

Tesis de Licenciatura

Sobre caracterizaciones parciales de grafos coordinados

Francisco Soullignac
fsoullign@dc.uba.ar

Gabriel Sueiro
gsueiro@dc.uba.ar

Director: Dr. Guillermo Durán

Co-directores: Dra. Flavia Bonomo

Dr. Min Chih Lin

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

31 de marzo de 2006

*A Yeye, Juan y Tati,
Francisco*

*A Héctor, Lidia y Martín,
Gabriel*

Agradecimientos

A Héctor, Lidia y Martín por haberse preocupado siempre por mí, por haberme alentado y apoyado siempre. Por haberme guiado, por haberme ayudado a tomar las decisiones correctas. Por haber aguantado a tantos amigos y compañeros que llevé a casa ;). Por tantos despertadores que no apagué y por haberme esperado tantas noches que volví tarde. Por hacer de casa un hogar donde siempre poder volver, un lugar en donde independientemente de los problemas que tuviera iba a encontrar comprensión. A mi hermano, por tantos recuerdos lindos de tantas cosas que compartimos. Pero por sobre todo, por tanto amor que siempre me dieron.

A Yeye, Juan y Tati por compartir el trayecto de nuestras vidas hasta hoy y seguir compartiéndolas. Porque más allá de todas los obstáculos y circunstancias de la vida, siempre pudimos pasarlos con esperanza para construir un proyecto que cada día se visualiza más claro. Si es cierto que la cabeza piensa donde los pies caminan (que yo creo que sí), significa que pudimos construir una buena base de sustento para los cuatro. A seguir para adelante, que esto todavía no terminó!

A Willy por habernos invitado a participar de un grupo de grafos y ofrecernos este tema tan bonito en el que trabajamos. Gracias por habernos brindado su apoyo, en especial cuando estuvimos mas trabados, y por aguantar la lectura del primer borrador ("borrados 1"). Fue un placer trabajar con él tanto en el plano académico como en el personal.

A Flavia por estar SIEMPRE disponible para cualquier cosa que necesitáramos, por más mínima que fuera. Gracias por prestarnos muchas ideas y por ayudarnos a que las nuestras florezcan, por buscarnos trabajos y referencias que no estaban a nuestra disposición o no conocíamos. Pero por sobre todas las cosas, gracias por ser tan buena amiga y por transitar un momento importante de nuestras vidas con nosotros. Todo lo demás, creemos que ya te lo entregamos por escrito en tu defensa de Tesis.

A Oscar por haber dado su apoyo a este proyecto.

A Juan, Marina, Cristian y Diego por conformar un espacio ameno de trabajo y aguantar nuestras discusiones sobre la tesis.

A Ariel M., Diego B., Fabián G., Federico L., Federico F., Fernando L., Javier T., Juan A., Laura L., Lorena B., Nico B. y Pablo E., por haber hecho tan amena la cursada y porque sin su ayuda, nunca habríamos podido terminar la carrera.

A Alexis T., David K., Celeste G., Damián M., Ernesto D., Federico C., Guido DC., Javier MV., José O., Nico C. y Nico R. con quienes compartimos tantos buenos momentos en la facultad.

A Marina, Javier y Liliana por sus correcciones que hacen que la tesis no sea tan insoportable de leer como lo fue cuando ellos la leyeron.

A Damián L., Diego M., Gustavo O., Hernán A., Mauro P., Ramiro F., porque me acompañaron a lo largo de tantos años. Por haber estado ahí cuando los necesité. Pero por sobre todo, por haber hecho que la existencia en este mundo sea un eterno placer, un eterno juego, una eterna despreocupación.

Resumen

Los grafos perfectos fueron definidos por Claude Berge en los comienzos de la década de 1960. Un grafo G es perfecto cuando para todo subgrafo inducido H de G , el número cromático de H es igual al tamaño del subgrafo completo máximo de H . Desde entonces, muchas variantes de los grafos perfectos fueron definidas y estudiadas, incluyendo las clases de los grafos coordinados y clique-perfectos.

Un coloreo de cliques es una asignación de colores a las cliques de forma tal que a todo par de cliques que intersecan en algún vértice, se les asignan colores distintos. Se define $F(G)$ como la cantidad mínima de colores que son necesarios para colorear las cliques de G . Por otra parte, se define $M(G)$ como la cantidad máxima de cliques de G que contienen a un vértice en común. Un grafo G es coordinado cuando $F(H) = M(H)$ para todo subgrafo inducido H de G . Los grafos coordinados son una subclase de los grafos perfectos.

Un cubrimiento de cliques por vértices de un grafo G es un subconjunto de vértices que inciden en todas las cliques de G . Un conjunto independiente de cliques es una familia de cliques disjuntas dos a dos en vértices. Un grafo G es clique-perfecto cuando el tamaño del cubrimiento de cliques por vértices mínimo es igual al tamaño del conjunto independiente de cliques máximo para todo subgrafo inducido de G .

Una caracterización de los grafos perfectos por subgrafos prohibidos minimales fue demostrada en el 2002 y se diseñó un algoritmo polinomial para reconocer si un grafo es perfecto.

Todavía no se conoce la lista de subgrafos prohibidos minimales para los grafos coordinados. En esta tesis vamos a presentar caracterizaciones por subgrafos prohibidos minimales restringidos a las clases de los grafos de línea, los grafos sin paws, los complementos de bosques y los grafos sin gems, ni W_4 , ni bulls. Todas las caracterizaciones mostradas conducen a algoritmos de reconocimiento polinomiales para la clase correspondiente. Con respecto al problema de reconocimiento para grafos en general, probamos que es NP-hard. Es más, probamos que es NP-completo incluso restringido a los grafos que no contienen gems ni holes de longitud 4 y tales que $M(G)$ es a lo sumo 3, el grado máximo de G es a lo sumo 4, y la clique máxima de G tiene tamaño a lo sumo 3.

Para los grafos clique-perfectos, la lista de los subgrafos prohibidos minimales tampoco se conoce aún, al igual que la complejidad del problema de reconocimiento. En este trabajo caracterizamos los grafos clique-perfectos restringidos a la clase de grafos sin paws y la clase de grafos sin gems, ni W_4 , ni bulls.

Abstract

Perfect graphs were defined by Claude Berge in 1960. A graph G is perfect whenever for every induced subgraph H of G , the chromatic number of H equals the cardinality of a maximum complete subgraph of H . Since then, many variations and subclasses of perfect graphs were defined and studied, including coordinated and clique-perfect graphs.

A clique in a graph is a complete subgraph maximal under inclusion and $F(G)$ is the minimum number of colors that can be assigned to the cliques of G in such a way that no two cliques with non-empty intersection receive the same color. On the other hand, $M(G)$ is the maximum number of cliques with a common vertex. A graph G is coordinated when $F(H) = M(H)$ for every induced subgraph H of G . Coordinated graphs are a subclass of perfect graphs.

A clique-transversal of a graph G is a subset of vertices meeting all the cliques of G . A clique-independent set is a collection of pairwise vertex-disjoint cliques. A graph G is clique-perfect if the sizes of a minimum clique-transversal and a maximum clique-independent set are equal for every induced subgraph of G .

A characterization of perfect graphs by minimal forbidden subgraphs was recently proved, and a polynomial time recognition algorithm for this class of graphs has been developed.

The list of minimal forbidden induced subgraphs for the class of coordinated graphs is not known. In this thesis we characterize coordinated graphs by forbidden induced subgraphs when the graph is either a line graph, or paw-free, or $\{W_4, \text{gem}, \text{bull}\}$ -free, or the complement of a forest. All these characterizations lead to polynomial time recognition algorithms for coordinated graphs in the corresponding class of graphs. On the other hand, we show that the recognition problem for general coordinated graphs is NP-hard, and remains NP-complete even restricted to the class of graphs with neither gems nor holes of length 4, and such that $M(G) \leq 3, \Delta(G) \leq 4, \omega(G) \leq 3$.

The list of minimal forbidden induced subgraphs for the class of clique-perfect graphs is also unknown. Another open question concerning clique-perfect graphs is the complexity of the recognition problem. In this thesis we characterize clique-perfect graphs by forbidden induced subgraphs when the graph is either paw-free or $\{W_4, \text{gem}, \text{bull}\}$ -free.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Definiciones y notación	2
1.2. Preliminares	8
2. Grafos no coordinados	15
2.1. No coordinados particulares	15
2.2. No coordinados con $M = 3$	16
2.3. No coordinados con $M = 4$	25
3. Reconocimiento de grafos coordinados	35
3.1. Preliminares	35
3.2. Complejidad del problema π_F	36
3.3. Transformación a un grafo perfecto	37
3.4. Complejidad del problema π_C	46
4. Caracterizaciones parciales	55
4.1. Grafos de línea	55
4.2. Grafos sin paws	67
4.3. Grafos complemento de bosques	75
4.4. Grafos sin gems, W_4 ni bulls	84
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	93

Capítulo 1

Introducción

Los grafos perfectos fueron definidos por Claude Berge en los comienzos de la década de 1960 [2]. Un grafo G es perfecto cuando para todo subgrafo inducido H de G , el número cromático de H es igual al tamaño del subgrafo completo máximo de H . Varias clases conocidas de grafos son perfectas, como los grafos bipartitos, los grafos cordales y los grafos de comparabilidad. Los grafos perfectos son interesantes desde el punto de vista algorítmico ya que, por ejemplo, los problemas de hallar el tamaño de la clique máxima y el número cromático son NP-completos para grafos en general y para varias subclases, mientras que para los grafos perfectos pueden ser resueltos en tiempo polinomial [24]. Para más información sobre los grafos perfectos, ver [23].

Desde entonces, muchas variantes de los grafos perfectos fueron definidas y estudiadas, incluyendo las clases de los grafos coordinados y clique-perfectos.

Un coloreo de cliques es una asignación de colores a las cliques de forma tal que a todo par de cliques que intersecan en algún vértice, se les asignan colores distintos. Se define $F(G)$ como la cantidad mínima de colores que son necesarios para colorear las cliques de G . Por otra parte, se define $M(G)$ como la cantidad máxima de cliques de G que contienen a un vértice en común. Un grafo G es coordinado cuando $F(H) = M(H)$ para todo subgrafo inducido H de G . Los grafos coordinados fueron definidos y estudiados en [7].

Un cubrimiento de cliques por vértices de un grafo G es un subconjunto de vértices que inciden en todas las cliques de G . Un conjunto independiente de cliques es una familia de cliques disjuntas dos a dos en vértices. Un grafo G es clique-perfecto cuando el tamaño del cubrimiento de cliques por vértices mínimo es igual al tamaño del conjunto independiente de cliques máximo para todo subgrafo inducido de G . El término “clique-perfecto” fue introducido por Guruswami y Pandu Rangan en 2000 [25], pero la igualdad de estos parámetros había sido estudiada previamente por Berge y Las Vergnas en el contexto de los hipergrafos balanceados [4].

Una caracterización de los grafos perfectos por subgrafos prohibidos minimales fue recientemente demostrada en [14] y se diseñó un algoritmo polinomial para reconocer si un grafo es perfecto en [13].

El objetivo de este trabajo es avanzar en una caracterización por subgrafos prohibidos minimales de los grafos coordinados, analizando también la complejidad del problema de reconocimiento. Sin embargo, la lista de subgrafos prohibidos minimales de los grafos coordinados (grafos mínimamente no coordinados) no se conoce. Hasta el momento los únicos grafos mínimamente no

coordinados conocidos eran los ciclos de longitud impar, los complementos de los ciclos de longitud 7, 8 y 9 y el grafo pirámide. En el capítulo 2 mostramos otros grafos mínimamente no coordinados. Además probamos que para todo n existen una cantidad exponencial (en n) de grafos mínimamente no coordinados con $M = 3$, $O(n)$ vértices y $O(n)$ aristas. También mostramos en dicho capítulo varias operaciones para generar grafos mínimamente no coordinados.

En el capítulo 3 trabajamos sobre la complejidad del problema de reconocimiento de grafos coordinados. En particular, probamos que el problema es NP-hard. Es más, probamos que es NP-completo incluso restringido a los grafos que no contienen gems ni holes de longitud 4 y tales que $M(G) \leq 3$, $\Delta(G) \leq 4$, $\omega(G) \leq 3$. Como resultado complementario, en la sección 1.2, probamos que cuando $M(G) \leq 2$ o $\Delta(G) \leq 4$ o $\omega(G) \leq 2$ entonces el problema es polinomial. Además, en la sección 4.4 demostramos que si G no contiene gems, W_4 ni bulls entonces el problema de reconocimiento también es polinomial.

Por último en el capítulo 4 caracterizamos por subgrafos prohibidos minimales a los grafos coordinados restringiéndolos a algunas clases de grafos. Un resultado conocido es la caracterización por subgrafos prohibidos para la clase de los grafos sin claws clique-Helly hereditarios. Las clases que nosotros consideramos son las de los grafos de línea (sección 4.1), los grafos sin paws (sección 4.2), los complementos de bosques (sección 4.3) y los grafos sin gems, ni W_4 , ni bulls (sección 4.4). Todas las caracterizaciones mostradas conducen a algoritmos polinomiales de reconocimiento de grafos coordinados para la clase correspondiente. Para los grafos clique-perfectos, la lista de los subgrafos prohibidos minimales tampoco se conoce todavía, al igual que la complejidad del problema de reconocimiento. Como resultados parciales se conocen caracterizaciones por subgrafos prohibidos restringidos a distintas clases de grafos como ser: los grafos sin diamantes, los grafos arco circulares Helly, los grafos de línea y otras [5, 6]. Muchas de estas caracterizaciones llevan a algoritmos polinomiales para el problema de reconocimiento restringido a estas clases. En dicho capítulo también caracterizamos los grafos clique-perfectos restringidos a la clase de grafos sin paws (sección 4.2) y la clase de grafos sin gems, ni W_4 , ni bulls (sección 4.4).

En el resto de este capítulo damos las definiciones básicas y propiedades que utilizaremos a lo largo de esta tesis.

1.1. Definiciones y notación

En esta tesis trabajamos con grafos finitos no dirigidos y simples. Sea G un grafo, notamos con $V(G)$ al conjunto de sus vértices, con $E(G)$ al conjunto de sus aristas y $\overline{G}$ a su complemento. El grafo *trivial* es el grafo formado por un único vértice.

Sean G_1, G_2 dos grafos. Notamos $G_1 = G_2$ cuando G_1 es isomorfo a G_2 y $G_1 \neq G_2$ cuando G_1 no es isomorfo a G_2 .

Se dice que un grafo G *contiene* a otro H cuando H es isomorfo a un subgrafo inducido de G . Sea F un grafo, se dice que G es *sin* F si G no contiene a F .

Una clase de grafos $\mathcal{G}$ se dice *hereditaria* si para todo grafo $G \in \mathcal{G}$, cualquier subgrafo inducido de G también pertenece a $\mathcal{G}$.

Sean G_1, G_2 dos grafos con $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, el grafo $G = G_1 \cup G_2$ tiene como conjunto de vértices $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y como conjunto de aristas $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Sea G un

grafo y t un número natural, notamos tG a la unión de t copias disjuntas de G .

Sea X un conjunto de vértices de un grafo G . El grafo $G \setminus X$ es el subgrafo inducido por $V(G) \setminus X$. Sea Y un conjunto de aristas de un grafo G . El grafo $G' = G \setminus Y$ es el grafo con vértices $V(G') = V(G)$ y aristas $E(G') = E(G) \setminus Y$.

Para más definiciones y términos de teoría de grafos ver [26].

Notaciones de operaciones referentes al álgebra

Vamos a notar con I_k al conjunto $\{1, \dots, k\}$ para todo k natural y con I_0 al conjunto vacío.

Si a y d son números enteros, vamos a llamar $r(a, d)$ al resto de dividir a por d . Se dice que $a \equiv b \pmod{d}$ si $r(a, d) = r(b, d)$ y $a \not\equiv b \pmod{d}$ si $r(a, d) \neq r(b, d)$.

Vamos a notar con sg a la función signo. Es decir, si $n \neq 0$ es un número entero, entonces $sg(n) = \frac{|n|}{n}$ y $sg(0) = 0$.

Vecindades, completos y dominación

La *vecindad* de un vértice v en un grafo G es el conjunto $N_G(v)$ de todos los vértices adyacentes a v . La *vecindad cerrada* de v es $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. A los vértices de $N_G(v)$ los llamamos *vecinos* de v . Se definen $d_G(v) = |N_G(v)|$, $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} (d_G(v))$ y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} (d_G(v))$. Cuando quede claro por contexto cuál es el grafo G al que nos referimos, escribiremos $N(v)$, $N[v]$ y $d(v)$.

Sean v, w dos vértices de un grafo G . Se dice que v *domina* a w si $N[w] \subseteq N[v]$. Los vértices v y w se dicen *mellizos* cuando v domina a w y w domina a v , y se dice que son *antimellizos* cuando v, w son mellizos en $\overline{G}$. Dicho de otra forma, v y w son mellizos cuando $N[v] = N[w]$ y antimellizos cuando $N(v) = N(w)$.

Un vértice v de un grafo G se dice *universal* cuando $N[v] = V(G)$. Si $N(v) = \emptyset$ entonces se dice que v es un vértice *aislado*.

Un grafo es completo cuando todos sus vértices son adyacentes entre sí. Notamos con K_n al grafo completo de n vértices. Al grafo K_3 lo llamamos también *triángulo*.

Sea X un conjunto de vértices y v un vértice de G con $v \notin X$. Se dice que v es *completo* a X cuando v es adyacente a todos los vértices de X . Se dice que v es *anticompleto* a X cuando v no es adyacente a ningún vértice de X . Sean X, Y dos conjuntos de vértices de G . Se dice que X es (anti)completo a Y cuando todo vértice de X es (anti)completo a Y (notar que la relación es simétrica).

Una *clique* es un subgrafo completo maximal. Usaremos también el término “clique” para referirnos a un conjunto de vértices que induce una clique. Se define $\omega(G)$ como el tamaño de la clique máxima de G .

Un *conjunto independiente* de un grafo G es un subconjunto de vértices de G no adyacentes dos a dos. Se define $\alpha(G)$ como el tamaño del conjunto independiente máximo de G .

Sean v, w dos vértices de G . Notamos con $\mathcal{Q}(G)$ al conjunto de cliques de G , $\mathcal{Q}_G(v)$ al conjunto de cliques que contienen a v y $\mathcal{Q}_G(v, w) = \mathcal{Q}_G(v) \cap \mathcal{Q}_G(w)$. Cuando quede claro por contexto cuál es el grafo G al que nos referimos, escribiremos $\mathcal{Q}(v)$ y $\mathcal{Q}(v, w)$. Llamaremos además $m_G(v)$ a $|\mathcal{Q}_G(v)|$ y omitiremos el subíndice cuando quede claro por contexto. Un vértice v se dice *simplicial* cuando $m(v) = 1$, es decir, v es simplicial cuando $N[v]$ es una clique.

Un *coloreo* es una asignación de colores a los vértices de G tal que a ningún par de vértices adyacentes de G se les asigna el mismo color. Un k -coloreo es un coloreo de G que utiliza a lo sumo k colores. A menos que se que se aclare lo contrario, vamos a suponer que un k -coloreo utiliza únicamente colores del conjunto I_k . El *número cromático* $\chi(G)$ es la mínima cantidad de colores con la que se puede colorear el grafo G . Una cota inferior trivial de $\chi(G)$ es $\omega(G)$.

Un *cubrimiento de vértices por completos* de un grafo G es un subconjunto de completos de G cuya unión contiene a todos los vértices de G . Se define $\theta(G)$ como el tamaño del cubrimiento mínimo de vértices por completos. Una cota inferior trivial de $\theta(G)$ es $\alpha(G)$.

Caminos y holes

Una secuencia $v_1, \dots, v_k$ de vértices distintos es un *camino* de un grafo G si $(v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ son aristas de G . Estas aristas son llamadas las *aristas del camino*. Un *anticamino* es un camino en $\overline{G}$.

Un *ciclo* es un camino $v_1, \dots, v_k$ donde $k \geq 3$ y (v_k, v_1) es una arista de G . Las *aristas de un ciclo* se definen de forma análoga a las aristas de un camino.

La *longitud* del camino (ciclo) es la cantidad de aristas del camino (ciclo). Un camino (ciclo) impar (par) es un camino (ciclo) de longitud impar (par). En todas las expresiones que se refieren a ciclos, los subíndices de los vértices deben entenderse en módulo de la longitud del ciclo.

Un grafo G es *conexo* cuando existe un camino entre todo par de vértices de G y *anticonexo* cuando $\overline{G}$ es conexo. Una *componente (anti)conexa* de un grafo G es un subgrafo (anti)conexo maximal de G . Las componentes anticonexas son llamadas también *anticomponentes*.

Una *cuerda* en un camino (ciclo) es una arista entre dos vértices del camino (ciclo), que no es una arista del camino (ciclo). Una cuerda es *corta* si une dos vértices a distancia dos en el camino (ciclo). Notamos con P_n (C_n) a los caminos (ciclos) sin cuerdas de n vértices.

Un *camino inducido* es un camino sin cuerdas. Un *hole* es un ciclo sin cuerdas de longitud al menos 4. Un *antihole* es el complemento de un hole. Un hole (antihole) es impar (par) cuando su longitud es impar (par).

El *diámetro* de un grafo G es la máxima distancia entre todos los pares de vértices de G .

Grafos de intersección

Sea $\mathcal{S}$ una familia finita de conjuntos. El *grafo de intersección* de $\mathcal{S}$ contiene como conjunto de vértices a $\mathcal{S}$ y dos vértices son adyacentes si y solo si sus respectivos conjuntos se intersecan.

Una familia de conjuntos $\mathcal{S}$ satisface la *propiedad Helly* si para toda subfamilia $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ tal que

los conjuntos de $\mathcal{S}'$ intersecan dos a dos ocurre que $\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S \neq \emptyset$. Vamos a decir que $\mathcal{S}$ es *Helly* cuando $\mathcal{S}$ satisface la propiedad Helly.

Un grafo es *clique-Helly* (CH) cuando la familia de sus cliques cumple la propiedad Helly y es *clique-Helly hereditario* (CHH) cuando todos sus subgrafos inducidos son clique-Helly.

El *grafo de línea* de G , notado $L(G)$, es el grafo de intersección de las aristas de G (entendiendo a una arista como un conjunto de dos vértices). Es decir, $V(L(G)) = E(G)$ y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes cuando sus respectivas aristas inciden en un vértice común.

El *grafo clique* de G , notado $K(G)$, es el grafo de intersección de las cliques de G . Es decir, $V(K(G)) = \mathcal{Q}(G)$ y dos vértices de $K(G)$ son adyacentes cuando sus respectivas cliques tienen al menos un vértice en común.

Perfectos, coordinados y clique-perfectos

Los grafos perfectos fueron definidos por Claude Berge en la década de 1960 [2]. Un grafo G es perfecto si $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo inducido H de G . Equivalentemente G es perfecto si $\theta(H) = \alpha(H)$ para todo subgrafo inducido H de G [19, 33]. Los grafos perfectos recibieron mucha atención en los últimos cuarenta años y existen muchas publicaciones sobre este tema.

Un grafo es *minimalmente imperfecto* cuando no es perfecto pero todos sus subgrafos inducidos propios son perfectos. No es difícil verificar que los holes impares y antiholes impares no son perfectos. En 1961 Berge conjeturó que estos son los únicos grafos minimalmente imperfectos [3], es decir, *un grafo es perfecto sii no contiene holes impares ni antiholes impares*. Esta conjetura fue conocida como la Conjetura Fuerte de los Grafos Perfectos hasta 2002, cuando fue probada por Chudnovsky, Robertson, Seymour y Thomas.

Teorema 1.1.1 (Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos [14]) *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

- (i) G es perfecto.
- (ii) Ningún subgrafo inducido de G es un hole impar ni un antihole impar.

En vista de este teorema, vamos a tomar como definición equivalente de grafo perfecto a los grafos que no contienen holes impares ni antiholes impares.

Otro problema abierto era el determinar si existe un algoritmo polinomial para reconocer grafos perfectos. En 2003 Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour y Vušković [13] diseñaron un algoritmo polinomial que resuelve este problema.

Entre 1961 y 2002, muchos resultados parciales relacionados con la Conjetura Fuerte de los Grafos Perfectos fueron probados. En particular, se caracterizan por subgrafos prohibidos dentro de algunas clases de grafos:

- *Grafos circulares*, probado por Buckingham y Golumbic [10, 11].
- *Grafos planares*, por Tucker [45].

- *Grafos sin P_4* , por Seinsche [40].
- *Grafos sin claw*, por Parthasarathy y Ravindra [37].
- *Grafos sin diamantes*, por Tucker [43] y Conforti [16].
- *Grafos sin K_4* , por Tucker [44, 47, 46].
- *Grafos sin C_4* , por Cornuéjols, Conforti y Vušković [17].
- *Grafos sin bull*, por Chvátal y Sbihi [15].
- *Grafos sin dart*, por Sun [41].
- *Grafos sin chair*, por Sassano [39].
- *Grafos sin paw*, por Olariu [36].

Sea G un grafo. Se define $F(G) = \chi(K(G))$ y $M(G) = \max_{v \in V(G)} (m(v))$. Es fácil ver que $M(G) \leq F(G)$ para todo grafo G . Un grafo G se dice *coordinado* si $F(H) = M(H)$ para todo subgrafo inducido H de G . Decimos que G es *C-good* cuando $M(G) = F(G)$ aunque no necesariamente G sea coordinado.

Un grafo G se dice *mínimamente no coordinado* cuando G no es coordinado y todo subgrafo inducido propio de G es coordinado.

El término “coordinado” fue introducido en [7], donde también estos grafos fueron estudiados.

Sea G un grafo. Un cubrimiento de cliques por vértices de un grafo G es un subconjunto de vértices que inciden en todas las cliques de G . Se define $\alpha_c(G) = \alpha(K(G))$ y $\tau_c(G)$ como el tamaño del cubrimiento mínimo de cliques por vértices. Es fácil ver que $\alpha_c(G) \leq \tau_c(G)$ para todo grafo G . Un grafo G es *clique-perfecto* si $\alpha_c(H) = \tau_c(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

Un grafo G se dice *mínimamente no clique-perfecto* cuando G no es clique-perfecto y todo subgrafo inducido propio de G es clique-perfecto.

Los grafos clique-perfectos fueron estudiados implícitamente en [1, 4, 9, 8, 12, 18, 25, 30], aunque el término “clique-perfecto” fue introducido en [25].

Sea G un grafo. G se dice *K-perfecto* cuando $K(G)$ es perfecto. Los grafos K-perfectos fueron estudiados en [7] y [8]. Se puede probar que cuando G es CH, el parámetro $M(G)$ se corresponde con $\omega(K(G))$ y que $\tau_c(G)$ se corresponde $\theta(K(G))$. En este sentido, los grafos coordinados y clique-perfectos analizan de cierta forma los parámetros de perfección en la preimágen de un grafo por el operador K .

Al día de hoy no se conoce la lista de subgrafos prohibidos que caracteriza los grafos coordinados ni los clique-perfectos; al igual que no se sabe si existe un algoritmo polinomial para reconocerlos.

Sin embargo, se conocen caracterizaciones parciales para los grafos clique-perfectos de los cuales se deducen algoritmos polinomiales para reconocerlos [30, 5, 6]. Algunas caracterizaciones de los grafos coordinados se obtienen como corolarios de algunas caracterizaciones de los grafos clique-perfectos, sabiendo que los grafos coordinados y clique-perfectos son una superclase de los grafos {CH, K-perfectos}-hereditarios [7, 8].

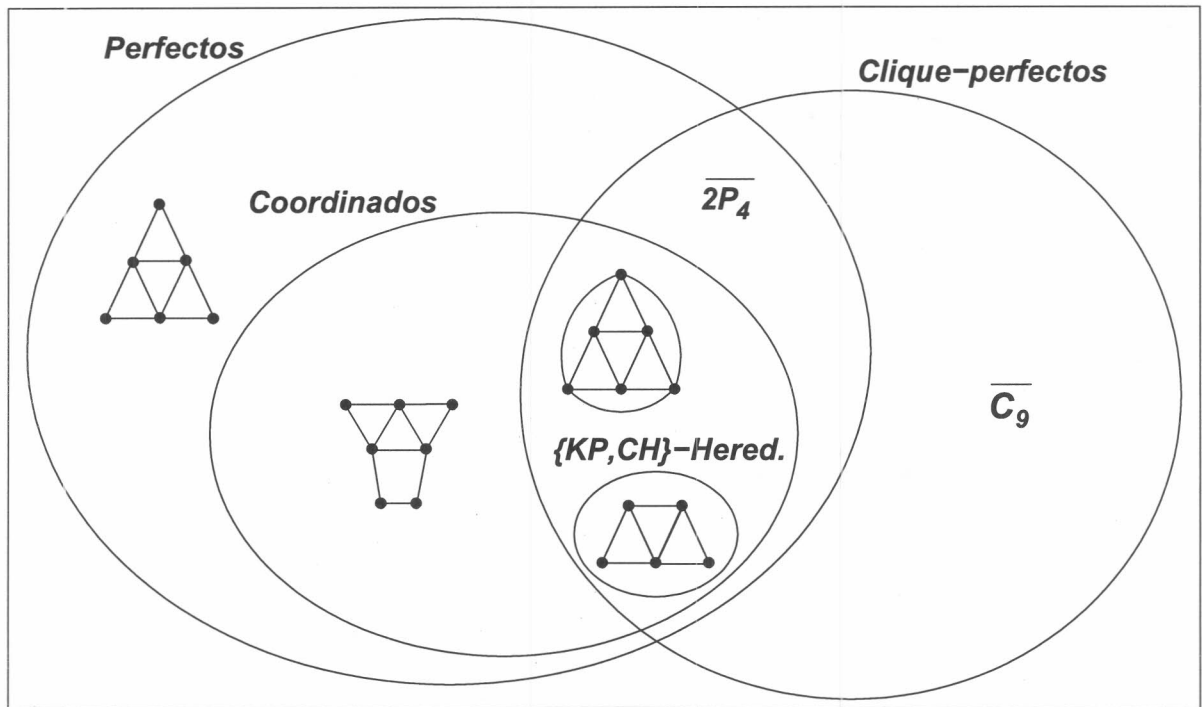


Figura 1.1: Relaciones entre las clases de grafos perfectos, $\{CH, K\}$ -perfectos-hereditarios, coordinados y clique-perfectos.

En la figura 1.1 se muestran las intersecciones entre las clases de grafos perfectos, coordinados, clique-perfectos y $\{CH, K\}$ -perfectos-hereditarios.

Grafos y familias de grafos

Definimos algunos otros grafos y clases de grafos que usaremos a lo largo de esta tesis. En la figura 1.2 se muestran algunos de sus dibujos.

Un *diamante* es un grafo isomorfo a $K_4 \setminus \{e\}$ donde e es una arista de K_4 .

Un *k-wheel* es un ciclo de longitud k al que se le agrega un vértice universal.

Un *k-fan* es un camino de longitud k al que se le agrega un vértice universal. Al grafo 3-fan lo llamamos *gem*.

Un *paw* es un grafo con vértices $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ donde $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un triángulo y w es adyacente únicamente a v_1 .

Un *bull* es un grafo con vértices $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ donde $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un triángulo y w_i es adyacente únicamente a v_i para $i \in \{1, 2\}$.

Un *trinity* es un grafo con vértices $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ donde $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un triángulo y w_i es adyacente únicamente a v_i para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Una *pirámide* es un grafo isomorfo al complemento de un trinity.

