloreabilidad no es hereditaria. Podemos definir entonces el problema k -BICLIQUE-COLORING HEREDITARIO, que tiene por entrada un grafo G y responde a la pregunta “¿Es cierto que todo subgrafo inducido G' de G es k -biclique coloreable?”. En [Mar04], Dániel Marx muestra que k -CLIQUE-COLORING HEREDITARIO se encuentra en la clase de complejidad Π_3^p . Es razonable sospechar que lo mismo sucede en el caso de biclique-coloreo. Además, k -biclique-coloreo hereditario posee otra característica interesante: Se puede acotar el k mínimo para el que un grafo G es k -biclique-coloreable hereditario por el tamaño de la clique máxima de G . Esto se debe a que si se toma el subgrafo $H \subseteq G$ que es la clique máxima de G , H requiere $\beta(H)$ colores para su biclique coloreo.
- Biclique Coloreo de Grafos sin triángulos:** Hemos mencionado que el hecho de que si bien los conjuntos de vértices mellizos establecen una cota inferior para la cantidad de colores que se requieren para biclique-colorear un grafo, no es cierto que un grafo sin vértices mellizos sea 2-biclique-coloreable. Es interesante plantear una

restricción más fuerte, y observar qué pasa en la clase de grafos sin triángulos. Sería interesante determinar si estos grafos son 2-biclique-coloreables. No conocemos un contraejemplo a esta afirmación.

- **Otras Familias Cordales:** En este trabajo vimos que k -BICLIQUE-COLORING es NP-Completo para grafos split. Nos interesa saber si se puede determinar la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para otras familias de grafos cordales, en particular en Grafos de Intervalos, donde incluso el caso de grafos de Intervalos Propios permanece abierto, aún cuando, al ser $K_{1,3}$ -free, sabemos que admiten validar un coloreo en tiempo polinomial.
- **Establecer la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para grafos K_n -free:** En el capítulo 3 determinamos que 2-biclique-coloreo es NP-Hard para grafos K_4 -free. Sería interesante determinar si existe una relación entre n y el máximo k para el que se puede probar NP-Compleitud de k -biclique-coloreo, en grafos K_n -free.
- **Establecer la complejidad de k -BICLIQUE-COLORING para grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free:** Hemos visto que 2-BICLIQUE-COLORING es NP-Completo para grafos $(W_4, \text{dart}, \text{gem}, K_{i_0, j_0})$ -free. Nos interesaría saber si se puede mostrar que es NP-Completo en el caso general. También nos interesa saber si se puede eliminar la restricción de acotar los $K_{i,j}$ en estos grafos.

Bibliografía

- [AH89] K. APPEL y W. HAKEN – “Every planar map is four colorable”, **98** (1989), p. xvi+741, Con la colaboración de J. Koch.
- [BGG⁺04] G. BACSÓ, S. GRAVIER, A. GYÁRFÁS, M. PREISSMANN y A. SEBŐ – “Coloring the maximal cliques of graphs”, *SIAM J. Discrete Math.* **17** (2004), no. 3, p. 361–376 (electrónico).
- [BM86] H.-J. BANDELT y H. M. MULDER – “Distance-hereditary graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B* **41** (1986), no. 2, p. 182–208.
- [DdFS07] V. M. F. DIAS, C. M. H. DE FIGUEIREDO y J. L. SZWARCFITER – “On the generation of bicliques of a graph”, *Discrete Appl. Math.* **155** (2007), no. 14, p. 1826–1832.
- [Déf06] D. DÉFOSSEZ – “Clique-coloring some classes of odd-hole-free graphs”, *J. Graph Theory* **53** (2006), no. 3, p. 233–249.
- [Déf09] —, “Complexity of clique-coloring odd-hole-free graphs”, *J. Graph Theory* **62** (2009), no. 2, p. 139–156.
- [DKST01] M. DAWANDE, P. KESKINOCAK, J. M. SWAMINATHAN y S. TAYUR – “On bipartite and multipartite clique problems”, *J. Algorithms* **41** (2001), no. 2, p. 388–403.
- [GJ79] M. R. GAREY y D. S. JOHNSON – *Computers and intractability*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979, A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [GM09] M. GROSHAUS y L. P. MONTERO – “The number of convergent graphs under the biclique operator withno twin vertices is finite”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **35** (2009), p. 241–246.
- [Gol04] M. C. GOLUMBIC – *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, segunda ed., Annals of Discrete Mathematics, vol. 57, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004, With a foreword by Claude Berge.
- [GS07] M. GROSHAUS y J. L. SZWARCFITER – “Biclique-Helly graphs”, *Graphs Combin.* **23** (2007), no. 6, p. 633–645.