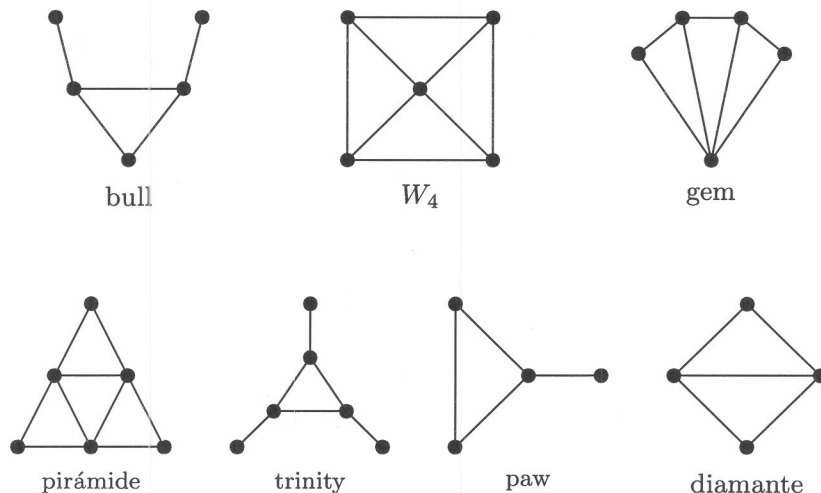


Figura 1.2: algunos grafos usados en esta tesis

Un *árbol* es un grafo acíclico conexo. Equivalentemente, un árbol T es un grafo conexo con $|V(T)| - 1$ aristas; o un grafo acíclico de $|V(T)| - 1$ aristas.

Un *bosque* es un grafo acíclico. Equivalente, un bosque es un grafo donde toda componente conexa es un árbol.

Un grafo G es *bipartito* cuando existe una partición V_1, V_2 de $V(G)$ donde V_1, V_2 son conjuntos independientes. Equivalentemente un grafo es bipartito si y solo si todo ciclo de G es par.

1.2. Preliminares

En esta sección mostramos algunos resultados que utilizamos repetidas veces a lo largo de la tesis. Los resultados que no tienen referencias ni demostración son fáciles de verificar y se incluyen para poder referenciarlos más adelante.

Teorema 1.2.1 [23] *Los grafos completos, bipartitos, línea de bipartitos y sus complementos son perfectos.*

Lema 1.2.2 *Sea G un grafo perfecto. Si G contiene un ciclo impar C , hay 3 vértices de C que inducen un triángulo.*

Demostración

Supongamos que G contiene un ciclo impar $C' = \{v_1, \dots, v_{2k+1}\}$ que contiene al menos una cuerda entre v_i y v_j ($i < j$). Esta cuerda genera los ciclos $v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_{2k+1}$ y $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$ donde alguno de los dos es impar. Llamamos $s(C')$ al ciclo impar. Claramente $V(s(C')) \subset V(C')$ y $|V(s(C'))| < |V(C')|$.

Como $|V(s(C'))| < |V(C')|$, entonces existe una secuencia de ciclos $C_1, \dots, C_l$ con $l \geq 1$ donde $C_1 = C$, $C_{i+1} = s(C_i)$ para todo $1 \leq i < l$, y C_l no posee cuerdas. Como G es perfecto y C_l no posee cuerdas, entonces C_l es un triángulo. Además, como $V(C_{i+1}) \subset V(C_i)$ entonces $V(C_l) \subset V(C_1) = V(C)$.

Por lo tanto $V(C_l)$ son los tres vértices de C que inducen un triángulo. ■

Teorema 1.2.3 [13] *El problema de determinar si un grafo es perfecto puede ser resuelto en tiempo polinomial.*

Teorema 1.2.4 [7] *Si G es coordinado entonces G no contiene holes impares ni antiholes de longitud distinta a 4 ó 6.*

El siguiente es un corolario directo del Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos y del Teorema 1.2.4.

Teorema 1.2.5 *Si G es coordinado entonces G es perfecto.*

Teorema 1.2.6 *Sea G un grafo que no contiene triángulos ni vértices aislados. Entonces $K(G) = L(G)$.*

Lema 1.2.7 *Sean G un grafo no trivial y $v \in V(G)$ con $d(v) = |V(G)| - 2$. Entonces $K(G)$ es el complemento de un bipartito con una bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ donde $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son Helly (interpretando a $\mathcal{V}_1$ y a $\mathcal{V}_2$ como una familia de conjuntos de vértices).*

Demostración

Sea $\mathcal{V}_1$ la familia de las cliques que contienen a v y $\mathcal{V}_2$ la familia de cliques que no contienen a v . Sea w el único vértice no adyacente a v . Como las cliques son maximales, todas las cliques que no contienen a v contienen a w . Por lo tanto $K(G)$ es el complemento de un bipartito con bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son Helly. ■

Lema 1.2.8 *Sea G un grafo y v, w dos mellizos de G . Entonces $K(G) = K(G \setminus \{v\})$.*

Lema 1.2.9 *Sea G un grafo y v, w dos mellizos de G . Entonces $M(G) = M(G \setminus \{v\})$ y $F(G) = F(G \setminus \{v\})$.*

Sea $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para eliminar mellizos se puede utilizar el algoritmo dado por la siguiente función recursiva que particiona los vértices de G en clases de equivalencia con respecto a la relación de ser mellizos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0 &= \{V\} \\ \mathcal{V}^{i+1} &= \{V \cap N[v_{i+1}]\}_{V \in \mathcal{V}^i} \cup \{V \setminus N[v_{i+1}]\}_{V \in \mathcal{V}^i} \end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{V}^{i+1}$ se obtiene dividiendo los conjuntos de $\mathcal{V}^i$ en vecinos de v_{i+1} y los no-vecinos de v_{i+1} . Como invariante, si dos vértices u, w comparten el mismo conjunto de $\mathcal{V}^i$ entonces $N[u] \cap \{v_1, \dots, v_i\} = N[w] \cap \{v_1, \dots, v_i\}$. A continuación mostramos una implementación eficiente de este algoritmo que tiene un ciclo exterior que itera por los vértices de G de forma tal que en el paso i se genera la partición $\mathcal{V}^i$. Para hacerlo de forma eficiente, en cada una de estas iteraciones “asociamos” a $V \in \mathcal{V}^i$ un conjunto Z de forma tal que al terminar la iteración $V := V \setminus N[v_{i+1}]$ y $Z := V \cap N[v_{i+1}]$.

ELIMINAR_MELLIZOS

Entrada: Un grafo $G = (V(G), E(G))$

Salida: Una partición de $V(G)$ en clases de equivalencia con respecto la relación $R(v, w)$ donde $R(v, w)$ sii v, w son mellizos.

1. Sea $\mathcal{V} = \{V(G)\}$.
2. Para cada $v \in V(G)$ hacer:
 3. Para cada $w \in N[v]$ hacer:
 4. Determinar el conjunto Z de $\mathcal{V}$ que contiene a w
 5. Eliminar w de Z
 6. Si Z no tiene un conjunto asociado, asociarle a Z un conjunto vacío y agregarlo a $\mathcal{V}$.
 7. Agregar w al conjunto asociado a Z
 8. si $Z = \emptyset$ eliminar Z de $\mathcal{V}$
 9. Eliminar las asociaciones de los conjuntos de $\mathcal{V}$
10. $\mathcal{V}$ es una partición en clases de equivalencia definida por la relación de ser mellizos.

Teorema 1.2.10 *El algoritmo ELIMINAR_MELLIZOS es correcto.*

Demostración

Sea $v_1, \dots, v_n$ el orden en el que se consideran los vértices de $V(G)$ en el ciclo exterior del algoritmo (paso 2). Vamos a probar por inducción en la cantidad de iteraciones del ciclo exterior que $x, y \in V(G)$ pertenecen al mismo conjunto de $\mathcal{V}$ en la i -ésima iteración del ciclo exterior si y solo si $N[x] \cap \{v_1, \dots, v_i\} = N[y] \cap \{v_1, \dots, v_i\}$ para todo $0 \leq i \leq n$. Luego, al finalizar la n -ésima iteración, x, y pertenecen al mismo conjunto si y solo si $N[x] \cap V(G) = N[x] = N[y] = N[y] \cap V(G)$.

El caso base es trivial, veamos el caso inductivo. Sea $x \in V(G)$, donde $x \in X_i$ al finalizar la i -ésima iteración (con $0 \leq i < n$). Llamemos X_{i+1}, X_{i+1}^a al conjunto X_i y su conjunto asociado al finalizar la $(i+1)$ -ésima iteración respectivamente. Notar que consideramos que X_{i+1} es vacío en el caso que el algoritmo lo elimine en el paso 8. De la misma forma consideramos que X_{i+1}^a es vacío en el caso que no fuera creado.

Claramente, luego de ejecutar el ciclo interno, $x \in X_{i+1}$ sii $x \notin N[v_{i+1}]$ y $x \in X_{i+1}^a$ sii $x \in N[v_{i+1}]$.

Sea $y \in V(G)$ donde $y \in Y_i$ al finalizar la i -ésima iteración y llamemos Y_{i+1}, Y_{i+1}^a al conjunto Y_i y su conjunto asociado en la $(i+1)$ -ésima iteración respectivamente. Por el mismo razonamiento

que para $x, y \in Y_{i+1}$ sii $y \notin N[v_{i+1}]$ y $y \in Y_{i+1}^a$ sii $y \in N[v_{i+1}]$.

En el caso que X_{i+1}^a e Y_{i+1}^a no sean vacíos, por como se crean en el paso 6, $X_{i+1}^a = Y_{i+1}^a$ sii $X_i = Y_i$. Por hipótesis inductiva, $X_i = Y_i$ sii $N[x] \cap \{v_1, \dots, v_i\} = N[y] \cap \{v_1, \dots, v_i\}$.

Luego, x, y pertenecen al mismo conjunto de $\mathcal{V}$ al finalizar la $(i+1)$ -ésima iteración del ciclo exterior si y solo si $N[x] \cap \{v_1, \dots, v_i\} = N[y] \cap \{v_1, \dots, v_i\}$ y $x \in N[v_{i+1}] \Leftrightarrow y \in N[v_{i+1}]$. Esto ocurre si y solo si $N[x] \cap \{v_1, \dots, v_{i+1}\} = N[y] \cap \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. ■

Teorema 1.2.11 *El algoritmo ELIMINAR_MELLIZOS se puede implementar con complejidad $O(|V(G)| + |E(G)|)$.*

Demostración

Consideremos que la entrada de G viene dada por la lista de adyacencias de cada vértice. El conjunto $\mathcal{V}$ se implementa como una lista doblemente encadenada de listas doblemente encadenadas. La inicialización de la misma (paso 1) tiene un costo temporal $O(|V(G)|)$ haciendo una copia. Vamos a suponer que estas listas mantienen su longitud en forma precalculada. Por cada lista $Z \in \mathcal{V}$ se mantiene también un valor de verdad c_Z que indica si se ha asociado una lista en una iteración del ciclo exterior y el puntero a dicha lista a_Z . Este valor de verdad debe ser falso en el inicio de cada iteración.

Por otra parte se mantiene una tabla T de acceso en tiempo constante de longitud $|V(G)|$. T contiene por cada vértice v un puntero l_v a la lista de $\mathcal{V}$ que lo contiene, al igual que un puntero p_v a la posición de v dentro de dicha lista. La inicialización de esta tabla también tiene costo temporal $O(|V(G)|)$.

Veamos que una iteración del ciclo exterior se puede realizar en tiempo $O(d(v))$. El paso 4 se realiza en tiempo constante utilizando el puntero l_w . El paso 5 se realiza en tiempo constante utilizando el puntero p_w porque Z es una lista doblemente encadenada. El paso 6 se realiza en tiempo constante porque determinar si Z tiene una lista asociada se hace revisando el valor de verdad c_Z . Si se debe asociar una nueva lista W a Z , W se crea en tiempo constante y se inicializa c_W a falso y se cambia c_Z a verdadero y se hace apuntar a_Z a W . Agregar W a $\mathcal{V}$ se realiza en tiempo constante porque $\mathcal{V}$ es una lista doblemente encadenada. El paso 7 también se realiza en tiempo constante ya que determinar el conjunto W asociado a Z es constante usando el puntero a_Z , agregar w a W es constante por ser W doblemente encadenada y actualizar los punteros p_v y l_v es constante. El paso 8 es constante, porque la longitud de Z se encuentra precalculada y eliminar Z de $\mathcal{V}$ es constante por ser $\mathcal{V}$ doblemente encadenada.

En cada paso de la iteración es necesario guardar en qué lista se encontraba cada vértice w (esto es constante en cada iteración del ciclo interior guardándolo en una lista). Luego para implementar el paso 9 se recorre esta lista y para cada conjunto Z se asigna falso a a_Z indicando que no se asoció ningún conjunto. Esto asegura la integridad para la iteración posterior.

Por lo tanto, con esta implementación la complejidad es $|V(G)| + \sum_{v \in V(G)} (d(v) * c)$ donde c es una constante. En consecuencia la complejidad total del algoritmo es $O(|V(G)| + |E(G)|)$. ■

Teorema 1.2.12 [38] *Sea G un grafo. Entonces, G es CHH sii no contiene ningún grafo de la figura 1.3.*

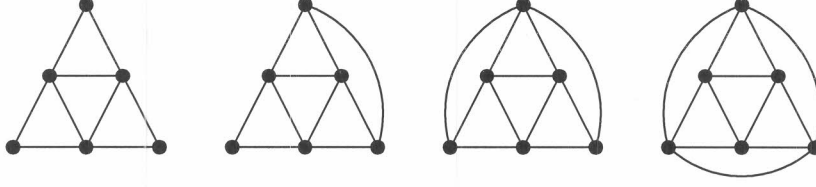


Figura 1.3: Grafos prohibidos minimales para la clase de grafos CHH

Teorema 1.2.13 [28, 29] *Si G es bipartito, entonces G es clique-perfecto y coordinado.*

Lema 1.2.14 *Sea $\mathcal{G}$ es una clase de grafos hereditaria. Son equivalentes*

- *Todo grafo de $\mathcal{G}$ es coordinado.*
- *Todo grafo de $\mathcal{G}$ es C -good.*

Lema 1.2.15 *Sea $\mathcal{G}$ es una clase de grafos hereditaria. Son equivalentes*

- *Todo grafo $G \in \mathcal{G}$ es clique-perfecto.*
- *Para todo grafo $G \in \mathcal{G}$ ocurre que $\alpha_c(G) = \tau_c(G)$.*

Teorema 1.2.16 [7, 8] *Si G es CH entonces*

1. $\omega(K(G)) = M(G)$ y
2. $\theta(K(G)) = \tau_c(G)$.

El siguiente es un corolario que relaciona la clase de los grafos K -perfectos CHH con la clase de grafos clique-perfectos y coordinados.

Lema 1.2.17 *Sea $\mathcal{G}$ una clase de grafos hereditaria donde todo grafo de $\mathcal{G}$ es K -perfecto y CH. Entonces todo grafo de $\mathcal{G}$ es coordinado y clique-perfecto.*

Lema 1.2.18 *Un grafo es coordinado sii todas las componentes conexas del grafo son coordinadas.*

Lema 1.2.19 *Un grafo es clique-perfecto sii todas las componentes conexas del grafo son clique-perfectas.*

Lema 1.2.20 *Sea G un grafo C -good. Entonces todo subgrafo inducido H de G con $M(H) = M(G)$ es C -good.*

Caracterización de grafos coordinados con $M = 2$ ó $\omega = 2$ ó $\Delta = 3$

Para finalizar esta sección probamos una caracterización parcial de los grafos coordinados que es muy sencilla y se utiliza a lo largo de esta tesis.

Definición: Un *hole de cliques* de G es una secuencia de cliques $Q_1, \dots, Q_k$ de G que inducen un hole en $K(G)$ donde Q_i interseca a Q_{i+1} para $1 \leq i \leq k$.

Definición: Un *ciclo de intersección* de un hole de cliques $\mathcal{Q} = Q_1, \dots, Q_k$ de G es un ciclo $C = v_1, \dots, v_k$ donde $v_i \in Q_{i-1} \cap Q_i$.

Cuando no interese a qué hole de cliques se corresponde el ciclo de intersección, vamos a decir simplemente que $v_1, \dots, v_k$ es un ciclo de intersección sin indicar de qué hole de cliques proviene.

Sea G un grafo y $C = v_1, \dots, v_k$ un ciclo de intersección de un hole de cliques $\mathcal{Q} = Q_1, \dots, Q_k$. Como notación vamos a llamar $Q_C(v_i, v_{i+1})$ a la clique Q_i , es decir, la única clique de $\mathcal{Q}$ que contiene la arista (v_i, v_{i+1}) .

La caracterización utiliza los siguientes resultados simples cuya demostración se incluye en la sección 4.4. Esto no es un inconveniente porque las demostraciones de estos resultados dependen exclusivamente de la definición de los grafos sin gems ni W_4 y no utilizan ningún otro resultado de la tesis.

Teorema 1.2.21 (4.4.2) *Sea G un grafo sin gems ni W_4 , entonces $K(G)$ no contiene antiholes impares de longitud mayor a 5.*

Lema 1.2.22 (4.4.3.1) *Sea G un grafo sin gems ni W_4 y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Entonces C no posee cuerdas cortas.*

Teorema 1.2.23 *Sea G un grafo con $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$. Entonces son equivalentes:*

- (i) G es perfecto
- (ii) G no tiene holes impares
- (iii) G es coordinado.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Los holes impares no son perfectos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) G no contiene holes impares, veamos que G es CHH y K-perfecto. Como $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$ entonces G no contiene gems ni W_4 . Por Teorema 1.2.12 todos los grafos que no son CHH contienen un gem o un W_4 , entonces G es CHH. Además, por Teorema 1.2.21, $K(G)$ no contiene antiholes impares. Por lo tanto, basta ver que $K(G)$ no contiene holes impares para ver que $K(G)$ es perfecto.

Supongamos que $K(G)$ contiene un hole impar y sea $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección de dicho hole. Como G es perfecto, entonces por Lema 1.2.2 existen tres vértices v_i, v_j, v_l con

$i < j < l$ que inducen un triángulo. Como G no contiene gems ni W_4 entonces por Lema 1.2.22 C no contiene cuerdas cortas. Por lo tanto los tres vértices no son consecutivos en C , y podemos suponer entonces (v_i, v_l) y (v_j, v_l) no son aristas de C . Pero entonces $d(v_l) \geq 4$, $\omega(G) \geq 3$ y $M(G) \geq m(v_l) \geq 3$. Absurdo y por lo tanto G es K-perfecto.

Como la clase de grafos con $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$ es hereditaria, por Lema 1.2.17 G es coordinado.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Los grafos coordinados son perfectos. ■

El siguiente teorema es un corolario directo de los teoremas 1.2.23 y 1.2.3

Teorema 1.2.24 *El problema de determinar si un grafo es coordinado es polinomial restringido a la clase de grafos $\mathcal{G}$ donde para todo grafo $G \in \mathcal{G}$ ocurre que $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$.*

Este teorema también es un corolario directo del Teorema 1.2.23 y del Lema 1.2.20

Teorema 1.2.25 *Sea G un grafo con $M(G) \leq 3$. Entonces G es coordinado sii G es C-good y perfecto.*

Capítulo 2

Grafos no coordinados

En este capítulo mostraremos grafos mínimamente no coordinados, algunos de los cuales forman parte de las caracterizaciones por subgrafos prohibidos del capítulo 4.

En la sección 2.1 describimos algunos grafos mínimamente no coordinados para los cuales es fácil determinar los valores de F y M .

En la sección 2.2 construimos una secuencia de familias de grafos mínimamente no coordinados con $M = 3$. La i -ésima familia de esta secuencia tiene como característica importante que contiene 2^i grafos, los cuales contienen $O(i)$ vértices y aristas. Además de esta secuencia de familias, mostramos operaciones que permiten generar grafos mínimamente no coordinados.

En la sección 2.3 mostramos dos familias de grafos mínimamente no coordinados con $M = 4$. La primera familia es una subclase de los grafos complemento de bipartitos y la segunda es una subclase de los grafos arco circulares Helly.

2.1. No coordinados particulares

En esta sección mostramos algunos grafos y familias de grafos particulares que no son coordinados y que serán parte de las caracterizaciones por subgrafos prohibidos del capítulo 4.

Como ya señalamos en la sección 1.2 (Teorema 1.2.4), los holes impares no son coordinados y los antiholes de longitud distinta a 4 ó 6 tampoco lo son. Es fácil ver que los holes impares son mínimamente no coordinados. Sin embargo, para los antiholes de longitud n , sucede que para $n = 5, 7, 8, 9$ son minimales, pero para $n \geq 10$ no lo son. Estos últimos contienen como subgrafo inducido al grafo $\overline{2P_4}$ cuyo complemento se muestra en la figura 2.1. Es fácil ver que este grafo tiene $M = 6$ y $F = 7$ y por lo tanto no es coordinado. Si llamamos $v_1, \dots, v_n$ a los vértices de un antihole de longitud mayor o igual a 10, el grafo de la figura es el complemento del subgrafo inducido por $v_1, \dots, v_4, v_6, \dots, v_9$.

Otro grafo mínimamente no coordinado es la pirámide. Es fácil ver que para la pirámide $M = 3$ y $F = 4$ y que todo subgrafo inducido propio es coordinado. Además la pirámide es el grafo de línea del trinity, y por lo tanto la pirámide será parte de la caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos de línea coordinados que damos en la sección 4.1.

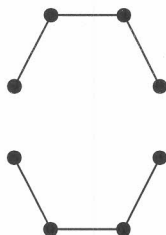


Figura 2.1: Grafo $2P_4$. En la sección 4.3 mostramos que su complemento es mínimamente no coordinado. Todos los antiholes de longitud mayor o igual a 10 contienen su complemento.

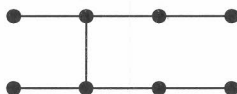


Figura 2.2: Grafo R

Sea R el grafo definido en la figura 2.2. Al igual que con el grafo $\overline{2P_4}$, es fácil ver que el grafo $\overline{R}$ tienen $M = 6$ y $F = 7$. Por lo tanto, como $\overline{2P_4}$ y $\overline{R}$ son complementos de bosques, serán parte de la caracterización por subgrafos prohibidos que damos en la sección 4.3. En esa misma sección también demostraremos que son mínimamente no coordinados.

En la figura 2.3 mostramos otros dos grafos: uno de ellos el complemento de un grafo mínimamente no coordinado, y el otro es un grafo mínimamente no coordinado. Estos grafos no forman parte de ninguna caracterización de esta tesis.

2.2. No coordinados con $M = 3$

En esta sección mostramos grafos mínimamente no coordinados con $M = 3$. En particular mostramos operaciones para construir en forma recursiva estos grafos. A partir de una de estas operaciones construimos una familia de grafos $\mathcal{G}_n$ que es exponencial en el siguiente sentido: fijada cierta cantidad de vértices y aristas, hay una cantidad exponencial de grafos con esa cantidad de vértices y aristas.

Para construir esta familia, vamos a combinar cierto tipo de grafos que tienen propiedades particulares con respecto al coloreo del grafo clique. Estos son los grafos que mantienen color y

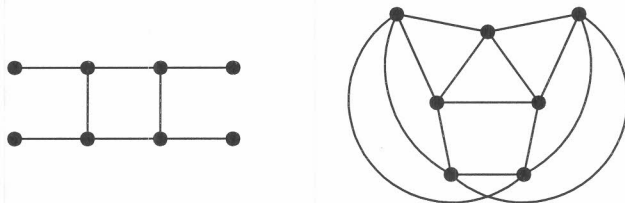


Figura 2.3: A la izquierda el grafo sunlet_4 cuyo complemento es mínimamente no coordinado. A la derecha un grafo mínimamente no coordinado que es arco-circular Helly.

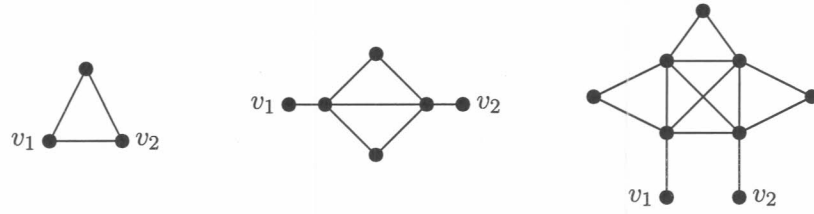


Figura 2.4: Ejemplo de grafos que mantienen color entre $\{v_1, v_2\}$.

los grafos que cambian color, que definimos más abajo. Para combinar estos grafos definimos el operador $\oplus$, que es una extensión del operador $\cup$ (unión de grafos).

Luego mostramos otras operaciones para generar grafos mínimamente no coordinados que permiten construir otros tipos de familias como $\mathcal{G}_n$.

Definiciones y resultados preliminares

Definimos ahora los grafos que mantienen color y los grafos que cambian color. Luego de cada definición explicamos el por qué de la definición y damos ejemplos.

Definición: Un grafo G *mantiene color* entre un conjunto $V' \subseteq V(G)$ si satisface las siguientes condiciones:

1. G es perfecto
2. $F(G) = M(G) \leq 3$
3. para todo vértice $v \in V'$, $m(v) = 1$
4. todo camino inducido entre v y w es impar para todo $v, w \in V'$ con $v \neq w$
5. en cualquier 3-coloreo de $K(G)$ las cliques de G que contienen algún vértice de V' tienen el mismo color

Llamamos *conectores* a los vértices de V' . Cuando no nos interese cuáles son los conectores del grafo G , simplemente diremos que G es un *mantenedor*.

La idea de las propiedades 1 y 2 es que el grafo sea coordinado. Las propiedades 3 y 5 permiten que el grafo puede ser unido a otros grafos a través de los conectores, de forma tal que el color que le “llega” al mantenedor por la clique del conector “salga” por las cliques de los otros conectores (de aquí el nombre de mantenedor). La propiedad 4 es para evitar que se formen holes impares cuando se una el mantenedor con otros grafos. En la figura 2.4 se muestran algunos ejemplos de mantenedores.

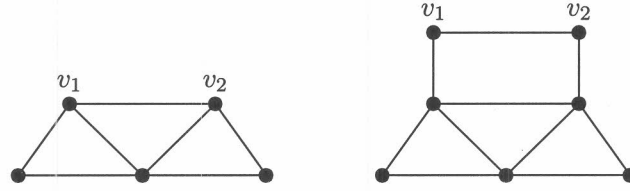


Figura 2.5: Ejemplo de grafos que cambian color.

Definición: Un grafo G *cambia color* entre $v, w \in V(G)$ ($v \neq w$) si satisface las siguientes condiciones:

1. G es perfecto
2. $F(G) = M(G) = 3$
3. $m(v) = m(w) = 2$
4. todo camino inducido entre v, w es impar
5. en cualquier 3-coloreo de $K(G)$ las cliques de $\mathcal{Q}(v) \cup \mathcal{Q}(w)$ utilizan los 3 colores

Llamamos *conectores* a los vértices v y w . Cuando no nos interese cuáles son los conectores del grafo G , simplemente diremos que G es un *cambiador*.

La idea de las propiedades 1, 2 y 4 es la misma que para el mantenedor. La idea es que el cambiador se conecte con otro grafo de forma tal v y w estén cada uno en una única clique del otro grafo. De esta forma, las propiedades 3 y 5 permiten que la clique del otro grafo que se conecta por v tenga un color distinto que la clique que se conecta por w . En la figura 2.5 se muestran algunos ejemplos de cambiadores.

Definición: Decimos que un grafo G *mantiene color minimalmente* entre V' , si G es K_3 o si ningún subgrafo inducido propio H , donde $V' \subseteq V(H)$, cumple la propiedad 5. Similarmente, decimos que un grafo G *cambia color minimalmente* entre v_1 y v_2 si para todo subgrafo inducido propio H que contiene a v_1 y a v_2 , no cumple la propiedad 5.

Observación: Si G *mantiene color minimalmente* entre $\{v, w\}$ y v y w están en la misma clique, entonces $G = K_2$ o $G = K_3$.

Definición: Sean G_1 y G_2 dos grafos (con $V(G_1) \cap V(G_2)$ no necesariamente vacío). Definimos $G = G_1 \uplus G_2$ como el grafo tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Notar que si $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, entonces, $G_1 \uplus G_2 = G_1 \cup G_2$.

Lema 2.2.1 Sean G_1, G_2 dos grafos sin holes impares con $G_1 \cap G_2 = \{v, w\}$ y donde todo camino inducido entre v y w en G_1 y en G_2 es impar. Entonces $G = G_1 \uplus G_2$ no tiene holes impares.

Demostración

Supongamos que no. Sea entonces C un hole impar de G . Como ni G_1 ni G_2 tienen holes impares, entonces existe $a \in V(C) \cap V(G_1)$ y $b \in V(C) \cap V(G_2)$. Por lo tanto, existen dos caminos

inducidos entre a y b con interior disjunto. Por la definición de $\uplus$, $G_1 \setminus \{v, w\}$ es anticompleto a $G_2 \setminus \{v, w\}$ y por lo tanto uno de estos caminos contiene a v y el otro a w , es decir, $v, w \in C$. Entonces, existen dos caminos C_1, C_2 entre v y w tales que $C = C_1 \cup C_2$ y que $a \in C_1$ y $b \in C_2$. Pero entonces, $C_1 \subseteq G_1$ y $C_2 \subseteq G_2$. Por hipótesis C_1 y C_2 son impares y por lo tanto C es par. Absurdo. ■

Definición: Decimos que G_1 y G_2 son *compatibles* si $\mathcal{Q}(G_1) \cap \mathcal{Q}(G_2) = \emptyset$ y $\mathcal{Q}(G_1 \uplus G_2) = \mathcal{Q}(G_1) \cup \mathcal{Q}(G_2)$.

Teorema 2.2.2 Sea GC un grafo que cambia color minimalmente entre v, w y GM un grafo que mantiene color minimalmente entre v, w donde:

- GC y GM son compatibles
- $V(GC) \cap V(GM) = \{v, w\}$
- Si $(v, w) \notin E(GC)$ entonces $GM \neq K_3$

Entonces $G = GC \uplus GM$ es un grafo mínimamente no coordinado.

Demostración

Por ser GM y GC compatibles, Q es clique de G sii Q es clique de GM o de GC .

Como $m_{GC}(v) = m_{GC}(w) = 2$ y $m_{GM}(v) = m_{GM}(w) = 1$ y las cliques de G son cliques de GC o de GM , entonces $m_G(v) = m_G(w) = 3$. Por el mismo argumento, $m_G(u) = m_{GC}(u)$ para todo $u \in V(GC) \setminus \{v, w\}$ y $m_G(u) = m_{GM}(u)$ para todo $u \in V(GM) \setminus \{v, w\}$. Por lo tanto $M(G) = 3$.

Supongamos que G es coordinado. Entonces existe un 3-coloreo c de $K(G)$. Como las cliques de G se particionan en cliques de GM y GC , entonces el coloreo c_{GC} que se obtiene restringiendo el dominio de c a las cliques correspondientes a GC es un 3-coloreo de $K(GC)$. Análogamente, se define c_{GM} que es un 3-coloreo de $K(GM)$. Como GC cambia color entre v, w , por definición, existen cliques Q_1, Q_2, Q_3 de GC , donde podemos suponer que $v \in Q_1, Q_2$ y $w \in Q_3$ y $c_{GC}(Q_i) = i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Como GM mantiene color entre v, w , por definición, existen dos cliques (no necesariamente distintas) R_1, R_2 tales que $v \in R_1, w \in R_2$ donde $c_{GM}(R_1) = c_{GM}(R_2)$.

Por lo tanto $c(Q_i) = i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $1 \leq c(R_1) = c(R_2) \leq 3$. Como $v \in R_1 \cap Q_1 \cap Q_2$ y $w \in R_2 \cap Q_3$ entonces c no es un coloreo válido. Absurdo.

Sea H un subgrafo inducido propio de G . Vamos a ver que H es C-good.

Supongamos primero que $M(H) \leq 2$. Como GM mantiene color, GC cambia color y $V(GM) \cap V(GC) = \{v, w\}$ entonces, por Lema 2.2.1, G no contiene holes de longitud impar, y por lo tanto H tampoco. Entonces, por Teorema 1.2.23 H es coordinado.

Si $M(H) = 3$ entonces $M(H) = M(G)$. Sea $u \in V(G) \setminus V(H)$, por Lema 1.2.20 basta probar que $G \setminus \{u\}$ es C-good para ver que H también lo es.

Caso 1: $u = v$ ($u = w$ es análogo). Si $GM = K_2$ entonces $G \setminus \{v\} = GC \setminus \{v\}$ y por lo tanto $F(G \setminus \{v\}) \leq 3$ y G es C-good. Sino, consideremos c_{GC} un coloreo válido de $K(GC \setminus \{v\})$ donde

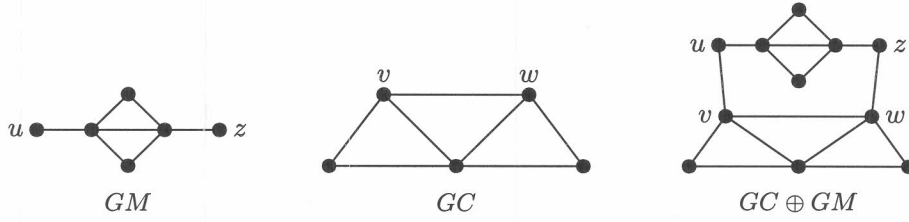


Figura 2.6: Ejemplo del operador $\oplus$ aplicado a un cambiador GC y un mantenedor GM .

las cliques que contienen a w utilizan colores del conjunto $\{1, 2\}$ y sea c_{GM} un coloreo válido de $K(GM \setminus \{v\})$ donde la clique que contiene a w utiliza el color 3. El coloreo $c = c_{GM} \cup c_{GC}$ es un 3-coloreo de $K(G \setminus \{v\})$. Claramente c es un coloreo válido, ya que dos cliques intersecan si intersecan en w o corresponden ambas a GC o ambas a GM .

Caso 2: $u \notin \{v, w\}$. Supongamos primero que $u \in V(GC)$. Como GC cambia color minimalmente, entonces existe un 3-coloreo c_{GC} de $GC \setminus \{u\}$ donde las cliques $Q_{GC}(v) \cup Q_{GC}(w)$ no utilizan algún color, digamos el 3. Sea c_{GM} un 3-coloreo de GM donde las cliques que contienen a v, w tienen ambas color 3. Claramente $c_{GC} \cup c_{GM}$ es un 3-coloreo válido de $K(G \setminus \{u\})$. Ahora supongamos que $u \in V(GM)$. Como GM cambia color minimalmente, entonces existe un 3-coloreo c_{GM} de $GM \setminus \{u\}$ donde la clique que contiene a v tiene color 1 y la que contiene a w tiene color 2. Sea c_{GC} un 3-coloreo de GC donde las cliques que contienen a v tienen colores 2, 3 y las que contienen a w tienen colores 1, 3. Claramente $c_{GC} \cup c_{GM}$ es un 3-coloreo válido de $K(G \setminus \{u\})$.

Por lo tanto $G \setminus \{u\}$ es C-good y en consecuencia G es mínimamente no coordinado. ■

Construcción de la familia

Definimos primero la operación $\oplus$ que nos permitirá construir la familia $\mathcal{G}_n$. Un ejemplo del operador $\oplus$ puede verse en la figura 2.2.

Definición: Sea GC un grafo que cambia color minimalmente entre v, w y GM un grafo que mantiene color minimalmente entre u, z donde $V(GC) \cap V(GM) = \emptyset$ y u, z no comparten la misma clique. Definimos el grafo $G = GC \oplus GM$ con $V(G) = V(GC) \cup V(GM)$ y $E(G) = E(GC) \cup E(GM) \cup \{(v, u), (w, z)\}$.

Observación: El operador $\oplus$ se puede definir utilizando el operador $\uplus$ aplicado a los grafos GM, GC y dos grafos isomorfos a K_2 .

Lema 2.2.3 Sea GC un grafo que cambia color minimalmente entre v, w y GM un grafo que mantiene color minimalmente entre u, z donde u, z no comparten la misma clique. Entonces $G = GC \oplus GM$ cambia color minimalmente entre u, z .

Demostración

Veamos que G es perfecto. Es fácil ver que, como GC y GM son perfectos, entonces G no contiene antiholes impares. Supongamos que G contiene un hole impar C . Como GC y GM son perfectos,

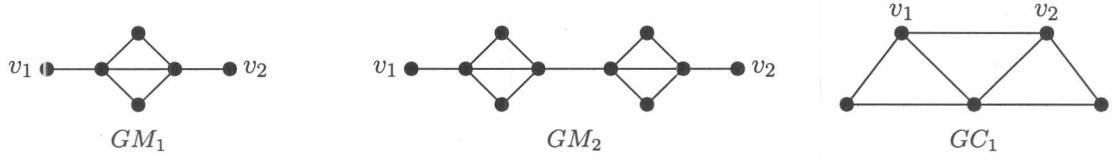


Figura 2.7: De izquierda a derecha se muestran los grafos GM_1 , GM_2 y GC_1 . En todos los casos los conectores son v_1 y v_2 .

C no está contenido ni en GC ni en GM . Entonces, por como se definió $\oplus$, existe un camino inducido P_{GC} entre v y w y otro camino inducido P_{GM} entre u y z tales que P_{GC} está contenido en GC , P_{GM} está contenido en GM y $C = P_{GC} \cup (v, u) \cup P_{GM} \cup (w, z)$. Por ser GC un cambiador y GM un mantenedor, P_{GC} y P_{GM} tienen longitud impar. Pero entonces, C tiene longitud par. Absurdo, lo que prueba que G es perfecto.

Es fácil ver que $\mathcal{Q}(G) = \mathcal{Q}(GC) \cup \mathcal{Q}(GM) \cup \{\{v, u\}, \{w, z\}\}$. Sean Q_1^v, Q_2^v y Q_1^w, Q_2^w las cliques de GC en las que se encuentran v y w respectivamente. Sean Q^u y Q^z las únicas cliques de GM en las que se encuentran u y z respectivamente. Por hipótesis $Q^u \neq Q^z$. Entonces $\mathcal{Q}_G(u) = \{Q^u, \{v, u\}\}$ y $\mathcal{Q}_G(z) = \{Q^z, \{w, z\}\}$, por lo cual, $m_G(u) = m_G(z) = 2$. Por otro lado, si $d \in V(GC) \setminus \{v, w\}$, entonces $m_G(d) = m_{GC}(d)$ y si $d \in V(GM) \setminus \{u, z\}$, $m_G(d) = m_{GM}(d)$. Además, como $\mathcal{Q}_G(v) = \{Q_1^v, Q_2^v, \{v, u\}\}$ y $\mathcal{Q}_G(w) = \{Q_1^w, Q_2^w, \{w, z\}\}$, entonces $m(v) = m(w) = 3$. Se concluye que $M(G) = 3$.

Sea P un camino inducido de G entre u y z . Si P está incluido en GM , por ser GM un mantenedor, P es impar. Si P no está incluido en GM , existe un camino inducido P' de GC tal que $P = P' \cup (v, u) \cup (w, z)$. Como GC es un cambiador, P' es impar y por lo tanto P es impar. En definitiva, todo camino inducido de G entre u y z es impar.

Sean c_{GC} y c_{GM} 3-coloreos de $K(GC)$ y $K(GM)$ tales que $c(Q_1^v) = 1$, $c(Q_2^v) = 3$, $c(Q_1^w) = 2$, $c(Q_2^w) = 3$, $c(Q^u) = 3$ y $c(Q^z) = 3$. Sea c el coloreo de $K(G)$ tal que $c(Q) = c_{GC}(Q)$ para $Q \in \mathcal{Q}(GC)$, $c(Q) = c_{GM}(Q)$ para $Q \in \mathcal{Q}(GM)$, $c(\{v, u\}) = 2$, $c(\{w, z\}) = 1$. Es fácil ver que c es válido y que es único salvo permutaciones de colores. Además, claramente las cliques de $\mathcal{Q}(u) \cup \mathcal{Q}(z)$ utilizan los 3 colores.

Se concluye que G cambia color entre u, z . Además, teniendo en cuenta que GM mantiene color minimalmente y que GC cambia color minimalmente, es fácil ver que G cambia color minimalmente. ■

Sean GM_1 y GM_2 los grafos que mantienen color minimalmente que se muestran en las figuras 2.7 y 2.7. Sea GC_1 el grafo que cambia color minimalmente que se muestra en la figura 2.7. Por el Lema 2.2.3 los grafos $G = (GC_1 \oplus GM_1) \oplus GM_2$ y $G' = (GC_1 \oplus GM_2) \oplus GM_1$ cambian color minimalmente (ver figuras 2.8 y 2.8). Notar que G no es isomorfo a G' .

Definimos la familia $\mathcal{F}_n$ de grafos que cambian color minimalmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{GC_1\}. \\ \mathcal{F}_{n+1} &= \{(GC \oplus GM_1) \oplus GM_2\}_{GC \in \mathcal{F}_n} \cup \{(GC \oplus GM_2) \oplus GM_1\}_{GC \in \mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

Claramente $|\mathcal{F}_n| = 2^n$. Es fácil ver que los grafos de $\mathcal{F}_n$ no son isomorfos entre sí. Además, por construcción, para todo $G, G' \in \mathcal{F}_n$, sucede que $|V(G)| = |V(G')| = O(n)$ y $|E(G)| = |E(G')| =$

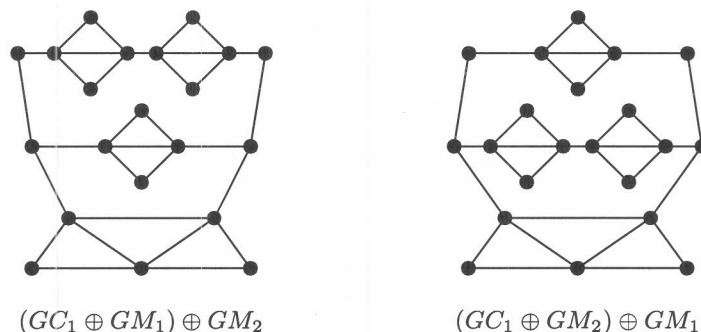


Figura 2.8: A la izquierda el grafo $(GC_1 \oplus GM_1) \oplus GM_2$ y a la derecha el grafo $(GC_1 \oplus GM_2) \oplus GM_1$. Ambos grafos cambian color minimalmente.

$O(n)$.

Definimos la familia de grafos $\mathcal{G}_n = \{GC \uplus GM_1\}_{GC \in \mathcal{F}_n}$. Por Teorema 2.2.2, todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ son mínimamente no coordinados.

El objetivo de presentar esta familia $\mathcal{G}_n$ es mostrar que la familia de grafos mínimamente no coordinados es muy grande. En la siguiente sección mostramos otras operaciones para construir mantenedores y cambiadores lo que evidencia que hay aún más. Además hay que tener en cuenta que solo estamos mostrando grafos no coordinados con $M = 3$, por lo que el problema de encontrarlos a todos se vuelve aún más complicado en el caso general.

Operaciones para construir mantenedores y cambiadores

En esta sección, mostramos formas de construir grafos que mantienen o cambian color usando el operador $\uplus$. La construcción de estos grafos es recursiva, es decir, que se construyen a partir de otros grafos que mantienen o cambian color. No vamos a formalizar estas operaciones, ni a probar que son correctas. En su lugar mostraremos las operaciones con esquemas de los cuales se puede deducir fácilmente que son correctas. El objetivo es simplemente mostrar que existen muchos grafos que mantienen o cambian color minimalmente, y por lo tanto muchos grafos mínimamente no coordinados.

Para representar a un grafo GM que mantiene color entre v_1, v_2 , vamos a dibujar un óvalo marcado con M que representa a $GM \setminus \{v_1, v_2\}$ y a los dos vértices v_1, v_2 conectados al óvalo cada uno por una línea que representan las cliques de v_1 y v_2 . Para representar a un grafo GC que cambia color entre v_1, v_2 , vamos a dibujar un óvalo marcado con C que representa a $GC \setminus \{v_1, v_2\}$ y a los dos vértices v_1, v_2 conectados al óvalo cada uno por dos líneas que representan las cliques de v_1 y v_2 . Dos ejemplos de dichos dibujos se muestran en la figura 2.9. Notar que dos líneas distintas del dibujo que representan a las cliques de los conectores podrían representar a la misma clique cuando las coloreemos con el mismo color.

A partir de las propiedades de los grafos que mantienen y cambian color, es fácil verificar que los grafos generados son perfectos y que la longitud de los caminos entre los nuevos conectores son

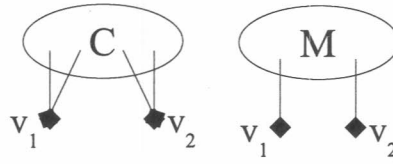


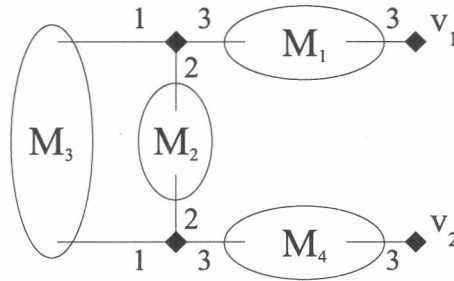
Figura 2.9: Esquema básico de un Cambiador y un Mantenedor.

impares. El coloreo del grafo lo vamos a mostrar en el esquema para poder observar los colores de las cliques en la que se encuentran los conectores. Es fácil ver que dichos coloreos son únicos salvo permutaciones de colores.

Además, no todos los grafos que mantienen o cambian color pueden utilizarse en todas las ocasiones. Solo podrán unirse grafos cuando éstos sean compatibles. En cada caso señalaremos qué grafos pueden usarse para que el grafo que resulta mantenga o cambie color minimalmente.

Operación 1:

Sean $M_1, \dots, M_4$ grafos que mantienen color entre 2 vértices, donde M_2 y M_3 son compatibles. Uniendo los grafos como se muestra en la figura 2.10 se obtiene un grafo que mantiene color entre v_1, v_2 . Además si $M_1, \dots, M_4$ mantienen color minimalmente; M_1 y M_4 no son triángulos y M_2 es triángulo sii M_3 es triángulo, entonces el resultado mantiene color minimalmente.

Figura 2.10: Operación 1 - Construye un grafo que mantiene color entre v_1, v_2 .

Operación 2:

Sean $M_1, \dots, M_n$ ($n = 2k + 1$, $k \geq 2$) grafos que mantienen color entre 2 vértices, donde $M_2, \dots, M_{n-1}$ no son isomorfos a K_2 . Uniendo los grafos como se muestra en la figura 2.11, donde se agregan todas las aristas entre los conectores de $M_2, \dots, M_{n-1}$, se obtiene un grafo que mantiene color entre v_1, v_2 . Además si $M_1, \dots, M_n$ mantienen color minimalmente; M_1 y M_n no son triángulos, entonces el resultado mantiene color minimalmente.

Operación 3:

Sean C un grafo que cambia color, M_1, M_2, M_3 grafos que mantienen color entre 2 vértices. Uniendo los grafos como se muestra en la figura 2.12 se obtiene un grafo que cambia color entre v_1, v_2 . Además si C cambia color minimalmente; $M_1, \dots, M_3$ mantienen color minimalmente; M_1 y M_3 no son triángulos, entonces el resultado cambia color minimal. Notar que esta operación es una generalización del operador $\oplus$.

Operación 4:

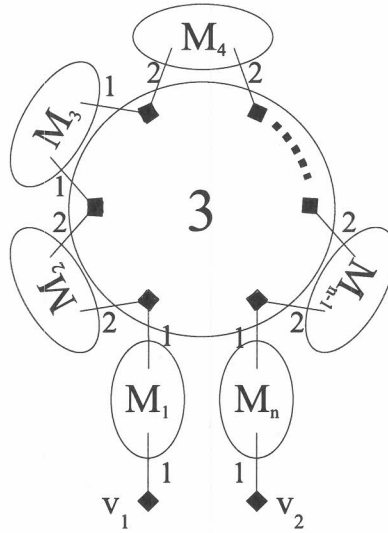


Figura 2.11: Operación 2 - Construye un grafo que mantiene color entre v_1 y v_2 .

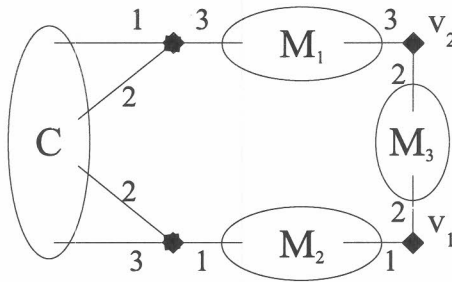


Figura 2.12: Operación 3 - Construye un grafo que cambia color entre v_1, v_2 .

Sean $M_1, \dots, M_n$ ($n = 2k$, $k \geq 1$) grafos que mantienen color entre 2 vértices, donde $M_1, \dots, M_n$ no son isomorfos a K_2 . Uniendo los grafos como se muestra en la figura 2.13, donde se agregan todas las aristas entre los conectores de $M_1, \dots, M_n$, se obtiene un grafo que cambia color entre v_1, v_2 . Además si $M_1, \dots, M_n$ mantienen color minimalmente, entonces el resultado cambia color minimalmente.

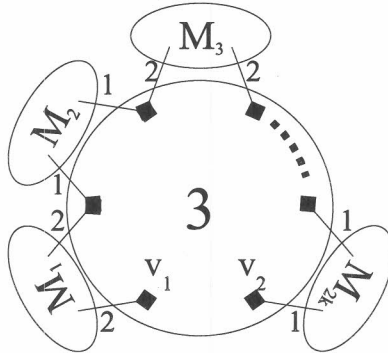
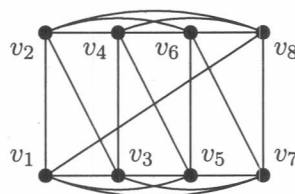


Figura 2.13: Operación 4 - Construye un grafo que cambia color entre v_1, v_2 .

Figura 2.14: Ejemplo del tambor D_4 . Notar que $D_4 = \overline{C_8}$.

Pensamos que estas operaciones pueden generalizarse para construir grafos que mantienen color entre más de 2 conectores.

2.3. No coordinados con $M = 4$

Tambores

Un n -tambor ($n \geq 3$) es el grafo $D_n = (V(D_n), E(D_n))$ con $V(D_n) = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, donde para todo $1 \leq i \leq 2n$, $(v_i, v_{i+1}) \in E(D_n)$ y $U_n = \{v_{2i}\}_{i \in I_n}$, $W_n = \{v_{2i-1}\}_{i \in I_n}$ son completos en D_n . En la figura 2.3, se muestra D_4 .

Claramente las cliques de D_n son U_n , W_n y $Q_{i+2} = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ para todo $i \in I_{2n}$. Por lo tanto, como v_i pertenece únicamente a U_n (W_n) y Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2} cuando i es par (impar), $M(D_n) = 4$.

Por otra parte, todo tambor es el complemento de un grafo bipartito, donde la bipartición es U_n, W_n . Por lo tanto, por Teorema 1.2.1, los tambores son perfectos.

El objetivo de esta sección es probar que D_n es mínimamente no coordinado sii $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ (Teorema 2.3.5). Además, vamos a probar que si $n \equiv 0 \pmod{3}$ entonces D_n es coordinado (teorema 2.3.5). La demostración se divide en dos, primero probamos que D_n no es C-good sii $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ (Lema 2.3.1) y luego probamos que todo subgrafo inducido propio de D_n es C-good (Lemas 2.3.2, 2.3.3 y Teorema 2.3.4).

Antes de comenzar la demostración, recordamos que si n y m son números naturales, $r(n, m)$ es el resto de dividir n por m .

Lema 2.3.1 D_n no es C-good sii $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Demostración

Como $M(D_n) = 4$, basta ver que $F(D_n) > 4$ sii $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Supongamos que hay un coloreo válido c de $K(D_n)$ que usa los colores 0,1,2,3. Como U_n, Q_1, Q_2, Q_3 intersecan dos a dos en v_1 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c(U_n) = 3$ y que $c(Q_i) = r(i, 3)$ para $1 \leq i \leq 3$. Como $U_n \cap Q_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq 2n$, entonces $0 \leq c(Q_i) \leq 2$. Además, como $W_n \cap Q_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq 2n$, entonces $c(W_n) = 3$. Por otra parte, si $c(Q_i) = j$ con $0 \leq j \leq 2$, como $Q_i \cap Q_{i+1} \cap Q_{i+2} \neq \emptyset$ y $Q_{i+1} \cap Q_{i+2} \cap Q_{i+3} \neq \emptyset$, entonces $c(Q_{i+3}) = j$. Por lo tanto $c(Q_i) = r(i, 3)$ para todo $1 \leq i \leq 2n$.

En conclusión, todo 4-coloreo válido de $K(D_n)$ es único salvo permutaciones de colores.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe un 4-coloreo válido c de $K(D_n)$. Por lo recién mostrado, podemos suponer que $c(U_n) = c(W_n) = 3$ y que $c(Q_i) = r(i, 3)$ para $1 \leq i \leq 2n$.

Si $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ entonces $2n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Por lo tanto $c(Q_{2n}) = r(2n, 3) = c(Q_{r(2n, 3)})$. Como $v_{2n} \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_{2n}$ entonces c no es un coloreo válido. Absurdo. Por lo tanto, $F(D_n) > 4$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $n \equiv 0 \pmod{3}$ y llamemos $k = \frac{n}{3}$. Sea c el 4-coloreo de $K(D_n)$ antes mostrado. Recordamos que $c(U_n) = c(W_n) = 3$ y $c(Q_i) = r(i, 3)$ para $1 \leq i \leq 2n$.

Sean $A \neq B$ dos cliques con $A \cap B \neq \emptyset$. Veamos que $c(B) \neq c(A)$.

Si $A = W_n$ o $A = U_n$, como $W_n \cap U_n = \emptyset$ entonces $B = Q_i$ para algún $1 \leq i \leq 2n$. En ambos casos, $c(B) \neq c(A)$.

Si $A = Q_i$ y $B = Q_j$ para algún par $1 \leq i < j \leq 2n$. Entonces, como $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, $j < i + 3$ ó $j + 3 - i > 2n$.

Si $j < i + 3$, como $j > i$ entonces $j \not\equiv i \pmod{3}$ y por lo tanto $c(A) = c(Q_i) \neq c(Q_j) = c(B)$. Si $j + 3 - i > 2n$, como $j - i < 2n < j + 3 - i$ entonces $j - i \not\equiv 2n \pmod{3}$ entonces $j - i \not\equiv 6k \pmod{3}$ entonces $j - i \not\equiv 0 \pmod{3}$ entonces $r(j, 3) \neq r(i, 3)$.

Por lo tanto, c es un coloreo válido. Entonces $F(D_n) \leq 4$. $\blacksquare$

Lema 2.3.2 *Cualquier subgrafo inducido propio H de un tambor D_n con $M(H) = 4$ es C-good.*

Demostración

Sea $v \in V(D_n) \setminus V(H)$ que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v = v_{2n}$. Sea J el grafo que resulta de agregar a D_n un vértice u simplicial completo a U_n . Es fácil ver que $M(J) = M(D_n) = 4$. Llamemos G al grafo $J \setminus \{v_{2n}\}$. Claramente $M(G) = 4$. Como H es subgrafo inducido de G entonces por Lema 1.2.20, alcanza con probar que G es C-good para ver que H lo es.

Claramente $U_G = U_n \setminus \{v_{2n}\} \cup \{u\}$ y $W_G = W_n$ son cliques de G . Por lo tanto G es el complemento de un bipartito con bipartición U_G, W_G .

Como $v_{2n} \notin Q_3 \cup \dots \cup Q_{2n-1}$, entonces $Q_3, \dots, Q_{2n-1}$ son cliques de G . Además, como ya observamos, U_G y W_G son cliques de G . En cambio, los completos $Q_{2n} \setminus v_{2n}, Q_1 \setminus v_{2n}, Q_2 \setminus v_{2n}$ se encuentran incluidos en las cliques Q_{2n-1}, W_G, Q_3 respectivamente y por lo tanto no son cliques de G . No hay más cliques en G .

Consideremos entonces el coloreo c de $K(G)$ donde $c(Q_i) = r(i, 3)$ para todo $3 \leq i \leq 2n - 1$ y $c(W_G) = c(U_G) = 3$. Claramente c es un 4-coloreo. Vamos a ver que es válido.

Sean $A \neq B$ dos cliques con $A \cap B \neq \emptyset$. Veamos que $c(B) \neq c(A)$.

Si $A = W_G$ o $A = U_G$, como $W_n \cap U_n = \emptyset$ entonces $B = Q_i$ para algún $3 \leq i \leq 2n - 1$. En ambos casos, $c(B) \neq c(A)$.

Si $A = Q_i$ y $B = Q_j$ para algún par $3 \leq i < j \leq 2n - 1$. Entonces, como $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, $j < i + 3$ (notar que el caso $j + 3 - i > 2n$ no puede ocurrir ya que $j \leq 2n - 1$ e $i \geq 3$). Como además, $j > i$ entonces $j \not\equiv i \pmod{3}$ y por lo tanto $c(A) = c(Q_i) \neq c(Q_j) = c(B)$. $\blacksquare$

Lema 2.3.3 *Cualquier subgrafo inducido propio H de un tambor D_n con $M(H) = 3$ es C-good.*

Demostración

Sean $U_H \subseteq U_n$ y $W_H \subseteq W_n$ tales que $V(H) = U_H \cup W_H$ (claramente U_H, W_H es una partición de $V(H)$). Sea G el grafo que se obtiene agregando un vértice a completo a todos los vértices de U_H y otro b completo a todos los vértices de W_H . Claramente G es el complemento de un bipartito con bipartición $U_G = U_H \cup \{a\}$, $W_G = W_H \cup \{b\}$ donde ambos son cliques.

Por otra parte, $M(G) \geq M(H)$ y si $F(G) \leq 3$ entonces $M(G) = M(H)$. Por lo tanto si $F(G) \leq 3$ entonces por Lema 1.2.20 H es C-good. Como $\{U_G, W_G\}$ es un conjunto independiente de $K(G)$, si $K(G) \setminus \{U_G, W_G\}$ es 2-coloreable entonces $K(G)$ es 3-coloreable. Vamos a probar entonces que $K(G) \setminus \{U_G, W_G\}$ es 2-coloreable.

Supongamos que $K(G) \setminus \{U_G, W_G\}$ no es 2-coloreable y por lo tanto existen $R_1, \dots, R_{2k+1}$ ($k \geq 1$) que forman un ciclo en $K(G) \setminus \{U_G, W_G\}$. Como $R_i \not\subseteq U_G, W_G$ y $U_G \cup W_G = V(G)$ entonces $R_i \cap U_G \neq \emptyset$ y $R_i \cap W_G \neq \emptyset$.

Veamos primero que forma tienen dos cliques consecutivas del ciclo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que existen u, w_i, w_{i+1} tales que $u \in R_i \cap R_{i+1} \cap U_G$, $w_i \in R_i \cap W_G$ y $w_{i+1} \in R_{i+1} \cap W_G$. Claramente $S = \{u, w_i, w_{i+1}\}$ forma un completo que, por ser D_n un tambor, es una clique. Como u tiene a lo sumo dos vecinos en W_G entonces los vecinos de u en W_G son w_i y w_{i+1} .

Supongamos que $S \neq R_i$ y $S \neq R_{i+1}$ entonces como R_i, R_{i+1} son cliques, existen $u_i \in R_i \setminus S$ y $u_{i+1} \in R_{i+1} \setminus S$. Como u_i y u_{i+1} son vecinos de u y $u_i, u_{i+1} \neq w_i, w_{i+1}$ entonces $u_i, u_{i+1} \in U_G$. Claramente $u_i, u_{i+1}, u \neq a$ por ser vecinos de vértices en W_G . Por lo tanto U_H es una clique y $u \in U_H \cap S \cap R_i \cap R_{i+1}$. Entonces $m_H(u) \geq 4$ lo que es un absurdo. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S = R_i$.

Entonces $R_i \cap R_{i+1} = \{w_{i+1}, u\}$ y por lo tanto R_{i+1} contiene un vértice $u' \neq w_i, w_{i+1}, u$. Como u' es vecino de u y $u' \neq w_i, w_{i+1}$ entonces $u' \in U_G$.

En conclusión, $R_i = \{u_i, w_i, w_{i+1}\}$ y $R_{i+1} = \{u_i, w_{i+1}, u_{i+1}\}$ donde $u_i = u$ y $u_{i+1} = u'$. Como w_{i+1} tiene a lo sumo dos vecinos en U_G por ser D_n un tambor, entonces los vecinos de w_{i+1} son u_i y u_{i+1} .

Pero entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R_1 = \{u_1, w_1, u_2\}$, $R_2 = \{w_1, u_2, w_2\}$ y $R_3 = \{u_2, w_2, u_3\}$ donde $R_1 \cap R_3$ no es necesariamente vacío y $u_i \in U_G$, $w_i \in W_G$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Pero entonces $u_1, u_2, u_3 \neq a$ por tener vecinos en W_G y en consecuencia U_H es una clique y R_1, R_2, R_3 son cliques de H . Pero entonces $m_H(u_2) \geq 4$. Absurdo, que provino de suponer que $K(G)$ no es 3-coloreable. Por lo tanto H es C-good. ■

Teorema 2.3.4 *Sea G un subgrafo inducido propio de D_n . Entonces G es coordinado.*

Demostración

Sea H un subgrafo inducido de G . Entonces H es subgrafo inducido propio de D_n . Si $M(H) = 4$ entonces por Lema 2.3.2 H es C-good. Si $M(H) = 3$ entonces por Lema 2.3.3 H es C-good. Por último, supongamos que $M(H) \leq 2$. Como D_n es perfecto, H es perfecto. Pero entonces por Teorema 1.2.23, H es coordinado. Por lo tanto H es C-good en cualquiera de los casos y se

concluye que G es coordinado. ■

Teorema 2.3.5 *Son equivalentes:*

- (i) D_n no es coordinado
- (ii) $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.
- (iii) D_n es mínimamente no coordinado.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por el contrarecíproco. Sea $n \equiv 0 \pmod{3}$. Por Lema 2.3.1 D_n es C-good y por Teorema 2.3.4 todo subgrafo inducido propio de D_n también es coordinado. Por lo tanto D_n es coordinado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ entonces D_n no es coordinado porque por Lema 2.3.1 no es C-good. Por Teorema 2.3.4 todo subgrafo inducido propio de D_n es coordinado. Por lo tanto D_n es mínimamente no coordinado.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por definición de mínimamente no coordinado. ■

Arco Circulares

Un grafo *arco circular* es el grafo intersección de un conjunto de arcos sobre un círculo. Un grafo arco circular se dice *arco circular Helly* (ACH) si la familia de arcos que lo define cumple la propiedad de Helly. Un grafo es *de intervalos* si es el grafo intersección de un conjunto de intervalos sobre la recta real. Para más información sobre los grafos arco circulares y de intervalos ver [10].