- [GS08] — , “On hereditary Helly classes of graphs”, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **10** (2008), no. 1, p. 71–78.
- [GS10] — , “Biclique graphs and biclique matrices”, *J. Graph Theory* **63** (2010), no. 1, p. 1–16.
- [GY06] J. L. GROSS y J. YELLEN – *Graph theory and its applications*, segunda ed., Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [Har63] F. HARARY – “A characterization of block-graphs”, *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), p. 1–6.
- [Hoc98] D. S. HOCHBAUM – “Approximating clique and biclique problems”, *J. Algorithms* **29** (1998), no. 1, p. 174–200.
- [KT02] J. KRATOCHVÍL y Z. TUZA – “On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs”, *J. Algorithms* **45** (2002), no. 1, p. 40–54.
- [Mar04] D. MARX – “Complexity of clique coloring and related problems”, 2004, Manuscrito.
- [MS72] A. R. MEYER y L. J. STOCKMEYER – “The equivalence problem for regular expressions with squaring requires exponential space”, in *SWAT '72: Proceedings of the 13th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (swat 1972)* (Washington, DC, USA), IEEE Computer Society, 1972, p. 125–129.
- [MŠ99] B. MOHAR y R. ŠKREKOVSKI – “The Grötzsch theorem for the hypergraph of maximal cliques”, *Electron. J. Combin.* **6** (1999), p. Research Paper 26, 13 pp. (electronic).
- [Ola88] S. OLARIU – “Paw-fee graphs”, *Inf. Process. Lett.* **28** (1988), no. 1, p. 53–54.
- [Pap94] C. H. PAPADIMITRIOU – *Computational complexity*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [Pee03] R. PEETERS – “The maximum edge biclique problem is NP-complete”, *Discrete Appl. Math.* **131** (2003), no. 3, p. 651–654.
- [Pri00] E. PRISNER – “Bicliques in graphs. I. Bounds on their number”, *Combinatorica* **20** (2000), no. 1, p. 109–117.
- [Sch78] T. J. SCHAEFER – “The complexity of satisfiability problems”, in *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978)*, ACM, New York, 1978, p. 216–226.

- [SM73] L. J. STOCKMEYER y A. R. MEYER – “Word problems requiring exponential time: preliminary report”, in *Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Austin, Tex., 1973)*, Assoc. Comput. Mach., New York, 1973, p. 1–9.
- [SS06] F. SOULIGNAC y G. SUEIRO – *Sobre caracterizaciones parciales de grafos coordinados*, Tesis de Licenciatura, 2006.
- [Sto76] L. J. STOCKMEYER – “The polynomial-time hierarchy”, *Theoret. Comput. Sci.* **3** (1976), no. 1, p. 1–22 (1977).

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de k -biclique-coloreabilidad no hereditaria	9
2.1. Semi-preservador- k	13
2.2. Preservador- k	14
2.3. Notación para preservadores- k	15
2.4. Semi-preservador-2	16
2.5. Alternador	17
2.6. Notación para alternadores	17
2.7. Alternador al aplicar el esquema del Lema 2.5	19
2.8. Grafo para reducción QSAT ₂ a k -BICLIQUE-COLORING	21
2.9. Coloreo para el grafo de reducción QSAT ₂ a k -BICLIQUE-COLORING	22
2.10. Grafo de reducción k -BICLIQUE-COLORING a $(k + 1)$ -BICLIQUE-COLORING	26
3.1. Ejemplo de grafo split	30
3.2. Grafo de reducción de NAE-SAT a k -BICLIQUE-COLORING de grafos split	32
3.3. W_4 , <i>dart</i> y <i>gem</i>	35
3.4. Diamante con los vértices v, w, z y x	36
3.5. Grafo de reducción de NAE-SAT a k -BICLIQUE-COLORING en grafos $(W_4, \textit{dart}, \textit{gem}, K_{3,3}, K_4)$ -free	42
4.1. Secuencia de conjuntos de G threshold	50
4.2. Estructura prohibida de grafos threshold	51
4.3. Ejemplo de grafo cordal <i>diamond</i> -free	56
4.4. Grafo <i>paw</i>	61
4.5. Demostración de la ida en el Lema 4.2	62
4.6. Demostración de la ida en el Lema 4.2	63
5.1. Pentagono estrella	65

Índice de cuadros

5.1. Complejidad de k -BICLIQUE-COLORING según los subgrafos prohibidos de la entrada	67
5.2. Familias de grafos y número biclique-cromático	68
5.3. Comparación de complejidades de k -BICLIQUE-COLORING y k -CLIQUE-COLORING	69

Índice de algoritmos

3.1. Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa I	39
3.2. Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa II	40
3.3. Algoritmo de verificación de coloreo, Etapa III	41
4.1. Algoritmo de coloreo para grafos split con $\beta(G) < k$	46
4.2. Algoritmo de coloreo para grafos split, con un solo bloque de tamaño 2	47
4.3. Algoritmo de coloreo para grafos split con un bloque de tamaño k y segundo bloque más grande de tamaño $(k - 2)$	48
4.4. Algoritmo de coloreo para grafos threshold	54
4.5. k -biclique-coloreo para grafos cordales <i>diamond-free</i>	59