En esta sección mostramos una familia de grafos ACH, mínimamente no coordinados y con $M = 4$.

Sea A_n ($n \geq 2$) el grafo tal que $V(A_n) = \{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, c_1, \dots, c_{n+1}, d_1, \dots, d_{2n}\}$ y $E(A_n)$ está dado por lo siguiente: $c_1 \dots c_{n+1}$ es un camino inducido; w_1 es adyacente a w_2, c_1, c_{n+1} ; w_2 es adyacente a c_1, c_{n+1} ; u_1 es adyacente a w_1 y a c_1 ; u_2 es adyacente a w_1 y a w_2 ; u_3 es adyacente a w_2 y a c_{n+1} . Para $1 \leq i \leq n$, $d_{2i-1}, d_{2i}, c_i, c_{i+1}$ inducen un diamante con d_{2i-1} no adyacente a d_{2i} .

En la figura 2.15, se muestra A_4 junto con su modelo ACH.

El objetivo de esta sección es probar que si n es par, A_n es mínimamente no coordinado. El Lema 2.3.14 muestra que A_n no es C-good. El Lema 2.3.16 muestra que cualquier subgrafo inducido propio de A_n con $M = 4$ es C-good. El Lema 2.3.15 muestra que cualquier subgrafo inducido propio de A_n con $M = 3$ es C-good. El Teorema 2.3.18 finalmente dice que A_n es mínimamente no coordinado.

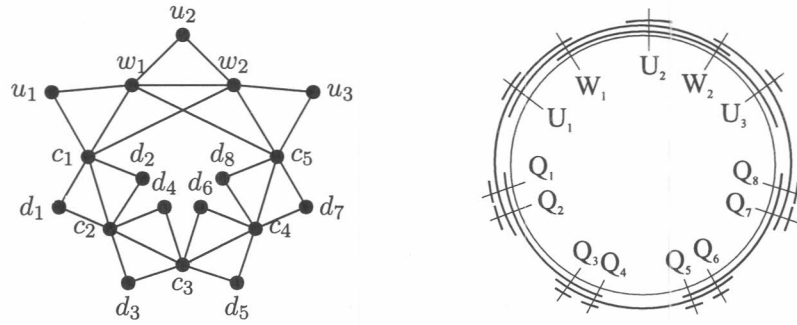


Figura 2.15: Grafo A_4 a la izquierda y su modelo ACH a la derecha, con las cliques marcadas.

Es fácil ver que las cliques de A_n son $U_1 = \{u_1, w_1, c_1\}$, $U_2 = \{u_2, w_1, w_2\}$, $U_3 = \{u_3, w_2, c_{n+1}\}$, $W_1 = \{w_1, w_2, c_1\}$, $W_2 = \{w_2, w_1, c_{n+1}\}$ y Q_i ($1 \leq i \leq 2n$) con $Q_{2j-1} = \{d_{2j-1}, c_j, c_{j+1}\}$, $Q_{2j} = \{d_{2j}, c_j, c_{j+1}\}$. Por lo tanto, $M(A_n) = 4$. Notar además que, si n es par, A_n es perfecto.

Los siguientes teoremas los utilizamos para mostrar que A_n es ACH y que $A_n \setminus \{v\}$ es de intervalos para todo $v \in \{c_1, \dots, c_{n+1}\}$.

Teorema 2.3.6 [21] *Un grafo G es ACH sii existe un ordenamiento de las cliques de G tal que para todo vértice $v \in V(G)$ las cliques $Q(v)$ aparecen circularmente consecutivas en el ordenamiento.*

Teorema 2.3.7 [22] *Un grafo G es de intervalos sii existe un ordenamiento de las cliques de G tal que para todo vértice $v \in V(G)$ las cliques $Q(v)$ aparecen consecutivas en el ordenamiento.*

Los grafos de intervalos tienen otra caracterización que permite concluir fácilmente que son perfectos y no contienen pirámides.

Teorema 2.3.8 [32] *Un grafo G es de intervalos sii G no contiene holes y en toda tripla de vértices de G existen dos de ellos tal que todo camino que los une interseca el vecindario cerrado del restante.*

Teorema 2.3.9 [27] *El grafo clique de un grafo de intervalos es un grafo de intervalos.*

El siguiente es un corolario directo del Lema 1.2.17 y de los Teorema 1.2.12, 2.3.8 y 2.3.9.

Teorema 2.3.10 *Los grafos de intervalos son CHH, K -perfectos y coordinados.*

Teorema 2.3.11 *A_n es ACH para todo n .*

Demostración

Sea el siguiente ordenamiento circular de las cliques de A_n : $Q_1, \dots, Q_n, U_3, W_2, U_2, W_1, U_1$. Analizando cada vértice $v \in A_n$ es fácil ver que las cliques de v aparecen circularmente consecutivas en el ordenamiento dado. Luego, por Teorema 2.3.6, A_n es ACH. ■

Lema 2.3.12 *Para todo n , $A_n \setminus \{v\}$ es de intervalos para todo $v \in \{c_1, \dots, c_{n+1}\}$.*

Demostración

Por Teorema 2.3.7 basta mostrar un ordenamiento de las cliques de $A_n \setminus \{v\}$ tal que las cliques de todo vértice son consecutivas en el ordenamiento.

Si $v = c_1$. El ordenamiento es: $Q_1 \setminus \{c_1\}, Q_2 \setminus \{c_1\}, Q_3, \dots, Q_n, U_3, W_2, U_2, U_1 \setminus \{c_1\}$.

Si $v = c_{n+1}$, es simétrico al caso $v = c_1$.

Si $v = c_i$ con $2 \leq i \leq n$. El ordenamiento es: $Q_{2i-1} \setminus \{v\}, Q_{2i} \setminus \{v\}, Q_{2i+1}, \dots, Q_n, U_3, W_2, U_2, W_1, U_1, Q_1, \dots, Q_{2i-4}, Q_{2i-3} \setminus \{v\}, Q_{2i-2} \setminus \{v\}$

Analizando cada vértice $w \in A_n \setminus \{v\}$ es fácil ver que las cliques de w aparecen consecutivas en el ordenamiento dado. ■

Lema 2.3.13 *Para todo n , $A_n \setminus \{w_1, w_2\}$ es de intervalos.*

Demostración

Por Teorema 2.3.7 basta mostrar un ordenamiento de las cliques de $A_n \setminus \{w_1, w_2\}$ tal que las cliques de todo vértice son consecutivas en el ordenamiento.

Tal ordenamiento es: $Q_1, \dots, Q_n, U_3 \setminus \{w_2\}, U_2 \setminus \{w_1, w_2\}, U_1 \setminus \{w_1\}$. ■

Lema 2.3.14 *Si n es par, A_n no es C-good.*

Demostración

Como $M(A_n) = 4$, basta probar que $F(A_n) > 4$

Supongamos que existe un 4-coloreo x válido de $K(A_n)$. Como U_1, U_2, W_1, W_2 contienen a w_1 , podemos suponer que $x(U_1) = 1, x(U_2) = 2, x(W_1) = 3$ y $x(W_2) = 4$. Además, como U_3 interseca a U_2 , a W_1 y a W_2 (todos en w_2), $x(U_3) = 1$.

Como Q_1, Q_2, U_1, W_1 tienen en común a c_1 , podemos suponer que $x(Q_1) = 2$ y $x(Q_2) = 4$. Si Q_{2j-1}, Q_{2j} tienen colores a y b respectivamente, como $Q_{2j-1}, Q_{2j}, Q_{2j+1}, Q_{2j+2}$ tienen en común a c_{j+1} , podemos suponer que Q_{2j+1}, Q_{2j+2} tienen colores $(\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{a, b\})$.

Como n es par, se concluye entonces que Q_{2n-1}, Q_{2n} tienen colores 1 y 3 respectivamente.

Pero $x(U_3) = 1 = x(Q_{2n-1})$ con $U_3 \cap Q_{2n-1} = \{c_{n+1}\}$. Absurdo ya x era un coloreo válido. Por lo tanto $F(A_n) > 4$. ■

Lema 2.3.15 *Si n es par, cualquier subgrafo inducido propio H de A_n con $M(H) = 4$ es C-good.*

Demostración

Sea $v \in V(A_n) \setminus V(H)$. Sea $G = A_n \setminus \{v\}$. Por Lema 1.2.20, basta ver que G es C-good para ver que H es C-good.

Si $v = c_i$ ($1 \leq i \leq n+1$), entonces por Lema 2.3.12, G es de intervalos. Luego por Teorema 2.3.10 G es coordinado.

En los otros casos ($v = w_1$, $v = w_2$, $v = u_j$ o $v = d_i$), daremos un 4-coloreo x de $K(G)$. En todos los casos es fácil verificar que c es válido.

Caso $v = w_1$:

En este caso $\mathcal{Q}(G) = Q_1, \dots, Q_{2n}, \{c_1, u_1\}, \{c_1, w_2\}, \{u_2, w_2\}, U_3$. Sea x el siguiente coloreo de $K(G)$:

- $x(Q_{4k+1}) = 2, x(Q_{4k+2}) = 4, x(Q_{4k+3}) = 1$ y $x(Q_{4k+4}) = 3$ ($0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$)
- $x(\{c_1, u_1\}) = 1, x(\{c_1, w_2\}) = 3, x(\{u_2, w_2\}) = 2, x(U_3) = 4$

Caso $v = w_2$:

Es análogo al caso $v = w_1$

Caso $v = u_j$ ($1 \leq j \leq 3$):

En este caso $\mathcal{Q}(G) = \mathcal{Q}(A_n) \setminus \{U_j\}$. Sea x el siguiente coloreo de $K(G)$:

- $x(Q_{4k+1}) = 2, x(Q_{4k+2}) = 4, x(Q_{4k+3}) = 1$ y $x(Q_{4k+4}) = 3$ ($0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$)
- $x(W_1) = 3; x(W_2) = 4$
- Si $j = 1$: $x(U_2) = 1; x(U_3) = 2$
- Si $j = 2$: $x(U_1) = 1; x(U_3) = 2$
- Si $j = 3$: $x(U_1) = 1; x(U_2) = 2$

Caso $v = d_i$ ($i = 4j + r$ con $0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ y $1 \leq r \leq 4$):

En este caso $\mathcal{Q}(G) = \mathcal{Q}(A_n) \setminus \{Q_i\}$. Sea x el siguiente coloreo de $K(G)$:

- $x(U_1) = 1; x(U_2) = 2; x(U_3) = 1, x(W_1) = 3; x(W_2) = 4;$
- $x(Q_{4k+1}) = 2, x(Q_{4k+2}) = 4, x(Q_{4k+3}) = 1$ y $x(Q_{4k+4}) = 3$ ($0 \leq k \leq j - 1$)
- $x(Q_{4k+1}) = 1, x(Q_{4k+2}) = 4, x(Q_{4k+3}) = 2$ y $x(Q_{4k+4}) = 3$ ($j + 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$)
- Si $r = 1$ o $r = 2$: $x(Q_i) = 4, x(Q_{4j+3}) = 2, x(Q_{4j+4}) = 3$
- Si $r = 3$ o $r = 4$: $x(Q_{4j+1}) = 2, x(Q_{4j+2}) = 4, x(Q_i) = 3$

■

Lema 2.3.16 Si n es par, cualquier subgrafo inducido propio H de A_n con $M(H) = 3$ es C -good.

Demostración

Supongamos primero que algún c_i ($1 \leq i \leq n+1$) no pertenece a H o que ni w_1 , ni w_2 pertenecen a H , entonces por Lemas 2.3.12 y 2.3.13 H es un grafo de intervalos y por Teorema 2.3.10 H es C-good.

Supongamos ahora que todos los c_i ($1 \leq i \leq n+1$) pertenecen a H y que al menos uno de w_1, w_2 pertenece a H . Podemos suponer que w_2 pertenece a H .

Sea L el subgrafo de H inducido por los vértices de $V(H) \cap \{c_1, \dots, c_{n+1}, d_1, \dots, d_{2n}\}$. Es fácil ver que hay un 3-coloreo válido x_L de $K(L)$ tal que para todo $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, las cliques de $\mathcal{Q}_L(c_{2k-1}, c_{2k})$ usan el color 1 y de ser necesario el color 3 y las cliques de $\mathcal{Q}_L(c_{2k}, c_{2k+1})$ usan el color 2 y de ser necesario el color 3. En particular, las cliques de $\mathcal{Q}_L(c_1, c_2)$ usan a lo sumo los colores 1 y 3. Además, como n es par, las cliques de $\mathcal{Q}_L(c_n, c_{n+1})$ usan a lo sumo los colores 2 y 3.

Claramente $\mathcal{Q}(L) \subseteq \mathcal{Q}(H)$. Extenderemos el coloreo x_L de $K(L)$ a un coloreo x de $K(H)$.

Caso 1: $w_1 \in V(H)$.

Extendemos x_L a un coloreo x de $K(H)$ de la siguiente forma:

$$x(W_1) = 2, x(W_2) = 1.$$

Para $1 \leq i \leq 3$, si $U_i \in \mathcal{Q}(H)$, entonces $x(U_i) = 3$.

Veamos que x es un coloreo válido. Sean $A, B \in \mathcal{Q}(H)$ con $A \cap B \neq \emptyset$.

Supongamos que $A, B \in \mathcal{Q}(L)$. Como x_L es válido, $x(A) \neq x(B)$.

Supongamos que $A, B \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$. Los únicos pares de cliques de $\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$ que intersecan y tiene el mismo color son U_1, U_2 y U_2, U_3 . Pero, para $i = 1$ o $i = 3$, si $U_i \in \mathcal{Q}(H)$, como $m_H(w_i) = 3$, entonces $U_2 \notin \mathcal{Q}(H)$. Por lo tanto, si $A, B \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$, entonces $x(A) \neq x(B)$. Supongamos que $A \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$ y $B \in \mathcal{Q}(L)$. Claramente $A \neq U_2$. Si $A = W_1$, entonces $B \in \mathcal{Q}_H(c_1, c_2)$. Si $A = W_2$ entonces $B \in \mathcal{Q}_H(c_n, c_{n+1})$. En cualquiera de los 2 casos, por como se definió x , $x(A) \neq x(B)$. Si $A = U_1$, entonces $B \in \mathcal{Q}(c_1, c_2)$. En este caso, como $m_H(c_1) = 3$, entonces $|\mathcal{Q}(c_1, c_2)| = 1$. Por lo tanto, por como se eligió x_L , $x(B) = 1$. Entonces, $x(A) = x(U_1) = 3 \neq 1 = x(B)$. Si $A = U_3$, utilizando argumentos similares que para el caso $A = U_1$, se llega a que $x(A) \neq x(B)$.

En definitiva, si $A, B \in \mathcal{Q}(H)$ con $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $x(A) \neq x(B)$. Lo que prueba que x es un 3-coloreo válido de $K(H)$ y que H es C-good.

Caso 2: $w_1 \notin V(H)$.

Extendemos x_L a un coloreo x de $K(H)$ de la siguiente forma:

$$x(\{c_1, w_2\}) = 2$$

$$\text{Si } u_1 \in V(H), x(\{u_1, c_1\}) = 3$$

$$\text{Si } u_2 \in V(H), x(\{u_2, w_2\}) = 3$$

Llamemos U a la única clique de $\mathcal{Q}_H(w_2, c_{n+1})$. $x(U) = 1$

Veamos que x es un coloreo válido. Sean $A, B \in \mathcal{Q}(H)$ con $A \cap B \neq \emptyset$. Tanto Si $A, B \in \mathcal{Q}(L)$, como si $A, B \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$, es fácil ver que $x(A) \neq x(B)$.

Supongamos que $A \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}(L)$ y $B \in \mathcal{Q}(L)$. Si $x(A) = x(B)$, por como se eligió el coloreo x , la única posibilidad es que $Q_1, Q_2, \{u_1, c_1\} \in \mathcal{Q}(H)$, $A = \{u_1, c_1\}$ y $B = Q_1$ o $B = Q_2$. En este caso, $m_H(c_1) = 4$. Absurdo que provino de suponer que $x(A) = x(B)$.

Se concluye entonces que x es un 3-coloreo válido de $K(H)$ y que H es C-good. ■

Teorema 2.3.17 *Si n es par, cualquier subgrafo inducido propio H de A_n es C-good.*

Demostración

Si $M(H) = 4$ entonces por Lema 2.3.15 H es C-good. Si $M(H) = 3$ entonces por Lema 2.3.16 H es C-good. Por último, supongamos que $M(H) \leq 2$. Como A_n es perfecto, H es perfecto. Pero entonces por Teorema 1.2.23, H es coordinado, y por lo tanto es C-good. ■

Teorema 2.3.18 *Si n es par, A_n es mínimamente no coordinado.*

Demostración

Es consecuencia del Lema 2.3.14 y del Teorema 2.3.17. ■

Capítulo 3

Reconocimiento de grafos coordinados

En la sección 1.2 probamos que el problema de determinar si un grafo es coordinado es polinomial para la clase de grafos donde $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$. El objetivo de este capítulo es probar que el reconocimiento de grafos coordinados restringido a la clase de grafos con $M(G) \leq 3$ y $\Delta(G) \leq 4$ y $\omega(G) \leq 3$ es NP-completo. Para esto vamos a reducir polinomialmente el problema de determinar si un grafo G con $\omega(G) \leq 2$ y $\Delta(G) \leq 4$ es 3-coloreable, que sabemos que es NP-completo [35], a nuestro problema.

La reducción se divide en tres etapas, en la primera se reduce el problema de 3-coloreo al de determinar el valor de $F(G)$ para un grafo G sin diamantes con $\omega(G) \leq 4$ y $M(G) = 2$ (sección 3.2). En la segunda etapa se transforma cualquier instancia G del problema de determinar F , a otro grafo H con $M(H) = 3$, $\Delta(H) \leq 5$ y $\omega(H) \leq 4$ donde $F(G) \leq 3$ sii H es coordinado (sección 3.3). En la última etapa se transforman estos grafos en otros, para probar que el problema de determinar si G es coordinado es NP-completo aún cuando $M(G) = 3$, $\Delta(G) \leq 4$ y $\omega(G) \leq 3$ (sección 3.4).

3.1. Preliminares

Antes de empezar, vamos a darle nombre a los problemas y recordar algunas definiciones y resultados que necesitamos en el resto de la sección.

Definición: Llamaremos:

- π_χ al problema de determinar si $\chi(G) \leq 3$ para un grafo con $\omega(G) \leq 2$, $\delta(G) \geq 2$ y $\Delta(G) \leq 4$.
- π_F al problema de determinar si $F(G) \leq 3$ cuando G no contiene diamantes, $\omega(G) \leq 4$ y $M(G) \leq 2$.
- π_C al problema de determinar si G es coordinado para un grafo G con $M(G) \leq 3$, $\Delta(G) \leq 4$ y $\omega(G) \leq 3$ donde además G no contiene holes impares, ni C_4 ni gems.

En esta sección, llamaremos $\mathcal{NP}$ a la clase de problemas polinomiales en máquinas de Turing no determinísticas y $\mathcal{NP-C}$ a la clase de problemas NP-completos. Para más información sobre clases de complejidad ver [20].

Teorema 3.1.1 [35] $\pi_\chi \in \mathcal{NP-C}$.

Teorema 3.1.2 *El problema de determinar si un grafo es coordinado es NP restringido a la clase de grafos donde $M(G) \leq 3$ para todo grafo G .*

Demostración

Basta mostrar que un certificado positivo de que G es coordinado se puede verificar en tiempo polinomial. Como certificado positivo, se puede dar un 3-coloreo x de $K(G)$.

Por Teorema 1.2.25, hay que verificar que x es válido y que G es perfecto. La verificación de que x es válido se puede hacer en tiempo polinomial ya que como $M(G) \leq 3$ entonces la cantidad de cliques es polinomial en la cantidad de vértices. Como además verificar si G es perfecto es polinomial por Teorema 1.2.3 entonces $\pi_C \in \mathcal{NP}$. ■

Para finalizar este apartado, cabe mencionar que en este capítulo utilizaremos grafos mantenedores y cambiadores cuya definición se encuentra en la sección 2.2.

3.2. Complejidad del problema π_F

Para empezar la demostración, vamos a probar que $\pi_F \in \mathcal{NP-C}$. Este es un resultado intermedio que simplifica un poco la reducción de π_χ a π_C .

Teorema 3.2.1 [8] *Si G es un grafo CH sin vértices dominados entonces $K^2(G) = G$.*

Además, usamos los siguientes dos lemas que serán probados en la sección 4.1.

Lema 3.2.2 (4.1.3) *Sean Q_1 y Q_2 dos cliques distintas de $L(G)$. Si $|Q_1 \cap Q_2| = 2$ entonces G contiene un triángulo.*

Lema 3.2.3 (4.1.4) *Sean Q_1 y Q_2 dos cliques distintas de $L(G)$. Entonces $|Q_1 \cap Q_2| < 3$.*

Teorema 3.2.4 $\pi_F \in \mathcal{NP-C}$.

Demostración

Para esta demostración vamos a reducir π_χ a π_F . Sea G un grafo que es instancia de π_χ . Vamos a probar que $L(G)$ es una instancia de π_F que resuelve el problema π_χ para la instancia G . Como G es instancia de π_χ entonces G no contiene triángulos, $\delta(G) \geq 2$ y $\Delta(G) \leq 4$.

Supongamos que G contiene un vértice u dominado por un vértice v . Como $\delta(G) \geq 2$ entonces u tiene un vecino $w \neq v$ y como v domina a u entonces $(v, w) \in E(G)$. Entonces $\{u, v, w\}$ induce un triángulo lo que es una contradicción. Por lo tanto G no contiene vértices dominados.

Como G no contiene triángulos, por Teorema 1.2.12, G es CHH y como G no contiene vértices dominados, entonces por Teorema 3.2.1 $K^2(G) = G$. Además, como G no tiene triángulos ni vértices aislados, por Teorema 1.2.6, $K(G) = L(G)$. Entonces, $G = K^2(G) = K(K(G)) = K(L(G))$. Por lo tanto $\chi(G) \leq 3$ si $F(L(G)) \leq 3$.

Veamos que $L(G)$ es una instancia de π_F . Es decir, veamos que $M(L(G)) \leq 2$, $L(G)$ no contiene diamantes y $\omega(L(G)) \leq 4$.

Si $M(L(G)) = M(K(G)) \geq 3$ entonces $K^2(G)$ contiene triángulos. Como $K^2(G) = G$ entonces G contiene triángulos lo que es una contradicción. Por lo tanto $M(L(G)) \leq 2$.

Si $L(G)$ contiene diamantes, entonces existen Q y Q' cliques de $L(G)$ tales que $|Q \cap Q'| \geq 2$. Luego, por Lemas 3.2.3 y 3.2.2 G contiene un triángulo lo cual es una contradicción.

Claramente, como $\Delta(G) \leq 4$, entonces $\omega(L(G)) \leq 4$.

Por lo tanto, como computar $L(G)$ para cualquier grafo G es polinomial, la función L es una transformación polinomial de instancias de π_χ a instancias de π_F . En conclusión, $\pi_F \in \mathcal{NP-C}$ ■

3.3. Transformación a un grafo perfecto

Por el Teorema 1.2.23 cualquier instancia G de π_F donde $F(G) \geq 3$ contiene un hole impar y por lo tanto posee un subgrafo inducido H no coordinado con $M(H) = 2$ (el hole impar). En esta sección presentamos una función llamada $C-3$ que transforma G en un grafo G' tal que $F(G) \leq 3 \iff F(G') \leq 3$, $M(G') = 3$ y G' no contiene holes impares. Luego, cualquier subgrafo inducido H de G' resultará coordinado si $F(G) \leq 3$ por Teorema 1.2.25.

La función $C-3$ consiste en reemplazar vértices de un conjunto por cambiadores de color “pegando” el cambiador al grafo en los conectores. Dependiendo del cambiador que se utilice para el reemplazo, el grafo G' cumplirá diferentes propiedades. Creemos que utilizando distintos cambiadores se pueden probar distintos resultados de complejidad en diferentes ocasiones. Más adelante instanciamos estos cambiadores en grafos concretos que nos permitan llegar a nuestro objetivo.

Empezamos probando un lema auxiliar que nos permitirá mostrar que la operación $C-3$ elimina todos los holes impares de un grafo no perfecto.

Lema 3.3.1 *Sea G un grafo que contiene como subgrafo inducido a H donde H cambia color entre v, w . Si $(V(H) \setminus \{v, w\})$ es anticompleto a $(V(G) \setminus V(H))$, $m_G(v) = m_G(w) = 3$ y v, w no tienen vecinos en común en $V(G) \setminus V(H)$ entonces todo hole impar de G que contiene algún vértice de H , contiene a v y a w .*

Demostración

Sea C un hole impar de G que contiene un vértice de $V(H)$. Como H es un cambiador, entonces

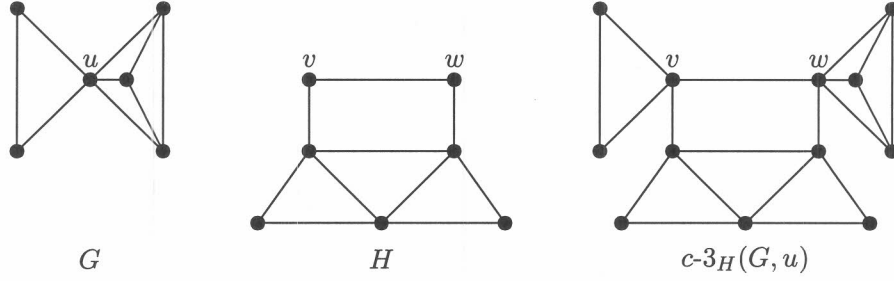


Figura 3.1: Ejemplo de una aplicación de la función $c-3_H$. A la izquierda se muestra el grafo G con un vértice u apropiado, en el centro un cambiador H con conectores v, w y a la derecha el grafo $c-3_H(G, u)$.

$V(C) \not\subseteq V(H)$. Pero entonces existe $u \in V(C) \cap (V(G) \setminus V(H))$, donde u es adyacente a un vértice de $V(H)$ que está en C . Como $(V(H) \setminus \{v, w\})$ es anticompleto a $(V(G) \setminus V(H))$, u no es adyacente a ningún vértice de $H \setminus \{v, w\}$, por lo tanto u es adyacente a v o a w . Podemos suponer que u es adyacente a v y en consecuencia que $v \in C$.

Como v, w no tienen vecinos en común en $V(G) \setminus V(H)$ entonces u no es adyacente a w . Además, como u no es adyacente a ningún vértice de $H \setminus \{v, w\}$, la arista (u, v) se encuentra en una clique Q donde $Q \subseteq (V(G) \setminus V(H)) \cup \{v\}$. Sea $z \neq u$ el otro vecino de v en C . Claramente $z \notin Q$ porque u, v, z son vértices consecutivos del hole C . En consecuencia, como $m_H(v) = 2$ (por ser H un cambiador) y $m_G(v) = 3$, $z \in V(H)$. Pero entonces $C \setminus \{v\}$ es un camino de u a z . Como $z \in V(H) \setminus \{v\}$, $u \in V(G) \setminus V(H)$ y $(V(H) \setminus \{v, w\})$ es anticompleto a $(V(G) \setminus V(H))$ entonces $w \in C$. ■

Definición: Sea G un grafo, decimos que $u \in V(G)$ es *apropiado* si $m(u) = 2$ y las dos cliques a las que pertenece u intersecan solo en u .

Observación: Cuando G no contiene diamantes y $M(G) \leq 2$ los vértices de G se particionan en apropiados y simpliciales. Por lo tanto, si G es una instancia de π_F , sus vértices se pueden particionar en apropiados y simpliciales.

Definición: Sea G un grafo, $u \in V(G)$ apropiado y H un cambiador con conectores v, w . Llamemos Q_1, Q_2 a las cliques que contienen a u . Definimos el grafo $c-3_H(G, u)$ como el grafo que se obtiene de agregar al grafo $G \setminus \{u\}$ el cambiador H ; haciendo que v sea completo a $Q_1 \setminus \{u\}$ y w completo a $Q_2 \setminus \{u\}$. No se agregan más aristas. Cuando no interese indicar cuál es el grafo H , se utilizará la notación $c-3(G, u)$.

En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de la aplicación de $c-3$.

Por definición, $V(c-3_H(G, u)) = V(H) \cup (V(G) \setminus \{u\})$. Vamos a llamar a los vértices de $V(c-3_H(G, u)) \cap V(G) = V(G) \setminus \{u\}$ *originales*, a los vértices de $V(c-3_H(G, u)) \cap (V(H) \setminus \{v, w\}) = V(H) \setminus \{v, w\}$ *agregados* y a $\{v, w\}$ *conectores*. Claramente los vértices originales, agregados y conectores forman una partición de $V(c-3_H(G, u))$.

La siguiente propiedad es consecuencia directa de la definición de $c-3$ y la enunciamos sin demostración.

Lema 3.3.2 Sea G un grafo, $u \in V(G)$ apropiado donde Q_1, Q_2 son las cliques que contienen a u . Llamemos $J = c-3_H(G, u)$ para algún cambiador H con conectores v, w . Entonces $\mathcal{Q}(J) =$

$(\mathcal{Q}(G) \setminus \{Q_1, Q_2\}) \cup \mathcal{Q}(H) \cup \{R(Q_1), R(Q_2)\}$, donde $R(Q_1) = (Q_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ y $R(Q_2) = (Q_2 \setminus \{u\}) \cup \{w\}$.

En vista de la propiedad 3.3.2, vamos a llamar a las cliques de acuerdo a si existían en G o en H o si son nuevas. A las cliques $R(Q_1), R(Q_2)$ las llamamos cliques *reemplazo* de Q_1, Q_2 respectivamente. A las cliques de $\mathcal{Q}(G) \setminus \{Q_1, Q_2\} = \mathcal{Q}(J) \cap \mathcal{Q}(G)$ las llamamos *originales*. A las cliques $\mathcal{Q}(H)$ las llamamos *agregadas*. Por lo tanto las cliques de J se particionan en originales, agregadas y reemplazo.

Las siguientes propiedades son todas corolario del Lema 3.3.2

Lema 3.3.3 Sea G un grafo, $u \in V(G)$ apropiado y llamemos $J = c-3_H(G, u)$ para algún cambiador H con conectores v, w . Llamemos además Q_1, Q_2 a las cliques que contienen a u . Entonces,

1. el conjunto de vértices originales es anticompleto al conjunto de vértices agregados.
2. $N(v) \cap N(w) \cap V(G) = \emptyset$, es decir, v y w no tienen vecinos en común en $V(G)$.
3.
 - $m_J(v) = m_J(w) = 3$;
 - $m_J(z) = m_G(z)$ para todo vértice z original;
 - $m_J(z) = m_H(z)$ para todo vértice z agregado.
4.
 - $d_J(v) = d_H(v) + |Q_1| - 1$ y $d_J(w) = d_H(w) + |Q_2| - 1$;
 - $d_J(z) = d_G(z)$ para todo vértice z original;
 - $d_J(z) = d_H(z)$ para todo vértice z agregado.
5. $\omega(J) = \max(\omega(H), \omega(G))$

Corolario 3.3.4 Sea G un grafo y u, z vértices apropiados de G . Entonces z es un vértice apropiado de $c-3(G, u)$.

Demostración

Es corolario del ítem 3 del Lema 3.3.3 y del Lema 3.3.2 ■

Antes de mostrar las propiedades importantes que cumple $c-3$, vamos a describir informalmente la función $C-3$ para que resulte más claro qué objetivo se persigue con la operación $c-3$.

Sea G un grafo, $C-3(G)$ es el resultado de aplicar la función $c-3$ iterativamente a todos los vértices apropiados de G . Más adelante definimos la función $C-3$ con mayor rigurosidad.

Dado el carácter iterativo de la función $C-3$, los lemas a continuación sirven para mostrar las propiedades de $C-3$.

Lema 3.3.5 Sean G un grafo, $u \in V(G)$ apropiado y llamemos $J = c-3(G, u)$. Entonces $F(G) \leq 3$ sii $F(J) \leq 3$.

Demostración

Sea H el cambiador utilizado en $c-3(G, u)$ y llamemos $\{v, w\}$ a los conectores de H . Sean Q_1, Q_2 las cliques de G a las que pertenece u . Llamemos Q_1^v, Q_2^v a las cliques de H que contienen a v y Q_1^w, Q_2^w a las cliques de H que contienen a w .

$\Rightarrow$) Sea x_G un 3-coloreo de $K(G)$ y x_H un 3-coloreo de $K(H)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_G(Q_1) = 1$, $x_G(Q_2) = 2$. También podemos suponer que $x_H(Q_1^v) = 2$, $x_H(Q_2^v) = 3$ y que $x_H(Q_1^w) = 1$, $x_H(Q_2^w) = 3$ ya que cumple la definición de cambiador.

Sea x_J el coloreo de $K(J)$ definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_J(R(Q_1)) &= x_G(Q_1) \\ x_J(R(Q_2)) &= x_G(Q_2) \\ x_J(S) &= x_G(S) && \text{para toda clique } S \text{ original} \\ x_J(S) &= x_H(S) && \text{para toda clique } S \text{ agregada} \end{aligned}$$

Veamos que x_J es un coloreo válido de $K(J)$. Claramente x_J se encuentra bien definido porque por Lema 3.3.2 las cliques de J se particionan en originales, agregadas y reemplazo. Sean $S_1 \neq S_2$ dos cliques de J con $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Por el ítem 1 del Lema 3.3.3 las cliques originales no intersecan las cliques agregadas. Como u es apropiado $Q_1 \cap Q_2 = \{u\}$, entonces por Lema 3.3.2 $R(Q_1) \cap R(Q_2) = \emptyset$. Además, por Lema 3.3.2, $R(Q_i)$ interseca a una clique original S en J sii Q_i interseca a S en G para $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto hay seis casos:

A) S_1 y S_2 son ambas agregadas, B) S_1 y S_2 son ambas originales C) $S_1 = R(Q_1)$ y $S_2 \cap Q_1 \neq \emptyset$ D) $S_1 = R(Q_2)$ y $S_2 \cap Q_2 \neq \emptyset$ E) $S_1 = R(Q_1)$ y $v \in S_2$ y F) $S_1 = R(Q_2)$ y $w \in S_2$.

Por definición de x_J , como x_G y x_H son coloreos válidos, en los casos A), B), C) y D) $x_J(S_1) \neq x_J(S_2)$. Por como tomamos x_G y x_H , $x_J(R(Q_1)) = x_G(Q_1) \neq x_H(Q_1^v)$ y $x_J(R(Q_1)) = x_G(Q_1) \neq x_H(Q_2^v)$; entonces en el caso E), $x_J(S_1) \neq x_J(S_2)$. El caso F) es análogo al E) cambiando v por w .

$\Leftarrow$) Sea x_J un 3-coloreo válido de $K(J)$. Sea x_H el coloreo que se obtiene restringiendo el dominio de x_J a las cliques agregadas. Por Lema 3.3.2 x_H es un 3-coloreo de H . Claramente x_H es válido, ya que sino hay dos cliques agregadas de J que intersecan y tienen el mismo color. Entonces, por definición de cambiador, podemos suponer que $x_H(Q_1^v) = 2$, $x_H(Q_2^v) = 3$ y que $x_H(Q_1^w) = 1$, $x_H(Q_2^w) = 3$.

Como x_J es válido y $R(Q_1) \cap Q_1^v \cap Q_2^v = \{v\}$ entonces $x_J(R(Q_1)) = 1$. De la misma forma, $x_J(R(Q_2)) = 2$ Sea x_G el coloreo de $K(G)$ definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_G(Q_1) &= x_J(R(Q_1)) \\ x_G(Q_2) &= x_J(R(Q_2)) \\ x_G(S) &= x_J(S) && \text{para toda clique } S \text{ original} \end{aligned}$$

Veamos que x_G es un coloreo válido de $K(G)$. Claramente x_G se encuentra bien definido porque por Lema 3.3.2 las cliques de G son las cliques originales de J más las cliques $\{Q_1, Q_2\}$, es decir, $\mathcal{Q}(G) = (\mathcal{Q}(J) \cap \mathcal{Q}(G)) \cup \{Q_1, Q_2\}$. Sean $S_1 \neq S_2$ dos cliques de G con $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Si S_1 y S_2 son originales, entonces $x_G(S_1) \neq x_G(S_2)$ porque x_J es válido. Si S_1 es original y $S_2 = Q_1$, como $m_G(u) = 2$ y $u \in Q_1 \cap Q_2$, entonces $u \notin S_1 \cap S_2$. Pero entonces $S_1 \cap S_2 \subseteq V(J)$ y por lo

tanto $x_G(S_1) \neq x_G(S_2)$ porque x_J es válido. Lo mismo vale cuando $S_2 = Q_2$. Por último cuando $S_1 = Q_1$ y $S_2 = Q_2$, $x_G(Q_1) = x_J(R(Q_1)) = 1 \neq 2 = x_J(R(Q_2)) = x_G(Q_2)$. Por lo tanto x_G es un 3-coloreo válido de $K(G)$. ■

Lema 3.3.6 Sean G un grafo, $u \in V(G)$ apropiado y llamemos $J = c\text{-}3_H(G, u)$ para algún cambiador H con conectores v, w . Si G y H no contienen gems entonces J no contiene gems.

Demostración

Supongamos que J contiene un gem L con $V(L) = \{l, l_1, l_2, l_3, l_4\}$ donde l es universal en L y l_1, l_2, l_3, l_4 inducen un camino en ese orden. Llamemos Q_1, Q_2 a las cliques de G que contienen a u donde $v \in R(Q_1)$ y $w \in R(Q_2)$.

Caso 1: l es original. Por el ítem 1 del Lema 3.3.3 l no es adyacente a ningún vértice agregado. Por lo tanto $V(L) \subseteq V(G) \cup \{v, w\}$. Por hipótesis $V(L) \not\subseteq V(G)$ y por lo tanto podemos suponer que $v \in \{l_1, \dots, l_4\}$.

Por el ítem 2 del Lema 3.3.3 $N(v) \cap N(w) \cap V(G) = \emptyset$ y por lo tanto $w \notin V(L)$. En consecuencia $V(L) \subseteq V(G) \cup \{v\}$.

Sea $a \in V(L)$ no adyacente a v . Por Lema 3.3.2 un vértice original es adyacente a v en J si pertenece a $R(Q_1)$ en J y a Q_1 en G . Por lo tanto $l \in Q_1$ en G . Si a es adyacente a u en G entonces $\{a, u, l\}$ forman un completo en G . Como u es apropiado, entonces $m_G(u) = 2$ y como a no es adyacente a v entonces $a, u, l \in Q_2$. Por lo tanto $u, l \in Q_1 \cap Q_2$ lo que contradice el hecho de que $Q_1 \cap Q_2 = \{u\}$. Esta contradicción surge de suponer que a no es adyacente a v y es adyacente a u .

Por lo tanto $V(L) \cap N_G(u) \subseteq V(L) \cap N_J(v)$ y como $N_J(v) \cap V(G) \subseteq N_G(u)$ entonces $V(L) \cap N_G(u) = V(L) \cap N_J(v)$. Luego $(L \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ induce un gem en G , lo que es una contradicción.

Caso 2: l no es original. Por hipótesis $V(L) \not\subseteq V(H)$, por lo tanto $V(L) \cap V(G) \neq \emptyset$. Por el ítem 1 del Lema 3.3.3 $V(H) \setminus \{v, w\}$ es anticompleto a $V(G) \setminus \{u\}$. Por lo tanto podemos suponer $l = v$.

Los vecinos de v en G forman un completo, por lo tanto $\{l_1, \dots, l_4\} \not\subseteq V(G)$. Entonces existen dos vértices adyacentes $a, b \in \{l_1, \dots, l_4\}$ donde $a \in V(H)$ y $b \in V(G)$. Como $V(H) \setminus \{v, w\}$ es anticompleto a $V(G) \setminus \{u\}$, entonces $b = w$. Por lo tanto v, w, a inducen un triángulo lo que contradice el ítem 2 del Lema 3.3.3 que dice que $N_J(v) \cap N_J(w) \cap V(G) = \emptyset$. ■

Ahora estamos listos para probar las propiedades de $C\text{-}3$. Primero vamos a dar la definición formal de $C\text{-}3$.

Definición: Sea G un grafo, $U = \{u_1, \dots, u_{|U|}\}$ el conjunto de vértices apropiados de G y $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_{|U|}\}$ una familia de cambiadores. Definimos $C\text{-}3_{\mathcal{H}}(G) = G^{|U|}$ donde:

$$\begin{aligned} G^0 &= G \\ G^{i+1} &= c\text{-}3_{H_{i+1}}(G^i, u_{i+1}) \quad (0 \leq i \leq |U| - 1) \end{aligned}$$

Por el corolario 3.3.4 esta operación esta bien definida.

Vamos a utilizar la notación $C-3(G)$ cuando no importe la familia $\mathcal{H}$. Por otra parte, de aquí en más vamos a suponer que $|\mathcal{H}| = |U|$. Cuando hablemos de la i -ésima aplicación de $c-3$ vamos a suponer que $1 \leq i \leq |U|$ sin aclararlo explícitamente.

Extendemos la definición de conectores, agregados y originales. Decimos que: v es conector si v es conector de algún H_i ; v es agregado si $v \in V(H_i)$ y v no es conector para algún i ; decimos que v es original si $v \in V(G) \cap V(C-3_{\mathcal{H}}(G)) = V(G) \setminus U$. Claramente los vértices de $C-3_{\mathcal{H}}(G)$ se particionan en originales, agregados y conectores.

Observación: Si G es una instancia de π_F como sus vértices se pueden particionar en apropiados o simpliciales entonces $C-3(G)$ contiene únicamente vértices simpliciales, agregados o conectores por el ítem 3 del Lema 3.3.3.

Las siguientes propiedades son consecuencias de los Lemas 3.3.2 y 3.3.3 aplicados iterativamente con cada aplicación $c-3$.

Lema 3.3.7 Sea G un grafo, $\{u_1, \dots, u_p\}$ su conjunto de vértices apropiados y $J = C-3_{\mathcal{H}}(G)$ para alguna familia $\{H_1, \dots, H_p\}$ de cambiadores. Sea $1 \leq i \leq p$, llamemos $H = H_i$, v, w a sus conectores y Q_1, Q_2 a las cliques de G que contienen a u_i . Entonces,

1. $V(H) \setminus \{v, w\}$ es anticompleto a $V(J) \setminus V(H)$.
2. $N_J(v) \cap N_J(w) \cap (V(J) \setminus V(H)) = \emptyset$, es decir, v y w no tienen vecinos en común fuera de H .
3. $N_J(v) \setminus (V(J) \setminus V(H))$ y $N_J(w) \setminus (V(J) \setminus V(H))$ inducen completos. Es decir, los vecinos de v (w) en J que no están en H inducen un completo.
4. $\omega(J) = \max(\omega(G), \max_{H \in \mathcal{H}}(\omega(H)))$
5.
 - $m_J(z) = m_G(z)$ para todo vértice z original
 - $m_J(z) = m_H(z)$ para todo vértice $z \in V(H)$ agregado
 - $m_J(v) = m_J(w) = 3$
6.
 - $d_J(z) = d_G(z)$ para todo vértice z original
 - $d_J(z) = d_H(z)$ para todo vértice $z \in V(H)$ agregado
 - $d_J(v) = d_H(v) + |Q_1| - 1$ y $d_J(w) = d_H(w) + |Q_2| - 1$

Los siguientes son corolarios del Lema 3.3.7 aplicados al caso donde G es una instancia de π_F . No damos las demostraciones porque son directos, recordando que los vértices de $C-3_{\mathcal{H}}(G)$ se particionan en agregados, conectores y simpliciales.

Lema 3.3.8 Sea G una instancia de π_F y llamemos $J = C-3(G)$. Entonces $M(J) \leq 3$.

Lema 3.3.9 Sea G una instancia de π_F y $J = C-3_{\mathcal{H}}(G)$ para alguna familia $\mathcal{H}$ de cambiadores. Si $\omega(H) \leq 3$ para todo $H \in \mathcal{H}$, entonces $\omega(J) \leq 4$ y ningún vértice agregado pertenece a una clique de cardinal 4.

Lema 3.3.10 *Sea G una instancia de π_F y $J = C-3_{\mathcal{H}}(G)$ para alguna familia $\mathcal{H}$ de cambiadores. Si para todo $H \in \mathcal{H}$ con conectores v, w ocurre que $\Delta(H) \leq 4$, $d_H(v) \leq 2$, $d_H(w) \leq 2$ y $\omega(H) \leq 4$, entonces $\Delta(J) \leq 5$ y para todo vértice z agregado o simplicial $d_J(z) \leq 4$.*

Lema 3.3.11 *Sea G una instancia de π_F y llamemos $J = C-3(G)$. Entonces $F(G) \leq 3$ sii $F(J) \leq 3$.*

Demostración

Es corolario del Lema 3.3.5 aplicándolo en forma iterativa con cada aplicación de $c-3$ ■

Lema 3.3.12 *Sea G una instancia de π_F y $J = C-3_{\mathcal{H}}(G)$ para alguna familia $\mathcal{H}$ de cambiadores. Si ningún $H \in \mathcal{H}$ contiene gems entonces J tampoco contiene gems.*

Demostración

Es corolario del Lema 3.3.6 aplicándolo en forma iterativa con cada aplicación de $c-3$, teniendo en cuenta que G no contiene gems (por ser instancia de π_F). ■

Lema 3.3.13 *Sea G una instancia de π_F , $J = C-3_{\mathcal{H}}(G)$ para alguna familia $\mathcal{H}$ de cambiadores y $k \geq 4$. Si para todo $H \in \mathcal{H}$, llamando a sus conectores v, w , ocurre que:*

- H no contiene holes de longitud k y
- todo camino entre v y w (en H) tiene longitud mayor a k

entonces J no contiene holes de longitud k .

Demostración

Los vértices de J se pueden particionar en agregados, conectores y simpliciales. Claramente los vértices simpliciales no pertenecen a ningún hole. Supongamos que J contiene un hole C de longitud k .

Llamemos v_i, w_i a los conectores de H_i para algún i . Supongamos que $v_i, w_i \in C$. Entonces C se puede particionar en dos caminos P_1, P_2 con interior disjunto entre v_i y w_i . Por el ítem 3 del Lema 3.3.7 las vecindades de v_i y w_i en $V(J) \setminus V(H_i)$ inducen completos, entonces a lo sumo uno de los dos vecinos de v_i en C no pertenece a H_i . Por lo tanto podemos suponer que $P_1 \subseteq H_i$. Pero como todo camino entre v_i, w_i en H_i tiene longitud mayor a k entonces C tiene longitud mayor a k lo que es un absurdo. En conclusión, a lo sumo uno de v_i, w_i pertenece a C .

Supongamos que existe un vértice agregado $z \in V(C) \cap V(H_i)$ para algún i . Como H_i no contiene holes de longitud k entonces $C \not\subseteq V(H_i)$. Entonces existe $u \in (C \setminus V(H_i))$. Por lo tanto existen dos caminos $P_1, P_2 \subseteq C$ desde u a z con interior disjunto. Como $V(H_i) \setminus \{v_i, w_i\}$ es anticompleto a $V(J) \setminus V(H_i)$ por el ítem 1 del Lema 3.3.7, entonces $v_i \in P_1$ y $w_i \in P_2$ o viceversa. Pero entonces $v_i, w_i \in C$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $z \notin C$ para todo vértice agregado.

Entonces todo vértice de C es conector. Sea $v \in C$ y H el cambiador tal que $v \in V(H)$. Por el ítem 3 del Lema 3.3.7 el vecindario de v en $N_J(v) \setminus V(H)$ es completo para todo $v \in C$ por ser v conector. Pero entonces toda terna de vértices a, b, c consecutivos en C forman un completo y se concluye que C no es un hole. Absurdo que provino de suponer que C es un hole de longitud k . ■

Para cerrar esta sección, demostraremos el lema más importante, que enuncia que C -3 elimina los holes impares. Y luego haremos un resumen de las propiedades de C -3 instanciando $\mathcal{H}$.

Lema 3.3.14 *Sea G una instancia de π_F . Entonces $J = C\text{-}3(G)$ no contiene holes impares.*

Demostración

Los vértices de J se pueden particionar en agregados, conectores y simpliciales. Claramente los vértices simpliciales no pertenecen a ningún hole. Supongamos que J contiene un hole impar C .

Llamemos v_i, w_i a los conectores de H_i para todo i . Por el ítem 1 del Lema 3.3.7 $V(H_i) \setminus \{v_i, w_i\}$ es anticompleto a $V(J) \setminus V(H_i)$. Además, por el ítem 2 del Lema 3.3.7, v_i y w_i no tienen vecinos en común en $V(J) \setminus V(H_i)$. Por último, por el ítem 5 del Lema 3.3.7, $m_J(v_i) = m_J(w_i) = 3$. Por lo tanto por Lema 3.3.1 todo hole impar que contiene algún vértice de $V(H_i)$ contiene a v_i y a w_i .

Sean entonces $\{i_1, \dots, i_k\}$ el conjunto de índices tales que $C \cap V(H_{i_j}) \neq \emptyset$ para todo $1 \leq j \leq k$. Entonces C contiene a v_{i_j} y w_{i_j} . Por el ítem 3 del Lema 3.3.7 los vecindarios de v_i, w_i en $V(J) \setminus V(H_i)$ forman completos. Como además, $V(H_i) \setminus \{v_i, w_i\}$ es anticompleto a $V(J) \setminus V(H_i)$, entonces todos los vértices de $C \cap V(H_{i_j})$ inducen un camino P_{i_j} en C entre v_{i_j} y w_{i_j} . Por lo tanto C se puede particionar en $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ donde existe una única arista entre P_{i_j} y $P_{i_{j+1}}$ (entendido modulo k) para todo $1 \leq j \leq k$. Esta arista tiene sus extremos en el conjunto de vértices $\{v_{i_j}, w_{i_j}, v_{i_{j+1}}, w_{i_{j+1}}\}$.

Todos los caminos P_{i_j} son impares por la propiedad 4 de la definición de cambiador. Por lo tanto C es par (independientemente de la paridad de k). Absurdo porque C es un hole impar. ■

Definición: Sea $\mathcal{G}$ la clase de grafos donde $G \in \mathcal{G}$ sii:

- G no contiene holes impares, gems ni C_4 .
- $M(G) \leq 3$, $\omega(G) \leq 4$, $\Delta(G) \leq 5$,
- todos los vértices de grado 5 pertenecen a una clique de tamaño 4.
- Para toda clique Q con $|Q| = 4$ no existe un vértice $w \notin Q$ que tenga dos vecinos en Q .

Definición: El grafo GC es un grafo con $V(GC) = \{c_1, \dots, c_{21}\} \cup \{d_1, \dots, d_{16}\}$ donde $\{c_1, \dots, c_{21}\}$ es un ciclo, $\{c_1, c_{12}, c_{17}\}$ inducen un triángulo; d_1, d_2 son ambos adyacentes a c_2, c_3 ; d_3, d_4 son ambos adyacentes a c_5, c_6 ; d_5, d_6 son ambos adyacentes a c_7, c_8 ; d_7, d_8 son ambos adyacentes a c_{10}, c_{11} ; d_9, d_{10} son ambos adyacentes a c_{13}, c_{14} ; d_{11}, d_{12} son ambos adyacentes a c_{15}, c_{16} ; d_{13}, d_{14} son ambos adyacentes a c_{18}, c_{19} ; d_{15}, d_{16} son ambos adyacentes a c_{20}, c_{21} . No hay otras aristas en el grafo. Ver figura 3.2.

A partir de ahora vamos a llamar v al vértice c_4 y w al vértice c_9 . Es fácil ver que GC es perfecto (teniendo en cuenta que GC no tienen holes impares y que los antiholes impares de longitud

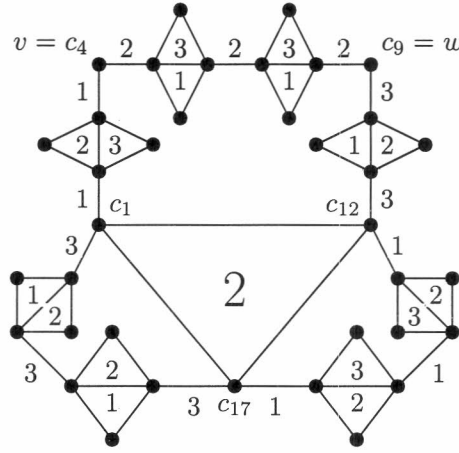


Figura 3.2: Grafo GC . Se muestra un 3-coloreo de $K(GC)$ que es esencialmente único.

mayor a 5 contienen un gem y GC no) y que los dos caminos inducidos entre v y w son impares. En la figura 3.2 se muestra un 3-coloreo de $K(GC)$ que es esencialmente único. Cualquier otro 3-coloreo de $K(GC)$ se obtiene intercambiando los colores de las dos cliques de algunos diamantes y luego permutando colores.

Observación: Por lo dicho en el párrafo anterior, GC es un cambiador con conectores v, w . Notar también que GC no contiene gems ni C_4 y que todo camino entre v y w tiene longitud mayor a 4.

Sea $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_{|\mathcal{H}|}\}$ una familia de cambiadores tal que $H_i = H_j$ para todo i, j . Definimos $C\text{-}3_{H_1} = C\text{-}3_{\mathcal{H}}$. Es decir, $C\text{-}3_H$ utiliza siempre el mismo cambiador.

Lema 3.3.15 Sea G una instancia de π_F . Entonces $J = C\text{-}3_{GC}(G) \in \mathcal{G}$.

Demostración

El grafo J no contiene holes impares por Lema 3.3.14. Por Lema 3.3.8 $M(J) \leq 3$. Por Lema 3.3.12 J no contiene gems. Como GC no contiene C_4 y todo par de caminos entre sus conectores tiene longitud mayor a 4, entonces por Lema 3.3.13 J no contiene C_4 .

Como $\omega(GC) \leq 3$ entonces, por Lema 3.3.9, $\omega(J) \leq 4$ y ningún vértice agregado pertenece a una clique de tamaño 4.

Como $\Delta(GC) \leq 4$, $d_{GC}(v) \leq 2$, $d_{GC}(w) \leq 2$ y $\omega(GC) \leq 4$ entonces por Lema 3.3.10, $\Delta(J) \leq 5$ y para todo vértice z agregado o simplicial $d_J(z) \leq 4$. Por lo tanto todos los vértices de grado 5 son conectores. Además, como $d_{GC}(v) \leq 2$ y sus vecinos fuera del cambiador forman un completo por el ítem 3 del Lema 3.3.7, entonces todos los vértices de grado 5 pertenecen a una clique de tamaño 4.

Llamemos GC_i a la i -ésima copia de GC utilizada en $C\text{-}3_{GC}$; y v_i y w_i a sus conectores.

Sea Q una clique con $|Q| = 4$. Por Lema 3.3.9 Q está formada únicamente por conectores y simpliciales. Supongamos que hay un vértice $u \notin Q$ que tiene dos vecinos en Q . Claramente los dos vecinos no son simpliciales y por lo tanto son conectores, digamos v_i y w_j . Como v_i no es

adyacente a w_i en GC , entonces v_i no es adyacente a w_i en J . Por lo tanto $i \neq j$ (es decir, fueron agregados en distintas iteraciones). Entonces, como u es vecino de conectores de distintas aplicaciones de $c-3$, por el ítem 1 del Lema 3.3.7, u no es agregado. Entonces, la vecindad de v_i en $V(J) \setminus V(GC_i)$ no es un completo, contradiciendo el ítem 3 del Lema 3.3.7. ■

Lema 3.3.16 *Dado un cambiador H , $C-3_H(G)$ se puede calcular en tiempo polinomial para todo grafo G .*

Demostración

H es un grafo fijo y constante para la función $C-3_H$. No forma parte de la entrada. Por lo tanto, el tamaño de H es constante con respecto a la entrada (ya que H es constante).

Sea u apropiado en G . Claramente el cálculo de $c-3_H(G, u)$ es de tiempo polinomial porque consiste en reemplazar u por un conjunto polinomial de vértices y aristas (los vértices y aristas del grafo H y las aristas entre los vecinos de u en G y los conectores de H).

Determinar si u es apropiado también puede hacerse en tiempo polinomial, revisando $N_G(u)$. Por lo tanto, calcular el conjunto U de vértices apropiados es polinomial y el cálculo de $C-3_H(G)$ es polinomial. ■

3.4. Complejidad del problema π_C

Si bien ya estamos en condiciones de probar que el problema de determinar si un grafo es coordinado restringido a la clase de grafos $\mathcal{G}$ es NP-Completo, todavía no podemos probar que $\pi_C \in \mathcal{NP-C}$.

Definición: Llamamos $\mathcal{F}$ a la clase de grafos que son instancias de π_C . Es decir, $\mathcal{F}$ es la clase de grafos G donde

- G no contiene holes impares, gems ni C_4 y
- $M(G) \leq 3$, $\omega(G) \leq 3$, $\Delta(G) \leq 4$

En esta sección presentamos una función llamada $M-3$ que transforma un grafo $G \in \mathcal{G}$ a otro $H \in \mathcal{F}$. La idea es reemplazar cada clique Q de tamaño 4 de G por un mantenedor cuyos conectores sean los vértices de Q . De esta forma, veremos que $F(G)$ cumple una propiedad análoga a la del Lema 3.3.11. Por otra parte, buscamos que $M-3$ no genere holes impares, estableciendo una analogía con el hecho de que $C-3$ los eliminaba.

Definición: Sea G un grafo y Q una clique de G . Decimos que Q es *apropiada* si $|Q| = 4$ y para todo vértice $w \notin Q$, w tiene a lo sumo un vecino en Q .

Definición: Sea G un grafo, $Q = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una clique apropiada de G y H un mantenedor con conectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Definimos el grafo $J = m-3_H(G, Q)$ como el grafo que se obtiene de reemplazar Q por H . Es decir, $J = (V(J), E(J))$ con $V(J) = V(G) \cup V(H)$ y $E(J) = (E(G) \setminus E(Q)) \cup E(H)$. Cuando no interese identificar quien es H , notaremos simplemente $m-3(G, Q)$.

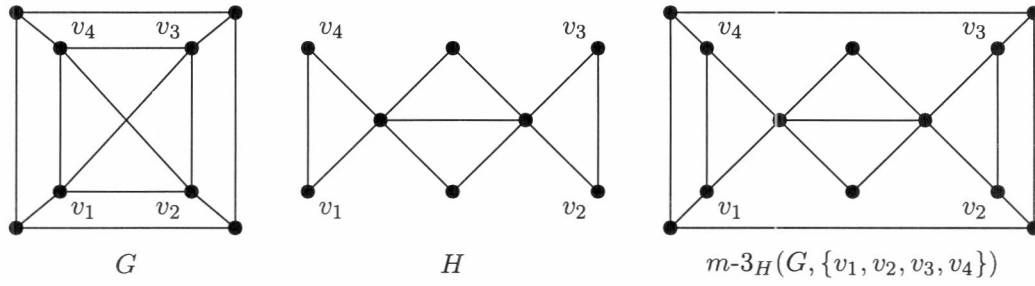


Figura 3.3: Ejemplo de una aplicación de la función $m-3_H$. A la izquierda se muestra el grafo G con una clique $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ apropiada, en el centro un cambiador H con conectores v_1, v_2, v_3, v_4 y a la derecha el grafo $m-3_H(G, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$.

En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de la aplicación de $m-3$.

Esta función es parecida a $c-3$. Notar que a diferencia de $c-3$, no solo $V(H) \subseteq V(m-3(G, Q))$, sino que también $V(Q) \subseteq V(m-3(G, Q))$. A los vértices de $V(G) \setminus V(Q)$ los llamamos *originales*, a los vértices de $V(H) \setminus V(Q)$ los llamamos *agregados* y a los vértices de $V(Q)$ los llamamos *conectores*.

Observación: Sea $G \in \mathcal{G}$. Entonces todas las cliques de tamaño 4 son apropiadas.

La siguiente propiedad es sencilla de probar y la incluimos sin demostración.

Lema 3.4.1 Sea G un grafo, Q una clique apropiada de G y $J = m-3_H(G, Q)$ para algún mantenedor H con conectores $V(Q)$. Entonces, $\mathcal{Q}(J) = (\mathcal{Q}(G) \setminus Q) \cup \mathcal{Q}(H)$.

Vamos a llamar a todas las cliques de $\mathcal{Q}(J) \cap \mathcal{Q}(G) = \mathcal{Q}(G) \setminus Q$ *originales* y a las cliques de $\mathcal{Q}(J) \cap \mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}(H)$ *agregadas*. Las siguientes propiedades son corolarios directos del Lema 3.4.1

Lema 3.4.2 Sea G un grafo, Q una clique apropiada de G y $J = m-3_H(G, Q)$ para algún mantenedor H con conectores $V(Q)$. Entonces,

1. el conjunto de vértices originales es anticompleto al conjunto de vértices agregados.
2. si $Q' \neq Q$ es apropiada en G , entonces Q' es apropiada en J .
3.
 - $m_J(v) = m_G(v)$ para todo vértice v original o conector,
 - $m_J(v) = m_H(v)$ para todo vértice v agregado.
4. $\omega(J) \leq \max(\omega(G), \omega(H))$
5.
 - $d_J(v) = d_G(v) + d_H(v) - (|Q| - 1)$ para todo vértice v conector.
 - $d_J(u) = d_G(u)$ para todo vértice u original.
 - $d_J(u) = d_H(u)$ para todo vértice u agregado.

Lema 3.4.3 Sea G un grafo, Q una clique apropiada de G y $J = m-3(G, Q)$. Entonces $F(G) \leq 3$ sii $F(J) \leq 3$.

Demostración

Llamemos H al mantenedor utilizado. Llamemos $Q = \{v_1, \dots, v_4\}$ y $Q_1, \dots, Q_4$ (no necesariamente distintas) a las cliques de H a las que pertenecen $v_1, \dots, v_4$ respectivamente. Recordar que como H es un mantenedor, $m_H(v_1) = \dots = m_H(v_4) = 1$.

$\Rightarrow$) Sea x_G un 3-coloreo de $K(G)$ y x_H un 3-coloreo de $K(H)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_G(Q) = 1$. También podemos suponer que $x_H(Q_1) = \dots = x_H(Q_4) = 1$, por la definición de mantenedor.

Sea x_J el coloreo de $K(J)$ definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_J(S) &= x_G(S) && \text{para toda clique } S \text{ original} \\ x_J(S) &= x_H(S) && \text{para toda clique } S \text{ agregada} \end{aligned}$$

Veamos que x_J es un coloreo válido de $K(J)$. Claramente x_J se encuentra bien definido porque por Lema 3.4.1 las cliques de J se particionan en originales y agregadas. Sean $S_1 \neq S_2$ dos cliques de J con $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Por el ítem 1 del Lema 3.4.2 no hay aristas entre los vértices agregados y los originales. Por lo tanto hay tres casos: A) S_1 y S_2 son ambas originales, B) S_1 y S_2 son ambas agregadas C) existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $S_1 = Q_i$ y $v_i \in S_2$ donde S_2 es una clique original (o viceversa, que es un caso análogo).

Por definición de x_J , como x_G y x_H son coloreos válidos, en los casos A) y B), $x_J(S_1) \neq x_J(S_2)$. Sea $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por como tomamos x_G y x_H , $x_G(Q) = x_H(Q_i)$; entonces en el caso C), como $S_1 \neq S_2$ y $v_i \in Q \cap S_2$ entonces $x_J(S_1) = x_G(Q) \neq x_G(S_2) = x_J(S_2)$.

$\Leftarrow$) Sea x_J un 3-coloreo válido de $K(J)$. Llamemos x_H al coloreo x_J restringido el dominio a las cliques agregadas. Por Lema 3.4.1 x_H es un 3-coloreo de $K(H)$. Claramente x_H es válido, ya que sino hay dos cliques agregadas de J que intersecan y tienen el mismo color. Entonces, por definición de mantenedor, podemos suponer que $x_H(Q_1) = \dots = x_H(Q_4) = 1$ (lo que implica que $x_J(Q_1) = \dots = x_J(Q_4) = 1$).

Sea x_G el coloreo de $K(G)$ definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_G(S) &= x_J(S) && \text{para toda clique } S \text{ original} \\ x_G(Q) &= 1 \end{aligned}$$

Veamos que x_G es un coloreo válido de $K(G)$. Claramente x_G se encuentra bien definido porque por Lema 3.4.1 las cliques de G son las cliques originales de J más la clique Q . Sean $S_1 \neq S_2$ dos cliques de G con $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Si S_1 y S_2 son originales, entonces $x_G(S_1) \neq x_G(S_2)$ porque x_J es válido. Si S_1 es original y $S_2 = Q$, como $S_1 \cap Q \neq \emptyset$, entonces existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $v_i \in S_1 \cap Q$. Luego $S_1 \cap Q_i \neq \emptyset$, y como x_J es válido, entonces $x_J(S_1) \neq x_J(Q_i) = 1 = x_G(Q)$. Por lo tanto x_G es un 3-coloreo válido de $K(G)$. ■

Lema 3.4.4 *Sea G un grafo, Q una clique apropiada de G y $J = m\text{-}3_H(G, Q)$ para algún mantenedor H con conectores $V(Q)$. Si ni G ni H contienen gems, entonces J tampoco contiene gem.*

Demostración

Supongamos que J contiene un gem L donde $V(L) = \{l, l_1, l_2, l_3, l_4\}$ donde l es universal en L y l_1, l_2, l_3, l_4 inducen un camino en ese orden. Llamemos $\{v_1, \dots, v_4\}$ a los vértices de Q .

Caso 1: l es agregado. Por el ítem 1 del Lema 3.4.2 no hay aristas entre los vértices agregados y los originales. Por lo tanto $l_i \in V(H)$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Se concluye entonces que $V(L) \subseteq V(H)$, es decir, L induce un gem en H lo que es un absurdo.

Caso 2: l es original. En forma análoga al caso anterior, se prueba que $V(L) \subseteq V(G)$. Luego, si a lo sumo un vértice de $l_1, \dots, l_4$ es conector, los vértices de $V(L)$ inducen un gem en G , lo cual es una contradicción. Si al menos dos de los vértices $l_1, \dots, l_4$ son conectores, entonces l es adyacente a dos vértices de Q , lo que contradice que Q sea apropiada.

Caso 3: l es conector. Claramente existe $1 \leq i \leq 4$ tal que $l_i \notin Q$ (porque $|Q| = 4$). Si $l_j \in Q$ para $1 \leq j \leq 4$ entonces existe al menos un triángulo inducido T de L donde $l \in T$ y $|Q \cap T| = 2$ contradiciendo el hecho de que Q es apropiada. Por lo tanto ningún vértice de $\{l_1, \dots, l_4\}$ es conector. Por el ítem 1 del Lema 3.4.2 no hay aristas entre los vértices agregados y los originales. Entonces los vértices de $\{l_1, \dots, l_4\}$ son todos originales o todos agregados. Se concluye entonces que L induce un gem en G o L induce un gem en H lo que es una contradicción. ■

Lema 3.4.5 *Sea $G \in \mathcal{G}$, $\mathcal{Q}$ el conjunto de cliques apropiadas de G y $Q \in \mathcal{Q}$. Llamemos $J = m\text{-}3_H(G, Q)$ para algún mantenedor H con conectores $V(Q)$. Si $\omega(H) \leq 3$, H no contiene gems ni C_4 , $\Delta(H) \leq 4$, $d_H(v) \leq 2$ para todo v conector, entonces $J \in \mathcal{G}$ y J tiene $|\mathcal{Q}| - 1$ cliques de tamaño 4 que son todas apropiadas.*

Demostración

Llamemos $\{v_1, \dots, v_4\}$ a los vértices de Q .

Veamos primero que J no contiene holes impares ni holes de longitud 4. Supongamos que J contiene un hole $C = u_1, \dots, u_k$ donde k es impar o $k = 4$. El grafo G no contiene holes de longitud k por definición de $\mathcal{G}$. El grafo H tampoco por definición de mantenedor. Entonces $V(G) \cap V(C) \neq \emptyset$ y $V(H) \cap V(C) \neq \emptyset$.

Si $k = 4$ como C contiene al menos un vértice original u y al menos uno agregado w entonces C contiene a lo sumo dos vértices conectores. Por el ítem 1 del Lema 3.4.2 los vértices agregados no tienen vecinos en los vértices originales. Por lo tanto, C contiene dos vértices conectores v_i, v_j con $1 \leq i < j \leq 4$. Por lo tanto u tiene dos vecinos en Q contradiciendo el hecho de que Q es apropiada.

Si k es impar. Por el ítem 1 del Lema 3.4.2 los vértices agregados no tienen vecinos en los vértices originales. Por lo tanto, todo camino maximal de C con interior en $V(H) \setminus V(Q)$ tiene sus extremos en $\{v_1, \dots, v_4\}$. Como $m_H(v) = 1$ para todo v conector, entonces, v es extremo de a lo sumo un camino maximal de C con interior en $V(H) \setminus V(Q)$. Por lo tanto, C contiene uno o dos caminos maximales con interior en $V(H) \setminus V(Q)$. Por definición de mantenedor, los caminos

en H entre dos vértices conectores son impares. Ya sea que haya uno o dos caminos maximales con interior en $V(H) \setminus V(Q)$, como estos caminos no comparten extremos, tiene que existir un camino maximal $C' \subseteq V(G) \cap C$ de longitud par.

Supongamos que los extremos de C' son v_i y v_j (con $1 \leq i < j \leq 4$). Entonces $C' \cup (v_i, v_j)$ es un ciclo impar inducido en G . Como $G \in \mathcal{G}$ entonces $|C'| = 3$. Por lo tanto el vértice $w \in (C' \setminus \{v_i, v_j\})$ tiene dos vecinos en Q contradiciendo el hecho de que Q es apropiado en G .

En conclusión J no contiene holes de longitud 4 ni holes impares.

Por el ítem 3 del Lema 3.4.2 $M(J) \leq 3$. Por Lema 3.4.4 J no contiene gems. Por el ítem 4 del Lema 3.4.2, como $\omega(H) \leq 3$, entonces $\omega(J) \leq 4$.

Como $G \in \mathcal{G}$, todos los vértices originales de grado 5 pertenecen a una clique de tamaño 4 en G (recordar que las cliques de tamaño 4 de G son todas apropiadas). Por Lema 3.4.1, la única clique de G que no es clique de J es Q . Por lo tanto todo vértice original con grado 5 pertenece a una clique de tamaño 4 en J . Por otra parte si v es conector entonces $d_J(v) = d_G(v) + d_H(v) - (|Q| - 1)$ por el ítem 5 del Lema 3.4.2. Como $G \in \mathcal{G}$ entonces $d_G(v) \leq 5$ y como $d_H(v) \leq 2$ entonces $d_J(v) \leq 4$. Por último si v es agregado, $d_H(v) \leq 4$ por hipótesis. Entonces, por el ítem 5 del Lema 3.4.2, $d_J(v) \leq 4$. Se concluye entonces que todo vértice de grado 5 pertenece a una clique de tamaño 4 en J . Además, como $\Delta(H) \leq 4$, ocurre que $\Delta(J) \leq 5$.

Recordemos que $S \in \mathcal{Q}$ sii S es apropiado en G . Entonces, por el ítem 2 del Lema 3.4.2, J tiene al menos $|\mathcal{Q}| - 1$ cliques apropiadas. Pero como $\omega(H) \leq 3$ entonces por Lema 3.4.1 J tiene exactamente $|\mathcal{Q}| - 1$ cliques de tamaño 4 que son todas apropiadas. ■

Definición: Sea G un grafo, $\mathcal{Q}$ el conjunto de cliques apropiadas de G y H un mantenedor de color con 4 conectores. Definimos el grafo $M-3_H(G)$ como el grafo que se obtiene de aplicar $m-3_H$ en forma iterativa en las cliques de $\mathcal{Q}$, suponiendo que en cada iteración los conectores de H son los vértices de la clique a la que se aplica $m-3_H$.

Por el ítem 2 del Lema 3.4.2 la operación está bien definida. Recordemos que, por definición, $\mathcal{F}$ es la clase de grafos G que no contienen holes impares, gems ni C_4 y donde además $M(G) \leq 3$, $\omega(G) \leq 3$ y $\Delta(G) \leq 4$.

Al igual que en el caso de $C-3$, mostramos ahora las propiedades de $M-3$ aplicando los lemas de $m-3$ en forma iterativa.

Lema 3.4.6 Sea G un grafo y $J = M-3(G)$. $F(J) \leq 3$ sii $F(G) \leq 3$.

Demostración

Es corolario de la aplicación iterativa del Lema 3.4.3. ■

Lema 3.4.7 Sea $G \in \mathcal{G}$ y H un mantenedor entre cuatro vértices. Llamemos $J = M-3_H(G)$. Si $\omega(H) \leq 3$, H no contiene C_4 , $\Delta(H) \leq 4$, $d_H(v) \leq 2$ para todo v conector, entonces $J \in \mathcal{F}$.

Demostración

Por la aplicación iterativa del Lema 3.4.5, $J \in \mathcal{G}$ y $\omega(J) \leq 3$ (porque en $M-3_H$ se aplica $m-3_H$

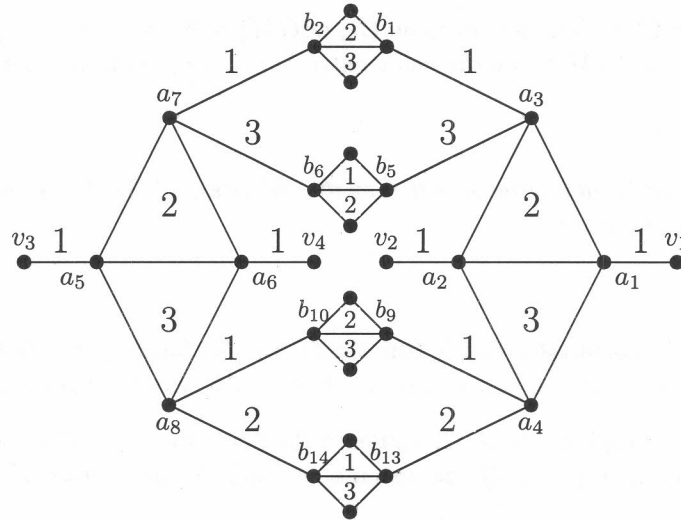


Figura 3.4: Grafo GM . Se muestra el único coloreo de $K(GM)$ salvo permutaciones de colores.

iterativamente a todas las cliques de tamaño 4 de G). Como $J \in \mathcal{G}$ entonces J no contiene gems, holes impares ni C_4 , $M(J) \leq 3$ y $\Delta(J) \leq 5$.

Como $J \in \mathcal{G}$ todo vértice de grado 5 de J pertenece a una clique de tamaño 4. Como $\omega(J) \leq 3$ entonces J no posee vértices de grado 5. Como además $\Delta(J) \leq 5$, entonces $\Delta(J) \leq 4$. ■

Definición: El grafo GM es un grafo con $V(GM) = \{v_1, \dots, v_4\} \cup \{a_1, \dots, a_8\} \cup \{b_1, \dots, b_{16}\}$ con las siguientes adyacencias:

- Para $i \in \{0, 4\}$, $\{a_{i+1}, \dots, a_{i+4}\}$ induce un diamante donde (a_{i+3}, a_{i+4}) no es una arista.
- Para $i \in \{0, 4, 8, 12\}$, $\{b_{i+1}, \dots, b_{i+4}\}$ induce un diamante donde (b_{i+3}, b_{i+4}) no es una arista.
- $(v_1, a_1), (v_2, a_2), (v_3, a_5), (v_4, a_6)$ son aristas de GM .
- para $i \in \{0, 4\}$, $(a_3, b_{1+i}), (a_4, b_{9+i}), (a_7, b_{2+i}), (a_8, b_{10+i})$ son aristas de GM .
- GM no tiene más aristas.

Es fácil ver que GM es perfecto (teniendo en cuenta que GM no contiene holes impares y que los antiholes impares de longitud mayor a 5 contienen gems y GM no) y que todo camino inducido entre v_i y v_j para $1 \leq i < j \leq 4$ es impar. El único coloreo posible de $K(GM)$ se muestra en la figura 3.4.

Observación: Por lo dicho en el párrafo anterior, GM es mantenedor con conectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Notar también que GM no contiene gems ni C_4 .

Lema 3.4.8 Sea $G \in \mathcal{G}$. Entonces $J = M-3_{GM}(G) \in \mathcal{F}$.

Demostración

Por definición de GM , GM no contiene C_4 , $\omega(GM) = 3$, $\Delta(GM) = 4$ y $d_H(v_i) = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como GM mantiene color entre $\{v_1, \dots, v_4\}$ entonces por Lema 3.4.7 $J \in \mathcal{F}$. ■

Lema 3.4.9 *Dado H mantenedor entre cuatro vértices, $M-3_H(G)$ se puede calcular en tiempo polinomial para todo grafo G .*

Demostración

El grafo H es fijo y constante para la función $M-3_H$. No forma parte de la entrada. Por lo tanto, el tamaño de H es constante con respecto a la entrada (ya que H es constante).

Sea Q una clique apropiada de G . Claramente el cálculo de $m-3_H(G, Q)$ es de tiempo polinomial porque consiste en reemplazar Q (de tamaño constante) por el grafo H (de tamaño constante).

Determinar si Q es apropiado también puede hacerse en tiempo polinomial, revisando $N_G(v)$ para todo $v \in (V(G) \setminus Q)$ para ver si tiene dos vecinos en Q . Como G tiene a lo sumo $\binom{n}{4}$ cliques de tamaño 4, calcular la familia $\mathcal{Q}$ de cliques apropiadas es polinomial y por lo tanto lo es el cálculo de $M-3_H(G)$. ■

Reducción de π_F a π_C

Para probar la reducción de π_F a π_C vamos a hacerlo con instancias particulares de cambiadores y mantenedores.

Definición: Definimos $f-3$ como la composición de $M-3_{GM}$ con $C-3_{GC}$, es decir, $f-3 = M-3_{GM} \circ C-3_{GC}$.

Teorema 3.4.10 *Sea G una instancia de π_F . Entonces $F(G) \leq 3$ sii $f-3(G)$ es coordinado.*

Demostración

Llamemos $J_1 = C-3_{GC}(G)$ y $J_2 = M-3_{GM}(J_1)$, es decir, $J_2 = f-3(G)$. Como G es una instancia de π_F entonces por Lema 3.3.15 $J_1 \in \mathcal{G}$. Pero entonces por Lema 3.4.8 $J_2 \in \mathcal{F}$.

Por Lema 3.3.11, $F(G) \leq 3$ sii $F(J_1) \leq 3$ y por Lema 3.4.6 $F(J_1) \leq 3$ sii $F(J_2) \leq 3$. Por lo tanto $F(G) \leq 3$ sii $F(J_2) \leq 3$.

$\Leftarrow$) Como $J_2 \in \mathcal{F}$ entonces $M(J_2) \leq 3$. Como J_2 es coordinado entonces $F(J_2) \leq 3$ y por lo tanto $F(G) \leq 3$.

$\Rightarrow$) $F(G) \leq 3$ entonces $F(J_2) \leq 3$. Sea H un subgrafo inducido de J_2 . Si $M(H) \geq 3$ entonces $3 \leq M(H) \leq F(H) \leq F(J_2) \leq 3$ y por lo tanto $M(H) = F(H)$. Si $M(H) \leq 2$, como $J_2 \in \mathcal{F}$ entonces J_2 no contiene holes impares. Entonces H no contiene holes impares y por Teorema 1.2.23 $F(H) = M(H)$. Por lo tanto J_2 es coordinado. ■

Teorema 3.4.11 $\pi_C \in \mathcal{NP-C}$.

Demostración

El conjunto de instancias de π_C es $\mathcal{F}$. Como todo grafo $G \in \mathcal{F}$ tiene $M(G) \leq 3$, entonces por Teorema 3.1.2, $\pi_C \in \mathcal{NP}$.

El Teorema 3.4.10 permite establecer una reducción de π_F a π_C que dado G instancia de π_F construye $J = f-3(G)$ instancia de π_C donde $\pi_F(G)$ responde SI sii $\pi_C(J)$ responde SI.

Por Lema 3.3.16, $J_1 = C-3_{GC}(G)$ se puede calcular en tiempo polinomial para todo grafo G . Por Lema 3.4.9, $J_2 = M-3_{GM}(J_1)$ también se puede calcular en tiempo polinomial. Como $f-3(G) = J_2$ por definición, entonces el cálculo de $f-3(G)$ es polinomial para todo grafo G .

Por lo tanto $f-3$ es una reducción polinomial de π_F a π_C y como por Teorema 3.2.4 $\pi_F \in \mathcal{NP-C}$ entonces $\pi_C \in \mathcal{NP-C}$. ■

El siguiente es un corolario directo de 3.4.11.

Teorema 3.4.12 *El problema de determinar si G es coordinado es NP-hard.*

Capítulo 4

Caracterizaciones parciales

En este capítulo presentamos caracterizaciones por subgrafos prohibidos minimales de los grafos coordinados restringidos a las clases de los grafos de línea (sección 4.1), los grafos sin paws (sección 4.2), los grafos complemento de bosques (sección 4.3), y los grafos sin gems, W_4 ni bulls (sección 4.4).

Además caracterizamos por subgrafos prohibidos minimales a los grafos clique-perfectos restringidos a las clases de los grafos sin paws (sección 4.2), y los grafos sin gems, W_4 ni bulls (sección 4.4).

Todas las caracterizaciones aquí mostradas conducen a algoritmos polinomiales para los problemas de reconocer si un grafo es coordinado y reconocer si un grafo es clique-perfecto en las clases respectivas. En particular, mostramos algoritmos lineales en todas las clases estudiadas salvo para la clase de los grafos sin gems, W_4 ni bulls.

4.1. Grafos de línea

En esta sección caracterizamos por subgrafos prohibidos a los grafos de línea coordinados. Esta caracterización vista desde la preimagen del grafo de línea lleva a un algoritmo lineal para el problema de reconocimiento.

Recientemente en [5] fueron caracterizados los grafos de línea clique-perfectos. En particular, en dicha demostración se probó el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1 [5] *Sea G un grafo. Si $L(G)$ es perfecto y no contiene el grafo línea de un trinity, entonces $L(G)$ es K -perfecto.*

El grafo de línea de un trinity es la pirámide. Como mostramos en la sección 2.1 los grafos no perfectos y la pirámide no son coordinados. Por los Teoremas 1.2.16 y 4.1.1, $F(L(G)) = \chi(K(L(G))) = \omega(K(L(G)))$. En esta sección probamos que cuando $L(G)$ es perfecto y no contiene al grafo de línea de un trinity entonces $M(L(G)) = \omega(K(L(G)))$, lo que nos permitirá concluir que en estos casos $L(G)$ es coordinado.

La idea de la demostración es analizar las subfamilias no Helly de la familia de cliques de $L(G)$ que generan cliques en $K(L(G))$. Para esto dividimos las subfamilias no Helly en dos tipos y las estudiamos en los Lemas 4.1.5 y 4.1.7.

Para finalizar la sección reescribimos la caracterización a partir de la preimagen del grafo de línea en el Teorema 4.1.12. Esta reescritura permite caracterizar los grafos G tales que $L(G)$ es coordinado a partir de cualquier bipartición de $V(G)$ (Teorema 4.1.14). Esta nueva caracterización conduce a un algoritmo lineal para reconocer los grafos de línea coordinados (Teorema 4.1.17) y otro (también lineal) para determinar los valores $M(L(G))$ y $F(L(G))$ cuando $L(G)$ es coordinado (Teoremas 4.1.18 y 4.1.19).

Definición: Sea G un grafo y $E' \subseteq E(G)$. Definimos el subgrafo $G[E'] = (W, E')$ donde W es el conjunto de vértices que inciden en alguna arista de E' . Sea $\mathcal{E}$ una familia de conjuntos de aristas. Definimos $G[\mathcal{E}] = G[\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E]$.

Observación: $L(G[E])$ es el subgrafo de $L(G)$ inducido por E .

El siguiente lema es resultado trivial para los grafos de línea.

Lema 4.1.2 Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $E' \subseteq E$. $L(G[E'])$ es completo sii $G[E']$ es una estrella o un triángulo.

Los primeros resultados simples son para analizar como se intersecan dos cliques en un grafo de línea.

Sea G un grafo, recordar que, de acuerdo a la definición de grafos de línea, las cliques de $L(G)$ son conjuntos de aristas de G .

Lema 4.1.3 Sean G un grafo y Q_1, Q_2 dos cliques distintas de $L(G)$. $|Q_1 \cap Q_2| = 2$ sii $G[Q_1]$ es un triángulo y $G[Q_2]$ es la estrella (maximal) con centro en algún vértice de $G[Q_1]$ (o viceversa).

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $Q_1 \cap Q_2 = \{e_1, e_2\}$. Como Q_1 y Q_2 son completos en $L(G)$ entonces e_1 y e_2 inciden en un vértice común en G . Llamemos entonces $e_1 = (v_1, v_2)$ y $e_2 = (v_2, v_3)$ donde $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$.

Por ser cliques de $L(G)$, $Q_1 \not\subseteq Q_2$ y $Q_2 \not\subseteq Q_1$, entonces existen $e_3 \in (Q_1 \setminus Q_2)$ y $x \in (Q_2 \setminus Q_1)$ no adyacentes en $L(G)$. Pero entonces x incide en un vértice en común con e_1 en G y en otro (posiblemente el mismo) con e_2 . Además como x no es adyacente a e_3 en $L(G)$, no inciden en un vértice en común en G . Por lo tanto una de las dos aristas incide en dos vértices del conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ y la otra arista en el restante.

Sin pérdida de generalidad podemos decir que $e_3 = (v_3, v_1)$ y $x = (v_2, w)$ donde $w \in V(G)$. Como ninguna arista de G puede incidir a la vez en las tres aristas del triángulo $\{v_1, v_2, v_3\}$ entonces $G[Q_1]$ es un triángulo. Por otra parte, todas las aristas que inciden en un vértice en común con x, e_1, e_2 en G tienen que incidir en v_2 y por lo tanto $G[Q_2]$ es la estrella con centro v_2 .

$\Leftarrow$) Trivial. ■

Lema 4.1.4 Sean G un grafo y Q_1, Q_2 dos cliques distintas de $L(G)$. Entonces $|Q_1 \cap Q_2| < 3$.

Demostración

Supongamos que no. Sean $e_1, e_2 \in (Q_1 \cap Q_2)$. Como Q_1 y Q_2 son cliques de $L(G)$ entonces existen $e_3 \in (Q_1 \setminus Q_2)$ y $x \in (Q_2 \setminus Q_1)$. Llamemos además $G' = G[\{e_1, e_2, e_3, x\}]$. Claramente, $Q'_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $Q'_2 = \{e_1, e_2, x\}$ son dos cliques de $L(G')$ con $|Q'_1 \cap Q'_2| = 2$. Por Lema 4.1.3 (sin pérdida de generalidad), $G'[Q'_1]$ es un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $G'[Q'_2]$ es la estrella con centro v_1 donde $v_1, v_2, v_3 \in V(G')$. Escribimos entonces $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_3)$ y $x = (v_1, w)$ donde $w \in V(G')$.

Sea e una arista cualquiera de $(Q_1 \cap Q_2) \setminus \{e_1, e_2\}$ que tiene que existir por hipótesis. Como e incide en un vértice común con e_3 y con x entonces $e = (v_3, w)$ o $e = (v_2, w)$. En el primer caso e no incide en un vértice común con $e_1 = (v_1, v_2)$ y en el segundo caso e no incide en un vértice común con $e_2 = (v_1, v_3)$, lo que es un absurdo en ambos casos. ■

Sea $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ una familia de cliques de un grafo G que intersecan dos a dos. Vamos a decir que $\mathcal{Q}$ es maximal si no existe ninguna otra clique de G que interseque a todas las cliques de $\mathcal{Q}$. Dicho de otra manera, $\mathcal{Q}$ es maximal si sus vértices correspondientes en $K(G)$ forman una clique.

Por otra parte vamos a decir que $\mathcal{Q}$ es de tipo 2 si todo par de cliques de $\mathcal{Q}$ intersecan dos a dos y existen $1 \leq i < j \leq k$ tales que $|Q_i \cap Q_j| = 2$. En cambio si para todo $1 \leq i < j \leq k$, $|Q_i \cap Q_j| = 1$, vamos a decir que $\mathcal{Q}$ es de tipo 1. Por Lema 4.1.4 todos los conjuntos de cliques son o bien de tipo 1 o bien de tipo 2.

Los siguientes dos lemas analizan las familias de cliques de tipo 1 y 2.

Lema 4.1.5 Sea G un grafo tal que $L(G)$ es perfecto y sea $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ una familia maximal de cliques. $\mathcal{Q}$ es de tipo 2 y no es Helly si $k = 4$ y

- (i) para algún i , $G[Q_i]$ es un triángulo y para todo $1 \leq l \leq 4$ con $l \neq i$, $G[Q_l]$ es la estrella con centro en algún vértice de $G[Q_i]$, o
- (ii) $G[\mathcal{Q}]$ contiene un subgrafo $H = K_4$, donde para algún i , $G[Q_i]$ es la estrella con centro en algún vértice $v \in H$ y para todo $1 \leq l \leq 4$ con $l \neq i$, $G[Q_l]$ es un triángulo de H que contiene a v .

Demostración

$\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ es de tipo 2 entonces, por definición, existen dos cliques distintas de $\mathcal{Q}$, digamos Q_1 y Q_2 , tales que $|Q_1 \cap Q_2| = 2$. Por Lema 4.1.3, sin pérdida de generalidad, $G[Q_1]$ es un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $G[Q_2]$ es la estrella con centro en algún vértice de T , digamos v_1 .

Como $\mathcal{Q}$ no es Helly, entonces $\bigcap_{i=1}^k Q_i = \emptyset$. Por lo tanto existe una clique $Q \in \mathcal{Q}$, tal que $(v_1, v_3) \notin Q$. Como $Q \neq Q_1, Q_2$, podemos suponer que $Q = Q_3$.

Supongamos que $(v_1, v_2) \notin Q_3$. Como las cliques de $\mathcal{Q}$ intersecan dos a dos, Q_3 contiene una arista de Q_1 y otra de Q_2 que obviamente inciden en un vértice común con cada una de las otras aristas de Q_3 . Como $(v_1, v_3) \notin Q_3$ y $(v_1, v_2) \notin Q_3$ y $Q_3 \cap Q_1 \neq \emptyset$ entonces $(v_2, v_3) \in Q_3$.

Pero como $(v_2, v_3) \notin Q_2$ entonces Q_3 contiene una arista e que incide en v_1 (porque Q_2 es la estrella con centro en v_1) y en v_2 o v_3 (porque e interseca a todas las aristas de Q_3). Por lo tanto $(v_1, v_2) \in Q_3$ o $(v_1, v_3) \in Q_3$ lo es una contradicción que proviene de suponer que $(v_1, v_2) \notin Q_3$. En conclusión, $(v_1, v_2) \in Q_3$.

Utilizando el mismo argumento, tiene que existir otra clique $Q' \in \mathcal{Q}$ tal que $(v_1, v_2) \notin Q'$ y por lo tanto $(v_1, v_3) \in Q'$. Entonces $Q' \neq Q_1, Q_2, Q_3$ y podemos suponer que $Q' = Q_4$.

Vamos a probar que $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_4\}$ analizando por casos de acuerdo a $|Q_1 \cap Q_3|$ y $|Q_1 \cap Q_4|$. Por Lema 4.1.4, $|Q_1 \cap Q_3| \leq 2$ y $|Q_1 \cap Q_4| \leq 2$ y por lo tanto tenemos cuatro casos.

Caso 1: $|Q_1 \cap Q_3| = 1$ y $|Q_1 \cap Q_4| = 1$. Entonces por Lema 4.1.3 $G[Q_3]$ y $G[Q_4]$ no son las estrellas con centro v_2 y v_3 respectivamente. Por lo tanto, por Lema 4.1.2, $G[Q_3]$ es un triángulo $T_2 = \{v_1, v_2, w\}$, y $G[Q_4]$ es un triángulo $T_3 = \{v_1, v_3, z\}$. Si $w \neq z$ entonces $C = \{v_1, w, v_2, v_3, z\}$ forman un ciclo impar de G y por lo tanto las aristas de C inducen un hole en $L(G)$ lo que sería es una contradicción. Por lo tanto podemos suponer que $z = w$ y llamamos $v_4 = z = w$. Notar que $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ cumple la condición (ii) del lema donde $i := 2$.

Veamos ahora que $k \leq 4$. Supongamos que existe $Q_5 \in \mathcal{Q}$ con $Q_5 \neq Q_i$ para todo $1 \leq i \leq 4$. Por Lema 4.1.2 $G[Q_5]$ es un triángulo o una estrella. Si $G[Q_5]$ es una estrella con centro v_i con $2 \leq i \leq 4$, digamos $i = 2$, entonces $Q_5 \cap Q_3 = \emptyset$ lo que es una contradicción. Entonces $G[Q_5]$ es un triángulo. Como $Q_5 \cap Q_2 \neq \emptyset$ entonces $v \in V(G[Q_5])$. Como $Q_5 \cap Q_1 \neq \emptyset$ podemos suponer que $v_2 \in V(G[Q_5])$ y como $Q_5 \neq Q_1$ entonces $v_3 \notin V(G[Q_5])$. Como $Q_5 \cap Q_3 \neq \emptyset$ y $v_3 \notin V(G[Q_5])$ entonces $v_4 \in V(G[Q_5])$, concluyéndose que $V(G[Q_5]) = \{v, v_2, v_4\}$ y por lo tanto, $Q_5 = Q_4$. Absurdo que provino de suponer que $k > 4$. Por lo tanto, en este caso vale (ii).

Caso 2: $|Q_1 \cap Q_3| = 2$ y $|Q_1 \cap Q_4| = 1$. $G[Q_4]$ es el triángulo T_3 como en el Caso 1. Por Lema 4.1.3 $G[Q_3]$ es la estrella con centro v_2 . Pero entonces $Q_4 \cap Q_3 = \emptyset$ porque ninguna arista de T_3 incide en v_2 lo que es una contradicción.

Caso 3: $|Q_1 \cap Q_3| = 1$ y $|Q_1 \cap Q_4| = 2$. Es análogo al Caso 2, cambiando Q_3 por Q_4 .

Caso 4: $|Q_1 \cap Q_3| = 2$ y $|Q_1 \cap Q_4| = 2$. Entonces, por Lema 4.1.3 $G[Q_3]$ es la estrella con centro v_2 y $G[Q_4]$ es la estrella con centro v_3 . Notar que en este caso Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 cumplen la condición (i) con $i := 1$.

Supongamos ahora que $k > 4$. Entonces existe $Q_5 \in \mathcal{Q}$ con $Q_5 \neq Q_i$ para todo $1 \leq i \leq 4$. Por Lema 4.1.2, $G[Q_5]$ es una estrella o un triángulo. Si $G[Q_5]$ es un triángulo, como $Q_5 \cap Q_i \neq \emptyset$ y para $2 \leq i \leq 4$ y Q_i es una estrella con centro v_{i-1} , entonces $G[Q_5]$ es el triángulo $\{v_1, v_2, v_3\}$ lo que es una contradicción porque $Q_5 \neq Q_1$. Por lo tanto $G[Q_5]$ es una estrella. Como $Q_1 \cap Q_5 \neq \emptyset$, entonces $G[Q_5]$ es la estrella con centro en algún vértice de T . Absurdo, porque la clique de G formada por la estrella de centro v_i es Q_{i+1} con $1 \leq i \leq 3$. Por lo tanto, en este caso vale (i).

$\Leftarrow$) Trivial. ■

El siguiente lema es un corolario directo del Lema 4.1.3.

Lema 4.1.6 *Sea G un grafo y Q_1, Q_2 dos cliques de $L(G)$ donde $G[Q_1]$ es una estrella y $G[Q_2]$ un triángulo. Entonces $|Q_1 \cap Q_2| = 0$ ó $|Q_1 \cap Q_2| = 2$.*

Lema 4.1.7 Sea G un grafo tal que $L(G)$ un grafo perfecto y sea $\mathcal{Q} = Q_1, \dots, Q_k$ una familia maximal de cliques. $L(G)$ de tipo 1 y no es Helly sii $k = 4$ y

- (i) $G[Q_i]$ es una estrella con centro v_i para todo $1 \leq i \leq 4$ donde $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ induce un K_4 , o
- (ii) $G[\mathcal{Q}] = K_4$ donde para todo $1 \leq i \leq 4$, $G[Q_i]$ es un triángulo de $G[\mathcal{Q}]$.

Demostración

Como $\mathcal{Q}$ es de tipo 1, entonces para todo par de cliques $Q \neq Q' \in \mathcal{Q}$, $|Q \cap Q'| = 1$.

Sea $Q_1 \cap Q_2 = \{e_1\}$. Como $\mathcal{Q}$ no es Helly, entonces $\bigcap_{i=1}^k Q_i = \emptyset$. Por lo tanto existe Q_3 tal que $e_1 \notin Q_3$. Llamemos entonces $Q_1 \cap Q_3 = \{e_2\}$ y $Q_2 \cap Q_3 = \{e_3\}$.

Claramente $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un completo de $L(G)$, y por lo tanto existe una clique Q de $L(G)$ tal que $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq Q$.

Como $|Q \cap Q_i| = 2$ (con $1 \leq i \leq 3$) entonces por Lema 4.1.3 o bien $G[Q]$ es un triángulo o bien todos los $G[Q_i]$ son triángulos de G . En ambos casos, $Q \notin \mathcal{Q}$ por ser $\mathcal{Q}$ de tipo 1.

Caso 1: $G[Q]$ es un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $G[Q_i]$ es la estrella con centro v_i (para $1 \leq i \leq 3$). Como $\mathcal{Q}$ es maximal entonces debe existir $Q_4 \in \mathcal{Q}$ tal que $Q_4 \cap Q = \emptyset$ ya que sino, Q podría agregarse a $\mathcal{Q}$. Como $|Q_4 \cap Q_1| = 1$, entonces por Lema 4.1.6, $G[Q_4]$ no es un triángulo y por Lema 4.1.2, $G[Q_4]$ es la estrella con centro w . Claramente $w \neq v_i$ para $1 \leq i \leq 3$ ya que sino $Q_4 = Q_i$. Además Q_4 contiene una arista de cada Q_i (con $1 \leq i \leq 3$) y como $G[Q_i]$ y $G[Q_4]$ son estrellas, entonces (v_i, w) es una arista de G . Notar que en este caso $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ cumplen la condición (i).

Ahora supongamos que $k > 4$, es decir, existe una clique Q_5 de $L(G)$ que contiene una arista de cada Q_i para $1 \leq i \leq 4$. Como $\mathcal{Q}$ es de tipo 1, $|Q_5 \cap Q_1| = 1$ y entonces por Lema 4.1.6 Q_5 no es un triángulo. Por Lema 4.1.2 Q_5 es una estrella con centro digamos $z \in V(G)$. Claramente $z \neq v_1, v_2, v_3, w$ porque $Q_1, \dots, Q_5$ son todas cliques distintas.

Como todo par de cliques de $\mathcal{Q}$ intersecan, entonces Q_5 interseca con Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Por ser todos los $G[Q_i]$ ($1 \leq i \leq 5$) estrellas, entonces se encuentran todas las aristas entre sus centros en G . Pero entonces w, z, v_2, v_3, v_1 es un completo que tiene como subgrafo un ciclo C de longitud 5. Por lo tanto las aristas de C inducen un hole en $L(G)$. En consecuencia $L(G)$ no es perfecto, lo que es una contradicción que provino de suponer que $k > 4$ y por lo tanto $k = 4$.

Caso 2: $G[Q]$ es una estrella con centro v . Entonces por Lema 4.1.3, para todo $1 \leq i \leq 3$, $G[Q_i]$ es un triángulo en G que contiene a v y dos aristas de Q . La única posibilidad es que $G[(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3)]$ sea un completo de 4 vértices $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ donde vamos a suponer que $(v, v_i), (v, v_{i+1}) \in Q_i$ para cada $1 \leq i \leq 3$. Es decir, $V(G[Q_i]) = \{v_i, v_{i+1}, v\}$.

Como $\mathcal{Q}$ es maximal entonces existe Q_4 clique de $L(G)$ que interseca a Q_1, Q_2, Q_3 y no a Q (ya que sino Q podría agregarse a $\mathcal{Q}$). Como $|Q_4 \cap Q_1| = 1$, por Lemas 4.1.3 y 4.1.2, $G[Q_4]$ es un triángulo. Por otra parte, como $Q \cap Q_4 = \emptyset$, ninguna arista que incide en v pertenece a Q_4 y se concluye que $G[Q_4] = \{v_1, v_2, v_3\}$. Notar que en este caso $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ cumplen la condición (ii).

Supongamos ahora que $k > 4$, es decir, que existe $Q_5 \in \mathcal{Q}$ con $Q_5 \neq Q_i$ para todo $1 \leq i \leq 4$. Como Q_5 interseca a Q_4 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(v_1, v_2) \in Q_5$. Como

$Q_5 \neq Q_4$ entonces por simetría podemos suponer que $(v_2, v_3) \notin Q_5$. Como $Q_5 \cap Q_3 \neq \emptyset$ entonces $(v_1, v_3) \in Q_5$. La única otra arista que puede estar en Q_5 que interseca a Q_2 es (v_2, v_3) , lo que es una contradicción al hecho de que $Q_5 \neq Q_2$. Por lo tanto vale el lema.

$\Leftarrow$) Trivial ■

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.1.8 *Sea G un grafo, $L(G)$ es coordinado sii $L(G)$ es perfecto y no contiene el grafo de línea de un trinity.*

Demostración

$\Rightarrow$) Los grafos coordinados son perfectos por Teorema 1.2.5 y el grafo de línea de un trinity no es coordinado (como lo enunciamos en la sección 2.1).

$\Leftarrow$) Como las propiedades de ser grafo de línea, perfecto y no contener el grafo de línea de un trinity son hereditarias, basta probar que $L(G)$ es C-good por Lema 1.2.14. Por Teorema 4.1.1 $L(G)$ es K-perfecto y por lo tanto basta ver que $\omega(K(L(G))) = M(L(G))$.

Supongamos que $\omega(K(L(G))) > M(L(G))$. Sea $\mathcal{Q} = Q_1, \dots, Q_k$ el conjunto de cliques que induce una clique máxima de $K(L(G))$. Como $k = \omega(K(L(G))) > M(L(G))$, entonces $\mathcal{Q}$ no es Helly. Por Lema 4.1.4, $\mathcal{Q}$ es de tipo 1 o 2 y por Lemas 4.1.7 y 4.1.5, $k = 4$. Por lo tanto $M(L(G)) < 4$.

Supongamos que algún subgrafo (no necesariamente inducido) H de $G[\mathcal{Q}]$ es isomorfo a un diamante con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 donde v_3 no es adyacente a v_4 . Sea Q_i el conjunto de aristas de la estrella con centro v_i para $i \in \{1, 2\}$ y Q_i el conjunto de aristas del triángulo de H que contiene a v_i para $i \in \{3, 4\}$. Como $Q_1, \dots, Q_4$ son cliques de $L(H)$ y $(v_1, v_2) \in \bigcap_{i=1}^4 Q_i$, entonces $m_{L(G)}((v_1, v_2)) \geq m_{L(H)}((v_1, v_2)) \geq 4$, lo que es una contradicción que provino de suponer que algún subgrafo H de $G[\mathcal{Q}]$ es isomorfo a un diamante. Entonces por Lema 4.1.7 $\mathcal{Q}$ no es de tipo 1.

Por lo tanto $\mathcal{Q}$ es de tipo 2 y por Lema 4.1.5, existe $1 \leq i \leq 4$, tal que $G[Q_i]$ es un triángulo T y $G[Q_l]$ es la estrella con centro en algún vértice de T para todo $1 \leq l \leq 4$ con $l \neq i$. Llamemos $\{v_1, v_2, v_3\}$ a los vértices de T y para simplificar la notación, digamos que $i = 1$.

Como ningún subgrafo de $G[\mathcal{Q}]$ es isomorfo a un diamante, entonces para todo $2 \leq i < j \leq 4$ y todo par de aristas $e \in Q_i \setminus E(T)$ y $e' \in Q_j \setminus E(T)$ ocurre que e y e' no inciden en un vértice en común. Por maximalidad de Q_2, Q_3 y Q_4 , existe al menos una arista $e_i \in Q_i \setminus E(T)$ con $2 \leq i \leq 4$. Pero entonces G tiene como subgrafo un trinity, lo que es una contradicción que provino de suponer que $\omega(K(L(G))) > M(L(G))$. ■

Un corolario de los Teoremas 1.2.3 y 4.1.8 es el siguiente.

Teorema 4.1.9 *El problema de determinar si un grafo de línea es coordinado puede ser resuelto en tiempo polinomial.*

Lo que resta de la sección es una caracterización de los grafos de línea coordinados a partir de su preimagen. Es decir, dado G determinar si $L(G)$ es coordinado. Esta caracterización permite generar un algoritmo lineal para el reconocimiento de los grafos de línea coordinados.

Teorema 4.1.10 [42] *Sea G un grafo. $L(G)$ es perfecto sii $L(G)$ no contiene holes impares.*

Lema 4.1.11 *Si G contiene un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde $d(v_1) \geq 4$, $d(v_2) \geq 4$ y $d(v_3) \geq 3$ entonces algún subgrafo de G es isomorfo a un trinity o a un ciclo impar.*

Demostración

Como $d(v_3) \geq 3$ entonces existe un vértice z adyacente a v_3 que no pertenece a T . Como $d(v_1) \geq 4$ entonces existe un vértice $u_1 \neq z$ adyacente a v_1 que no pertenece a T . Del mismo modo, existe un vértice $u_2 \neq z$ adyacente a v_2 que no pertenece a T . Si $u_1 \neq u_2$ entonces el subgrafo formado por $T \cup \{u_1, u_2, z\}$ es un trinity. En los otros casos $u_1 = u_2 = u$.

Como $d(v_1) \geq 4$ entonces existe otro vértice $w_1 \neq u$ vecino de v_1 que no pertenece a T . Si $z = w_1$ entonces v_1, z, v_3, v_2, u es un ciclo impar. Por último si $z \neq w_1$, entonces $T \cup \{u, w_1, z\}$ forma un trinity. ■

El siguiente teorema es la reescritura del Teorema 4.1.8 utilizando G en lugar de $L(G)$.

Teorema 4.1.12 *Sea G un grafo. Entonces $L(G)$ es coordinado sii ningún subgrafo de G es isomorfo a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 y para todo triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ de G ocurre que:*

- $d(v_i) = 2$ para algún i , o
- Para algún par $1 \leq i < j \leq 3$, $d(v_i) = d(v_j) = 3$ y $N[v_i] = N[v_j]$.

Demostración

$\Rightarrow$) Por el contrarecíproco. Si algún subgrafo de G es isomorfo a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 entonces $L(G)$ no es perfecto y por Teorema 4.1.8 $L(G)$ no es coordinado. Por otra parte, si existe un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3)$, que no cumple las condiciones del teorema, entonces ocurre uno de dos casos. O bien $d(v_1) \geq 3$ y $d(v_2) \geq 4$ y por Lema 4.1.11 y Teorema 4.1.8 $L(H)$ no es coordinado; o bien $d(v_1) = d(v_2) = 3$ y v_1, v_2, v_3 no son mellizos dos a dos. En este último caso hay dos posibilidades:

Caso 1: Existen vértices u, w, z distintos dos a dos tales que v_1 es adyacente a u , v_2 es adyacente a w y v_3 es adyacente a z donde ninguno de los vértices u, w, z pertenece a T . Pero entonces $T \cup \{u, w, z\}$ es un subgrafo trinity de G y por Teorema 4.1.8 $L(G)$ no es coordinado.

Caso 2: Existen vértices u, w tales que v_1 es adyacente a u , v_2 es adyacente a w y v_3 es adyacente a u, w . Pero entonces u, v_1, v_3, w, v_2 es un ciclo de longitud 5, y por Teorema 4.1.8 $L(G)$ no es coordinado.

$\Leftarrow$) Por el contrarecíproco. $L(G)$ no es coordinado, entonces por Teoremas 4.1.8 y 4.1.10 o bien algún subgrafo H de G es isomorfo a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 o es isomorfo a un trinity. Cuando H es isomorfo a un trinity, claramente G contiene un triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3)$ y tres vértices u_1, u_2, u_3 distintos dos a dos donde u_i es vecino de v_i . Si $d(v_2) \leq 3$ entonces para todo $1 \leq i < j \leq 3$ ocurre que $N[v_i] \neq N[v_j]$ porque sino los u_i no son distintos dos a dos. ■

Teorema 4.1.13 [34] *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

- G no contiene ciclos impares de longitud al menos 5.
- Todo subgrafo G' de G satisface alguna de las siguientes condiciones
 - (i) G' es bipartito.
 - (ii) $G' = K_4$.
 - (iii) $V(G') = \{a, b\} \cup X$ donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto independiente y $N[a] \cap N[b] = V(G')$.
 - (iv) G' tiene un vértice de corte.

Definición: Sea G un grafo conexo y $S \subseteq V(G)$. S es un separador por aristas si todo camino de G entre un par de vértices de S contiene únicamente aristas del conjunto $S \times S$.

Para facilitar la lectura, vamos a notar $E_G(S)$ a las aristas de G entre los vértices de S en lo que resta de esta sección. Es fácil ver que cuando S es un separador por aristas de G , entonces cada vértice de S se encuentra en una componente conexa distinta de $G \setminus E_G(S)$.

En todos los teoremas y algoritmos a continuación necesitamos ordenar los vértices de un triángulo de acuerdo a su grado y vecindario. Para simplificar la lectura de los teoremas vamos a definir lo que es una ordenación correcta de los vértices de T para estos teoremas.

Sea $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ un triángulo de un grafo G . Vamos a decir que v_1, v_2, v_3 es una *ordenación correcta* de T cuando $d(v_1) \leq d(v_2) \leq d(v_3)$, y cuando $d(v_1) = d(v_3)$ ocurre que v_1 es mellizo de v_3 sólo si v_1 es mellizo de v_2 y v_2 es mellizo de v_3 sólo si v_2 es mellizo de v_1 .

Vamos a notar $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ al triángulo $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ cuya ordenación correcta es v_1, v_2, v_3 .

Combinando la demostración del Teorema 4.1.13 con el Teorema 4.1.12 probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.14 *Sea G un grafo y sea $\mathcal{T}$ el conjunto de triángulos de G . Son equivalentes:*

- $L(G)$ es coordinado.
- $G \setminus E(\mathcal{T})$ es bipartito y todo triángulo $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathcal{T}$ cumple una de las siguientes propiedades:
 - (i) $d_G(v_1) = 2$ y $N[v_2] \cap N[v_3]$ es un separador por aristas de G .
 - (ii) $d_G(v_1) = 3$, v_1 y v_2 son mellizos y $N[v_1]$ es un separador por aristas de G .

Demostración

$\Rightarrow$) Por Teorema 4.1.12 todo ciclo impar de G es un triángulo. Entonces $G \setminus E(\mathcal{T})$ es bipartito.

Sea $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathcal{T}$. Por Teorema 4.1.12 tenemos dos casos: A) $d(v_1) = 2$ o B) $d(v_1) = 3$ y v_1, v_2 son mellizos.

Caso A: Sea $W = N(v_2) \cap N(v_3)$ y $S = N[v_2] \cap N[v_3]$. En la demostración del Teorema 4.1.13 [34] se prueba que W es un conjunto independiente. Supongamos que existe un camino C entre dos

vértices de S con alguna arista de C en $E(G) \setminus E_G(S)$. Claramente $G' = G[E_G(S) \cup E(C)]$ no es bipartito ni isomorfo a K_4 , no contiene ningún vértice de corte y no cumple la condición (iii) del Teorema 4.1.13. Por Teorema 4.1.13, G contiene un ciclo impar de longitud al menos 5 y por Teorema 4.1.12 $L(G)$ no es coordinado lo que es una contradicción. Por lo tanto vale (i).

Caso B: Sea $S = N[v_1]$ y sea u el vecino de v_1 que no pertenece a $\{v_2, v_3\}$. Sea C un camino entre dos vértices de S con alguna arista de C en $E(G) \setminus E_G(S)$. Claramente $G' = G[E_G(S) \cup E(C)]$ no es bipartito ni isomorfo a K_4 (porque tiene al menos 5 vértices) ni contiene vértices de corte. Como v_1 y v_2 son mellizos, $\{v_1, v_2\}$ es anticompleto a $G \setminus S$. Entonces C contiene un camino entre u y v_3 . Por lo tanto G' no cumple la condición (iii) del Teorema 4.1.13. Por Teorema 4.1.13, G contiene un ciclo impar de longitud al menos 5 y por Teorema 4.1.12 $L(G)$ no es coordinado lo que es una contradicción. Por lo tanto vale (ii).

$\Leftarrow$) Sea C un ciclo impar de G . Como $G \setminus E(T)$ es bipartito entonces C contiene una arista e que pertenece a un triángulo $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Sea $S = N[v_2] \cap N[v_3]$ si $d(v_1) = 2$ o $S = N[v_1]$ si $d(v_1) = 3$. Por hipótesis S es un separador por aristas y claramente $e \in S$. Entonces todo camino entre los vértices de e contiene únicamente aristas de $E_G(S)$ y por lo tanto $V(C) \subseteq S$.

Si $d(v_1) = 3$, como $V(C) \subseteq S$, entonces $|C| \leq 3$ concluyéndose que $|C| = 3$.

Si $d(v_1) = 2$. Supongamos que $|C| \geq 5$. Como $V(C) \subseteq S$, entonces $4 \leq |C| - 1 \leq d(v_2) \leq d(v_3)$. Sea $W = N(v_2) \cap N(v_3)$ y $w \in W$. Como $\{w, v_2, v_3\}$ es un triángulo y $d(v_3) \geq d(v_2) > 3$ entonces por hipótesis $d(w) = 2$. Por lo tanto W es un conjunto independiente. Como C contiene sólo vértices de S , entonces contiene $|C| - 2$ vértices no adyacentes dos a dos y por lo tanto $|C| \leq 4$. Absurdo que provino de suponer que $|C| \geq 5$ y por lo tanto $|C| = 3$.

Por lo tanto todo ciclo impar de G tiene longitud 3.

Sea T un triángulo de G . Entonces por hipótesis, T tiene un vértice de grado 2 o dos vértices mellizos de grado 3.

En conclusión, por Teorema 4.1.12 $L(G)$ es coordinado. ■

Es fácil probar a partir del Teorema 4.1.13 que los grafos G con $L(G)$ perfecto tienen $O(|V(G)|)$ triángulos. Sea B un bosque construido a partir de G utilizando el algoritmo BFS. Cuando ningún subgrafo de G es isomorfo a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5, todas las aristas de G que unen dos vértices que se encuentran en el mismo nivel de T deben pertenecer a un triángulo con el padre de ambos en T . Por ser B un generado con BFS, todos los triángulos de G deben contener alguna de estas aristas. Utilizando el Teorema 4.1.14, es fácil ver que cuando $L(G)$ es coordinado, los triángulos de G se pueden encontrar en tiempo lineal a partir de estas aristas por un simple análisis de casos.

El algoritmo para encontrar los triángulos de G lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.15 *Existe un algoritmo lineal que determina la familia de triángulos de un grafo cuando su grafo de línea es coordinado.*

Demostración

Alcanza con mostrar un algoritmo para un grafo conexo que se puede ejecutar para cada componente conexa del grafo original. Tal algoritmo se muestra en la figura 4.1.

Entrada: Un grafo $G = (V(G), E(G))$ conexo

Salida: Una familia de triángulos $\mathcal{T}$ tal que cuando $L(G)$ es coordinado, todos los triángulos de G se encuentran en $\mathcal{T}$

1. Inicializar $\mathcal{T} = \emptyset$
2. Construir a partir de G un árbol B utilizando el algoritmo BFS donde la raíz de B sea el vértice de mayor grado de G .
3. Por cada arista (u, v) de G que une dos vértices hermanos de B , donde el padre de ambos es w y $d(u) \leq d(v)$, hacer:
 - Si $d(u) = 3$ y u tiene al menos un hijo z , agregar todos los triángulos de $\{u, v, w, z\}$ a $\mathcal{T}$. Volver al paso 3.
 - Si $d(u) = 3$, sea z el vecino de u con $z \neq v, w$. Si u, w, z no fueron marcados, agregar todos los triángulos de $\{u, v, w, z\}$ a $\mathcal{T}$ y marcar los vértices u, w, z . Volver al paso 3.
 - Si $d(u) = 2$ entonces agregar $\{u, v, w\}$ a $\mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ es una familia de triángulos G que, cuando $L(G)$ es coordinado, contiene todos los triángulos de G .

La correctitud del algoritmo es consecuencia del Teorema 4.1.14 mediante un análisis de casos. Vale la pena notar que $\mathcal{T}$ no tiene elementos repetidos.

El algoritmo es lineal porque cada iteración del ciclo se puede ejecutar en tiempo constante y el cálculo del árbol BFS se puede obtener en tiempo lineal. ■

Es fácil ver que si $\mathcal{T}$ es la familia de triángulos de G , se puede calcular $G \setminus E(\mathcal{T})$ en tiempo lineal simplemente removiendo las aristas de G cuando se van encontrando los triángulos.

El algoritmo para determinar si $L(G)$ es coordinado funciona utilizando el grafo G en lugar de $L(G)$. Para esto necesitamos el siguiente teorema:

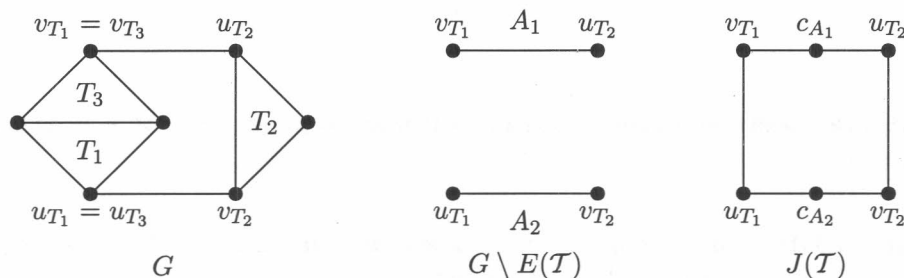
Teorema 4.1.16 [31] *Existe un algoritmo lineal que determina si G es un grafo de línea y de ser G un grafo de línea construye una preimagen del mismo.*

Teorema 4.1.17 *El problema de determinar si un grafo de línea es coordinado puede ser resuelto en tiempo lineal.*

Demostración

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de triángulos de un grafo G donde todo triángulo de $\mathcal{T}$ tiene un vértice de grado 2 o dos vértices mellizos de grado 3. Sea $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathcal{T}$. Si $d(v_1) = 2$, llamamos u_T, v_T a los vértices v_2, v_3 . Si $d(v_1) = 3$ y v_1, v_2 son mellizos, llamamos u_T y v_T a los vértices de $N(v_1) \cap N(v_2)$.

Definimos el grafo $J(\mathcal{T}) = (V, E)$ donde V tiene los vértices u_T, v_T por cada triángulo de $\mathcal{T}$ y un vértice c_A por cada componente conexa de $A \subseteq V(G \setminus E(\mathcal{T}))$; $(u_T, v_T) \in E$, $(u_T, c_A) \in E$ sii $u_T \in A$ y $(v_T, c_A) \in E$ sii $v_T \in A$.



Veamos que $L(G)$ es coordinado sii $G \setminus E(T)$ es bipartito y $J(T)$ es acíclico.

$\Rightarrow$) Por Teorema 4.1.14 $G \setminus E(T)$ es bipartito. Supongamos que existe C ciclo de $J(T)$. Por definición de J , sin pérdida de generalidad, $C = u_{T_1}, v_{T_1}, c_{A_1}, \dots, u_{T_k}, v_{T_k}, c_{A_k}, u_{T_1}$. Pero entonces por definición de J , existe un camino de u_{T_1} a v_{T_1} en G que no contiene vértices de $N(u_{T_1}) \cap N(v_{T_1})$. Llamemos $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ a T_1 . Por definición de u_{T_1} y v_{T_1} , si $d(v_1) = 2$ entonces $N[v_2] \cap N[v_3]$ no es un separador por aristas y si $d(v_1) = 3$ entonces $N[v_1]$ no es un separador por aristas. Entonces, por Teorema 4.1.14, $L(G)$ no es coordinado lo que es un absurdo.

$\Leftarrow$) Por Teorema 4.1.14, si $L(G)$ no es coordinado, o bien $G \setminus E(T)$ no es bipartito o bien:

Caso 1: existe $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathcal{T}$ con $d(v_1) = 2$ donde $N[v_2] \cap N[v_3]$ no es separador por aristas. En este caso llamamos $S = N[v_2] \cap N[v_3]$.

Caso 2: existe $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathcal{T}$ con $d(v_1) = 3$, v_1 mellizo de v_2 , donde $N[v_1]$ no es separador por aristas. En este caso llamamos $S = N[v_1]$.

Por definición de separador de aristas, en ambos casos existe un camino de u_T a v_T en G que contiene aristas de $E(G) \setminus E(S)$. Llamemos $C = u_T + C_1 + C_{T_1} + \dots + C_k + C_{T_k}, u_T$ a dicho camino donde $+$ indica concatenación de secuencias, C_i es un camino maximal entre vértices que no pertenecen a triángulos (que puede ser vacío) y C_{T_i} caminos con vértices de triángulos. Por definición, J no es acíclico.

El algoritmo entonces es el siguiente, cuya demostración es consecuencia del razonamiento anterior junto con el Teorema 4.1.14.

Entrada: Un grafo $L(G) = (V(G), E(G))$ conexo

Salida: Informa si $L(G)$ es coordinado o no.

- Calcular G con el algoritmo del Teorema 4.1.16.
- Calcular la familia $\mathcal{T}$ de triángulos de G con el algoritmo del Teorema 4.1.15.
- Verificar que todo triángulo de $\mathcal{T}$ tenga un vértice de grado 2 o dos vértices mellizos de grado 3. Si no verifica informar que $L(G)$ no es coordinado y terminar.
- Si $G \setminus E(T)$ no es bipartito, informar que $L(G)$ no es coordinado y terminar.
- Construir el grafo $H = J(T)$. Si H no es acíclico informar que $L(G)$ no es coordinado y terminar.
- Informar que $L(G)$ es coordinado.

■

Para finalizar mostramos cómo se pueden calcular los parámetros M y F de un grafo de línea coordinado.

Teorema 4.1.18 *Sea G un grafo. El problema de determinar $M(L(G))$ puede ser resuelto en tiempo $O(|E(G)|)$ cuando $L(G)$ es coordinado.*

Demostración

Calcular alguna preimagen G dado $L(G)$ se puede hacer en tiempo $O(|E(G)|)$ por Teorema 4.1.16. Vamos a ver que dado G podemos determinar $M(L(G))$ en tiempo $O(|E(G)|)$.

Sea $e = (v, w)$ una arista cualquiera de G y llamamos $t(e)$ a la cantidad de triángulos que contienen a e . Por Lema 4.1.2 una clique de $L(G)$ que contiene a e proviene de un triángulo de G que contiene a e o de la estrella de G con centro v o w . Para calcular $m_{L(G)}(e)$ podemos dividirlo en los siguientes casos.

- Si $t(e) = 0$. Entonces $m_{L(G)}(e) = 1 + x$ donde $x = 1$ si $d(v) > 1$ y $d(w) > 1$ y 0 en caso contrario.
- Si $t(e) > 0$. Entonces $m_{L(G)}(e) = t(e) + x + y$ donde $x = \min(d(v) - 2, 1)$ e $y = \min(d(w) - 2, 1)$.

Luego suponiendo que los grados de los vértices pueden ser obtenidos en tiempo constante, la complejidad queda determinada por calcular la cantidad de triángulos que contienen a cada arista. Por Teorema 4.1.15 el algoritmo es lineal. ■

Teorema 4.1.19 *Sea G un grafo. El problema de determinar $F(L(G))$ puede ser resuelto en tiempo $O(|E(G)|)$ cuando $L(G)$ es coordinado.*

Demostración

Es corolario del Teorema 4.1.18 y de que $L(G)$ es coordinado. ■

Esta es una considerable mejora, teniendo el cuenta el siguiente resultado que se prueba en la sección 3.2. Notar que si bien el teorema está escrito en función de G y no de $L(G)$, la demostración del mismo prueba que G es un grafo de línea.

Teorema 4.1.20 (3.2.4) *El problema de determinar $F(L(G))$ es NP-C incluso cuando $M(L(G)) = 2$, $\omega(L(G)) \leq 4$ y $L(G)$ no contiene diamantes.*

4.2. Grafos sin paws

En esta sección, damos una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos coordinados restringida a la clase de grafos sin paws. En concreto, vamos a probar que los grafos sin paws son coordinados si y solo si son perfectos (Teorema 4.2.8). Además, damos un algoritmo lineal para reconocer si un grafo sin paws es coordinado (Teorema 4.2.9).

La demostración se divide en dos casos: G anticonexo y G no anticonexo. En el caso no anticonexo, se prueba que las anticomponentes de G son conjuntos independientes (Lema 4.2.1) y se muestra un coloreo de $K(G)$ para este tipo de grafos (Teorema 4.2.6).

En el caso anticonexo, primero se prueba que si además es conexo, entonces G no tiene triángulos (Lema 4.2.2). Luego se muestra que si G es anticonexo, entonces G es perfecto si y solo si G es bipartito (Teorema 4.2.4). Luego, G resultará coordinado porque al ser bipartito es K -perfecto y CHH.

En esta sección también mostramos caracterizaciones de tres propiedades restringidas a los grafos sin paws:

- cuándo $K(G)$ tiene un hole (Teorema 4.2.10)
- cuándo $K(G)$ es perfecto (Teorema 4.2.12)
- cuándo G es clique-prefecto (Teorema 4.2.13)

Vamos a llamar *co-paw* al complemento de un paw. El siguiente es un lema de fácil demostración.

Lema 4.2.1 *Sea G un grafo sin co-paws no conexo. Entonces G es la unión de varios completos.*

Lema 4.2.2 *Sea G un grafo sin co-paws conexo y anticonexo. Entonces G no contiene $3K_1$.*

Demostración

Supongamos que no. Sea entonces H el subgrafo que induce $3K_1$ con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Como G es conexo, entonces existe un camino entre cada par de vértices de H . Sea C^* el más corto de estos caminos, $C^* = \{w_1, \dots, w_k\}$, con $k \geq 3$. Por simetría podemos asumir que $w_1 = v_1$ y $v_2 = w_k$. Como C^* es mínimo, C^* es un camino inducido; en particular, w_1 no es adyacente a w_3 . Para que w_1, w_2, w_3, v_3 no sea un co-paw, v_3 debe ser adyacente a w_2 o a w_3 . Si v_3 es adyacente a w_3 , entonces $k > 3$ (porque v_3 no es adyacente a v_2) y $v_3, w_3, \dots, w_k$ es un camino más corto que C^* , contradiciendo la minimalidad de C^* . Entonces, v_3 es adyacente a w_2 . Si $k > 3$, v_3, w_2, v_1 es un camino más corto que C^* , lo cual no puede ocurrir. Entonces $k = 3$. Llamemos $w = w_2 = w_{k-1}$.

Como w es completo a H y G es anticonexo, entonces existe un anticamino Z^* de algún v_i a w de longitud mínima, con $Z^* = \{v_i = z_1, \dots, z_j = w\}$ ($j \geq 3$), donde por simetría podemos suponer que $i = 1$.

Supongamos que v_3 no es adyacente a z_2 . Si $j = 3$, entonces v_1, w, v_3, z_2 induce un co-paw. Si $j > 3$, z_3 debe ser adyacente a v_1 y a v_3 , porque sino habría un anticamino más corto que Z^* entre v_1 y w o entre v_3 y w . Entonces, v_1, z_3, v_3, z_2 induce un co-paw.

Por lo tanto, z_2 es adyacente a v_3 y por simetría también lo es a v_2 . Entonces, v_3, v_2, v_1, z_2 induce un co-paw. ■

Lema 4.2.3 *Sea G un grafo conexo. G es perfecto, no contiene paws y tiene a lo sumo dos anticomponentes sii G es bipartito.*

Demostración

⇒) Si G no es anticonexo, por Lema 4.2.1 aplicado a $\overline{G}$, cada anticomponente de G es un conjunto independiente. Pero como G tiene a lo sumo 2 anticomponentes, entonces G es bipartito.

Si G es anticonexo, como G es conexo y no contiene paws, entonces por Lema 4.2.2 (aplicado a $\overline{G}$), G no contiene triángulos. Entonces, como además G es perfecto, por Lema 1.2.2 G no contiene ciclos de longitud impar. Y por lo tanto es bipartito.

⇐) Como G es bipartito, por Teorema 1.2.1 G es perfecto; G no contiene triángulos y por lo tanto no contiene paws; y G tiene a lo sumo 2 anticomponentes conexas. ■

El siguiente es un corolario directo que se utilizará en el algoritmo de reconocimiento.

Teorema 4.2.4 *Sea G sin paws, conexo y anticonexo. Entonces, G es perfecto sii G es bipartito.*

El siguiente teorema es un resultado conocido del álgebra.

Teorema 4.2.5 *Sean $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ y $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ tres secuencias de números de $\mathbb{N}_0$, donde:*

- $b_i > 0$ y $b_i \leq b_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq k$ y
- $x_i < b_i$ y $y_i < b_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i \times b_i^{i-1} = \sum_{i=1}^k y_i \times b_i^{i-1}\right) \text{ sii } (x_i = y_i \ \forall i : 1 \leq i \leq k)$$

Recordemos que $r(a, d)$ es el resto de dividir a a por d y que $a \equiv b \pmod{d}$ cuando $r(a, d) = r(b, d)$.

Teorema 4.2.6 *Sea G sin paws. Si G no es anticonexo, entonces G es coordinado.*

Demostración

Basta ver que la propiedad vale para los grafos G conexos por Lema 1.2.18. Por lo tanto vamos a suponer que G es conexo.

Llamemos $\mathcal{G}$ al la clase de los grafos cuyo complemento son uniones de completos. Como G no es anticonexo, entonces por Lema 4.2.1 $\overline{G}$ es una unión de completos, es decir, $G \in \mathcal{G}$. Como

para cualquier subgrafo inducido H de G , $\overline{H}$ es una unión de completos, entonces $\mathcal{G}$ es una clase hereditaria de grafos. Por Lema 1.2.14 basta ver que para todo $G \in \mathcal{G}$ ocurre que G es C-good.

Como $\overline{G}$ es una unión de completos, G tiene k anticomponentes conexas $A_1, \dots, A_k$ donde A_i es un conjunto independiente. Podemos suponer que $|A_i| \leq |A_{i+1}|$.

Las cliques de G tienen exactamente un vértice en cada anticomponente. Entonces, para un vértice $v \in A_j$, $m(v) = \prod_{i=1, i \neq j}^{i=k} |A_i|$. Por lo tanto, como A_1 es la anticomponente con menor cantidad de vértices, $M(G) = \prod_{i=2}^{i=k} |A_i|$.

Además, hay una relación biunívoca entre las cliques de G y las secuencias $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ donde $0 \leq a_i \leq |A_i| - 1$. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las posibles secuencias. Sea $c : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida de la siguiente forma:

$$c(0, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=2}^k a_i |A_i|^{i-2} \quad (4.1)$$

$$c(a_1, a_2, \dots, a_k) = c(a_1 - 1, r(a_2 - 1, |A_2|), \dots, r(a_k - 1, |A_k|)) \quad \text{si } a_1 > 0 \quad (4.2)$$

Como la cantidad de secuencias distintas $\langle 0, a_2, \dots, a_k \rangle$ con $0 \leq a_i \leq |A_i| - 1$ es $\prod_{i=2}^{i=k} |A_i|$, c utiliza a lo sumo $M(G)$ colores. Y si c es un coloreo válido entonces $M(G) = F(G)$, y G será C-good.

Veamos entonces que c es un coloreo válido. Consideremos dos secuencias $a = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $b = \langle b_1, \dots, b_k \rangle \in \mathcal{A}$, donde $a_1 \leq b_1$ y $c(a) = c(b)$. Vamos a probar por inducción en a_1 que $a = b$ o que a no interseca b (es decir, $a_i \neq b_i$ para todo $1 \leq i \leq k$).

Caso base $a_1 = 0$. Por 4.1

$$c(a) = c(0, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=2}^k a_i |A_i|^{i-2}$$

y por la aplicación b_1 veces de 4.2 y luego la aplicación de 4.1,

$$c(b) = c(0, r(b_2 - b_1, |A_2|), \dots, r(b_k - b_1, |A_k|)) = \sum_{i=2}^k r(b_i - b_1, |A_i|) \times |A_i|^{i-2}$$

Por lo tanto, como $c(a) = c(b)$ entonces

$$\sum_{i=2}^k a_i |A_i|^{i-2} = \sum_{i=2}^k r(b_i - b_1, |A_i|) \times |A_i|^{i-2}$$

Como $|A_i| \leq |A_{i+1}|$, entonces por Teorema 4.2.5, $a_i = r(b_i - b_1, |A_i|)$ para todo $2 \leq i \leq k$. Por lo tanto $a_i \equiv b_i - b_1 \pmod{|A_i|}$ para todo $2 \leq i \leq k$.

Si $a_1 = b_1$, entonces $b_1 = 0$. Como además $b_i < |A_i|$, entonces $a_i = b_i$ para todo i .

Si $a_1 < b_1$, entonces $0 < b_1$. Ahora, si $a_i = b_i$ entonces $b_1 \equiv 0 \pmod{|A_i|}$; lo cual no puede ser porque $0 < b_1 < |A_1| \leq |A_i|$.

Paso inductivo. En este caso $0 < a_1 \leq b_1$. Llamemos

$$\begin{aligned} a' &= \langle a_1 - 1, r(a_2 - 1, |A_2|), \dots, r(a_k - 1, |A_k|) \rangle \text{ y} \\ b' &= \langle b_1 - 1, r(b_2 - 1, |A_2|), \dots, r(b_k - 1, |A_k|) \rangle \end{aligned}$$

Entonces por 4.2,

$$\begin{aligned} c(a) &= c(a_1 - 1, r(a_2 - 1, |A_2|), \dots, r(a_k - 1, |A_k|)) = c(a') \\ c(b) &= c(b_1 - 1, r(b_2 - 1, |A_2|), \dots, r(b_k - 1, |A_k|)) = c(b') \end{aligned}$$

Por HI, $a' = b'$ o a' no interseca a b' . Es decir, $a_1 - 1 = b_1 - 1$ sii $r(a_i - 1, |A_i|) = r(b_i - 1, |A_i|)$ para todo $2 \leq i \leq k$ sii $a_i - 1 \equiv b_i - 1 \pmod{|A_i|}$ para todo $2 \leq i \leq k$. Como $0 \leq a_i, b_i < |A_i|$ entonces $a_i - 1 = b_i - 1$ sii $a_i = b_i$. Por lo tanto $a = b$ o a y b no intersecan. ■

Teorema 4.2.7 *Sea G sin paws. Si G es perfecto y anticonexo, entonces G es coordinado.*

Demostración

Sea G' un subgrafo inducido de G . Por Lema 1.2.18 basta ver que cada componente conexa de G' es C-good para ver que G' es C-good. Sea entonces H una componente conexa de G' .

Si H no es anticonexo, entonces por Teorema 4.2.6 H es coordinado y en particular es C-good.

Si H es anticonexo, como además es conexo y perfecto, entonces por el Lema 4.2.3 es bipartito. Entonces, por Teorema 1.2.13, G es C-good. ■

Teorema 4.2.8 *Sea G sin paws. G es coordinado sii G es perfecto.*

Demostración

$\Rightarrow$) Por Teorema 1.2.5.

$\Leftarrow$) Es consecuencia de los Teoremas 4.2.7 y 4.2.6. ■

Teorema 4.2.9 *El problema de determinar si un grafo sin paws es coordinado puede ser resuelto en tiempo lineal.*

Demostración

Un algoritmo para este problema es el siguiente:

Entrada: Un grafo G sin paws

Salida: Informa si G es coordinado o no.

1. Para cada componente conexa C de G hacer
2. Si C es anticonexo y no bipartito entonces indicar que G no es coordinado y terminar.
3. Indicar que G es coordinado.

La correctitud del algoritmo es consecuencia de los Teoremas 4.2.8 y 4.2.4.

Es fácil ver que hay un algoritmo para encontrar las componentes conexas de un grafo H en tiempo $O(|V(H)| + |E(H)|)$. Por lo tanto el paso 2, lleva tiempo $O(|V(G)| + |E(G)|)$. También hay algoritmos $O(|V(H)| + |E(H)|)$ que dicen si un grafo G es anticonexo y si un grafo G es bipartito. El costo total del paso 3 es la suma de aplicar estos algoritmos a cada componente conexa. Como las componentes conexas son disjuntas, el costo total es $O(|V(G)| + |E(G)|)$. ■

A continuación damos caracterizaciones del hecho que $K(G)$ tenga un hole y de que $K(G)$ sea perfecto para un grafo G sin paws.

Sean $A_1, \dots, A_s$ las anticomponentes de G y sea C un ciclo de G . Definimos R_j como el conjunto de aristas de C que inciden en algún vértice de A_j ; S_j como un cubrimiento mínimo de las aristas de $E(C) \setminus R_j$ por vértices de C .

Teorema 4.2.10 *Sea G un grafo sin paws conexo. Entonces, $K(G)$ contiene un hole $Q_1, \dots, Q_k$ sii ocurre alguna de las siguientes propiedades:*

- G es anticonexo y tiene un ciclo de longitud $k \geq 4$.
- G tiene $s \geq 2$ anticomponentes conexas $A_1, \dots, A_s$ y contiene un ciclo C de longitud $k \geq 4$ donde para cada j , $|A_j| \geq \frac{|R_j|}{2} + |S_j|$.

Demostración

⇐) Caso 1: G es anticonexo y tiene un ciclo C de longitud $k \geq 4$.

Como G es conexo y anticonexo, por Lema 4.2.2 (aplicado a $\overline{G}$), G no contiene triángulos. Entonces toda arista de C es una clique. Por lo tanto, las aristas de C forman un hole en $K(G)$ de longitud k .

Caso 2: G tiene $s \geq 2$ anticomponentes conexas $A_1, \dots, A_s$ y contiene un ciclo C de longitud k con $r_j = |R_j|$ y $s_j = |S_j|$. Como G no es anticonexo, entonces por Lema 4.2.1 (aplicado a $\overline{G}$) cada anticomponente de G es un conjunto independiente. Entonces cada clique de G se obtiene eligiendo exactamente un vértice de cada anticomponente (recordemos que por ser anticomponentes A_i es completo a A_j para todo $1 \leq i < j \leq s$).

Sea $v_1, \dots, v_k$ una numeración de los vértices de C . Lo que vamos a hacer, es construir una clique por cada arista de C de forma tal que estas cliques induzcan un hole en $K(G)$. Para determinar

qué vértices pertenecen a cada clique, vamos a etiquetar los vértices de G con números entre 1 y k , de forma tal que $Q_i = \{\text{los vértices etiquetados con } i\}$.

A cada vértice $v_i \in C$ lo etiquetamos con dos valores: $i - 1, i$. Sea A_j una anticomponente de G . A_j contiene al menos $|S_j|$ vértices que no pertenecen a C porque $|A_j| \geq \frac{|R_j|}{2} + |S_j|$ y porque por cada vértice de $C \cap A_j$ hay dos aristas en R_j (las que inciden en ese vértice).

Entonces por cada $v_i \in S_j$ se puede elegir un vértice w_{ij} que pertenezca a A_j y no a C tal que $w_{ij} = w_{lj}$ sii $l = i$. Etiquetamos entonces a w_{ij} con el valor i si no hubiera otro vértice de A_j etiquetado con el valor i , y etiquetamos a w_{ij} con el valor $i - 1$ si no hubiera otro vértice de A_j etiquetado con el valor $i - 1$.

Sea $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq s$. Veamos que en A_j hay exactamente un vértice etiquetado con el valor i . Por como fueron etiquetados los vértices de C , existen al menos dos vértices de C que fueron etiquetados con el valor i que son v_i, v_{i+1} . Si alguno de estos vértices pertenece a A_j entonces hay al menos un vértice numerado con el valor i en A_j . Si ninguno de estos vértices pertenece a A_j entonces alguno de ellos pertenece a S_j ya que sino la arista v_i, v_{i+1} no estaría cubierta. Entonces, en A_j existe al menos un vértice etiquetado con el valor i que es o bien w_{ij} o bien $w_{i+1,j}$. Como no hay dos vértices con la misma etiqueta en A_j entonces hay exactamente un vértice etiquetado con el valor i en A_j .

Sea ahora Q_i el conjunto de todos los vértices etiquetados con el número i . Como por cada anticomponente hay exactamente un vértice etiquetados con el valor i entonces Q_i es una clique. Q_i interseca con Q_{i+1} en v_{i+1} porque v_{i+1} fue etiquetado con i e $i + 1$. Ahora $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ para $|i - j| > 1$ porque sino tienen un vértice en común en alguna anticomponente A_l y dicho vértice tiene ambos números. Pero, por como se pusieron las etiquetas, los vértices de A_l tienen números consecutivos, entonces no puede pasar. Por lo tanto $Q_1, \dots, Q_k$ es un hole en $K(G)$.

$\Rightarrow$) Sea $\mathcal{Q} = Q_1, \dots, Q_k$ un hole de cliques de G y $C = v_1, \dots, v_k$ un ciclo de intersección de $\mathcal{Q}$. Recordar que por definición de ciclo de intersección, $v_i \in Q_{i-1} \cap Q_i$.

Si G es anticonexo, entonces vale el teorema. Supongamos ahora que G no es anticonexo. Por lo tanto por Lema 4.2.1 G esta formado por s anticomponentes conexas cada una de las cuales es un conjunto independiente. Llamemos a estas anticomponentes $A_1, \dots, A_s$.

Como por cada vértice $v_i \in A_j \cap C$ hay dos aristas en R_j entonces A_j tiene $\frac{|R_j|}{2}$ vértices en C .

Si $R_j = \emptyset$, entonces $A_j \cap C = \emptyset$. Luego, para cada $Q_i \in \mathcal{Q}$, como Q_i es clique, hay un vértice $w_i \in A_j \setminus C$. Como $\mathcal{Q}$ es un hole, cada w_i está en a lo sumo dos cliques de $\mathcal{Q}$. Entonces, $|A_j| \geq \lceil \frac{|C|}{2} \rceil$. Por otro lado, como $A_j \cap C = \emptyset$, S_j es un cubrimiento mínimo de C ; por lo tanto, como C es un ciclo, $|S_j| = \lceil \frac{|C|}{2} \rceil$. Se concluye entonces que, si $R_j = \emptyset$, entonces $|A_j| \geq \frac{|R_j|}{2} + |S_j|$.

Supongamos ahora que $R_j \neq \emptyset$. Como C es un ciclo y $R_j \neq \emptyset$, es fácil ver que el cubrimiento mínimo S_j de $E(C) \setminus R_j$ se puede elegir de forma tal que $V(S_j) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_{|S_j|}}\}$ donde para todo vértice $v_{i_l} \in S_j$, ocurre que $v_{i_l+1} \notin A_j$ y $v_{i_l+1} \notin S_j$. Notar que como S_j es mínimo, $v_{i_l} \notin A_j$ (porque sino se podría eliminar de S_j).

Para cada vértice $v_{i_l} \in S_j$, elegiremos un vértice $w_l \in (A_j \setminus C)$ (distinto para cada l). Los w_l así elegidos prueban que $|A_j| \geq \frac{|R_j|}{2} + |S_j|$.

Sea l tal que $1 \leq l \leq |S_j|$. Como Q_{i_l} es una clique, existe $w_l \in Q_{i_l} \cap A_j$. Por la elección de S_j ,

Q_{i_l} y Q_{i_h} no son consecutivas, entonces, como Q es un hole, $w_l \neq w_h$.

Veamos que $w_l \notin C$. Supongamos que $w_l \in C$, es decir, $w_l = v_h$ para algún $1 \leq h \leq k$.

Por como se eligió w_l , $w_l \in Q_l$. Pero además $v_h \in Q_{h-1} \cap Q_h$. Por lo tanto $w_l \in Q_{h-1} \cap Q_h \cap Q_{i_l}$. Entonces como Q es un hole de cliques, $i_l = h$ o $i_l = h - 1$.

Por la elección de S_j , $v_{i_l}, v_{i_l+1} \notin A_j$. Por lo tanto, como $w_l \in A_j$, entonces $i_l \neq h$ y $i_l + 1 \neq h$. Absurdo y por lo tanto ocurre que $w_l \notin C$.

En definitiva se concluye que $|A_j| \geq \frac{|R_j|}{2} + |S_j|$. ■

Corolario 4.2.11 *Sea G sin paws con al menos tres anticomponentes. Si toda anticomponente tiene al menos 3 vértices, entonces $K(G)$ contiene un C_5 y por lo tanto, no es perfecto.*

Demostración

Como G tiene al menos tres anticomponentes, entonces es conexo. Sean $A_1, \dots, A_s$ las anticomponentes de G y sea $v_1^j, \dots, v_{|A_j|}^j$ una numeración de los vértices de A_j para todo $1 \leq j \leq s$. Como las $A_1, \dots, A_s$ son anticomponentes, entonces A_i es completo a A_j para todo $1 \leq i < j \leq s$. Por lo tanto, podemos tomar el ciclo $C = v_1^1, v_1^2, v_1^3, v_2^2, v_2^1, v_1^1$.

Para $j \geq 4$ sea $S_j = \{v_1^1, v_2^2, v_3^3\}$ que es un cubrimiento mínimo de las aristas de $E(C) \setminus R_j = C$ por vértices. Sea además $S_1 = S_2 = \{v_1^3\}$ que es un cubrimiento mínimo de las aristas de $E(C) \setminus R_1$ y de $E(C) \setminus R_2$, y $S_3 = \{v_1^1, v_2^2\}$ que es un cubrimiento mínimo de las aristas de $E(C) \setminus R_3$.

Luego, como $\frac{|R_j|}{2} + |S_j| = 3 \leq |A_j|$, por Teorema 4.2.10 $K(G)$ contiene un C_5 . ■

Teorema 4.2.12 *Sea G conexo sin paws y perfecto. Son equivalentes:*

- (i) $K(G)$ es perfecto.
- (ii) $K(G)$ no contiene holes impares.
- (iii) G es bipartito o existe una anticomponente de G de a lo sumo dos vértices.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Los holes impares no son perfectos

(ii) $\Rightarrow$ (iii) El grafo $K(G)$ no contiene holes impares, en particular, $K(G)$ no contiene C_5 . Luego, por el contrareciproco del corolario 4.2.11, G tiene a lo sumo dos anticomponentes conexas o existe una anticomponente con a lo sumo dos vértices. Si G tiene a lo sumo dos anticomponentes conexas, como además G es conexo y perfecto, por Lema 4.2.3 G es bipartito.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si G tiene una anticomponente de a lo sumo dos vértices v_1, v_2 , estos vértices no son adyacentes y tienen grado $|V(G)| - 2$. Entonces por Lema 1.2.7 $K(G)$ es el complemento de un bipartito. Por lo tanto, por Teorema 1.2.1, $K(G)$ es perfecto.

Si G es bipartito, entonces por Teorema 1.2.6, $K(G) = L(G)$. Por lo tanto, por Teorema 1.2.1

$K(G)$ es perfecto. ■

Ahora damos una caracterización de los grafos sin paws clique-perfectos.

Teorema 4.2.13 *Sea G sin paws. G es clique-perfecto si y sólo si G es perfecto.*

Demostración

$\Rightarrow$) Por Lema 1.2.19 basta ver únicamente el caso en que G es conexo. Si G no es anticonexo, entonces por Teorema 4.2.6 G es coordinado y por Teorema 1.2.5 G es perfecto.

Si G es anticonexo, entonces por Lema 4.2.2 (aplicado a $\overline{G}$) G no contiene triángulos y por lo tanto G no contiene antiholes impares de longitud mayor a 5. Por otra parte, como G es clique-perfecto, entonces G no contiene holes impares porque los mismos no son clique-perfectos.

En consecuencia, G es perfecto.

$\Leftarrow$) Por Lema 1.2.19 basta ver únicamente el caso en que G es conexo. Como la clase de los grafos perfectos y sin paws es hereditaria, por Lema 1.2.15 solo hace falta ver que $\alpha_c(G) = \tau_c(G)$.

Si G es anticonexo, entonces por Lema 4.2.3 es bipartito. Entonces, por Teorema 1.2.13 G es clique-perfecto.

Si G no es anticonexo, entonces por Lema 4.2.1 (aplicado a $\overline{G}$) G tiene s anticomponentes conexas $A_1, \dots, A_s$ donde A_i es un conjunto independiente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|A_1| \leq |A_i|$ ($2 \leq i \leq s$). Llamemos $a = |A_1|$.

Toda clique de G esta formada por exactamente un vértice de cada A_i (recordar que por ser anticomponentes A_i es completo a A_j para todo $1 \leq i < j \leq s$). Sea $v_1^i, \dots, v_{|A_i|}^i$ una numeración de los vértices de A_i para todo $1 \leq i \leq s$. Para $1 \leq j \leq a$, sea $K_j = \{v_j^1, \dots, v_j^s\}$. Claramente K_j es una clique y además $K_j \cap K_i = \emptyset$ para todo $1 \leq i < j \leq s$. Por lo tanto $K_1, \dots, K_a$ es un conjunto independiente de cliques, lo cual implica que $\alpha_c(G) \geq a$.

Por otra parte A_1 es un clique transversal de G ya que en toda clique tiene que haber al menos un vértice de A_1 . Entonces $\tau_c \leq a$.

En conclusión, $a \leq \alpha_c(G) \leq \tau_c(G) \leq a$, y por lo tanto $\alpha_c(G) = \tau_c(G)$. ■

4.3. Grafos complemento de bosques

En esta sección, damos una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos coordinados restringidos a los complementos de los bosques. En concreto, vamos a probar que los complementos de los bosques son coordinados si y solo si no contienen ni el complemento de $2P_4$ ni el complemento de R (grafos definidos en la sección 2.1).

La idea de la demostración es la siguiente. Primero probaremos que si G es el complemento de un bosque, $K(G)$ es el complemento de un bipartito (Lema 4.3.1), y por lo tanto G resultará K -perfecto.

Luego vamos a probar que $\omega(K(G)) = M(G)$, es decir, que las cliques de G que forman la clique máxima de $K(G)$ tienen un vértice en común (Lema 4.3.7). Para probar esto, vamos a ver que hay una bipartición de $K(G)$ que cumple una propiedad particular que permite asegurar que uno de los dos conjuntos de la partición es una clique máxima y que además ese conjunto tiene un vértice en común. El Lema 4.3.2 muestra por qué esta propiedad particular implica que uno de los dos conjuntos de la partición es una clique máxima.

Para probar la existencia de esta partición, primero mostramos la forma que tiene un bosque cuando no contiene ni un $2P_4$ ni R ni antimellizos (Lemas 4.3.3 y 4.3.4). A esta forma particular la llamamos c -bosque. Luego, sabiendo que tienen la forma de c -bosque, mostraremos la existencia de la partición de $K(G)$ (Lemas 4.3.5 4.3.6).

Tanto la demostración de la forma de c -bosque como la de la existencia de la partición son por inducción en la cantidad de árboles.

Además, utilizando la caracterización y la definición de c -bosque, mostraremos un algoritmo lineal de reconocimiento de grafos coordinados para la clase de los complementos de bosques (Teorema 4.3.11).

A lo largo de la sección trabajaremos con árboles y bosques, en vez de con complementos de árboles y complementos de bosques. Para ello vamos a utilizar la siguiente definición.

Definición: Notamos con $S(G)$ al grafo $K(\overline{G})$. Es decir, $S(G)$ es el grafo de intersección de los conjuntos independientes maximales de G .

Lema 4.3.1 *Sea G un bosque. Entonces, $S(G)$ es trivial o es el complemento de un bipartito.*

Demostración

Si G no tiene aristas, $S(G)$ es un solo vértice, que es trivial. Sino, existe un vértice de grado 1. Entonces, por Lema 1.2.7 aplicado a $\overline{G}$, $K(\overline{G}) = S(G)$ es el complemento de un bipartito. ■

Definición: Una bipartición V_1, V_2 de $V(G)$, se dice *acumulable* (sobre V_2) si V_2 es un completo y existe un ordenamiento de $V_1 = v_1, \dots, v_{|V_1|}$ tal que para cada $v_i \in V_1$ hay un vértice $w_i \in V_2$ tal que w_i no es adyacente a v_i , pero es adyacente a v_j para todo j tal que $i < j \leq |V_1|$.

Lema 4.3.2 *Sea G un grafo, y sean V_1 y V_2 una bipartición de $V(G)$ acumulable sobre V_2 . Entonces, V_2 es clique máxima de G .*

Demostración

Sea K una clique máxima de G con $|V_1 \cap K|$ mínimo. Supongamos que $|V_1 \cap K| > 0$, sean $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ los vértices de $K \cap V_1$, con $i_1 < \dots < i_n$.

Sea $w_{i_1} \in V_2$ tal w_{i_1} no es adyacente a v_{i_1} , pero es adyacente a v_j para todo j con $i_1 < j \leq |V_1|$. Entonces, como $i_1 < i_j$, vale que para todo j con $1 < j \leq n$, w_{i_1} es adyacente a todos los vértices de $K \cap V_1$, salvo v_{i_1} . Como V_2 es completo, w_{i_1} es adyacente a todos los vértices de $K \cap V_2$. En definitiva, w_{i_1} es adyacente a todos los vértices de $K \setminus v_{i_1}$. Entonces, $K' = (K \setminus v_{i_1}) \cup w_{i_1}$ es otra clique máxima con $|V_1 \cap K'| < |V_1 \cap K|$. Absurdo. ■

Definición: Llamamos *subárbol* de un árbol T con raíz v a cualquier componente conexa de $T \setminus \{v\}$. Notar que los subárboles son árboles.

Definición: Decimos que un árbol T es un c-árbol si existe una raíz v tal que:

- todo vértice distinto de v tiene grado a lo sumo 2.
- el diámetro de T es menor o igual a 7.
- todo vértice está a distancia menor a 5 de v .
- T no tiene antimellizos.

Lema 4.3.3 Sea T un árbol. T no contiene antimellizos, ni un $2P_4$ ni un R sii T es un c-árbol.

Demostración

$\Leftarrow$) Supongamos que T contiene un $2P_4$. Sea v una raíz de T . Si v es un vértice de uno de los dos P_4 , como no hay vértices de grado mayor a 2 (salvo v), uno de los extremos del otro P_4 está a distancia mayor o igual a 5 de v .

Supongamos que v no está en ninguno de los dos P_4 . Si v es adyacente a un extremo de cada uno de los dos P_4 , entonces el árbol tiene diámetro al menos 8. Sino, como no hay vértices de grado mayor a dos (salvo v), alguno de los extremos de los dos P_4 está a distancia al menos 5 de v .

En cualquiera de los casos T no es un c-árbol.

Si T contiene un R , T tiene al menos 2 vértices de grado mayor o igual a 3, contradiciendo que T sea un c-árbol.

Por ser T un c-árbol, T no contiene antimellizos.

$\Rightarrow$) Caso 1: todos los vértices de T tienen grado menor o igual a 2, entonces T es un camino. Si el camino tiene longitud mayor o igual a 8, éste contiene un $2P_4$ (recordar que la longitud de P_i es $i - 1$). Entonces, podemos suponer que tiene longitud a lo sumo 7. Entonces es un c-árbol tomando v como el vértice del medio del camino si la longitud es impar o alguno de los dos vértices del medio del camino si la longitud es par.

Caso 2: existe $v \in V(T)$ con $d(v) \geq 3$, que consideramos raíz de T en lo que sigue de la demostración. Supongamos que hay un vértice $d_1 \neq v$ que tiene al menos 2 hijos (es decir, $d(d_1) \geq 3$). Sean d_2 y d_3 dos hijos de d_1 . Como d_2 y d_3 no son antimellizos, alguno tiene un hijo d_4 ; supongamos que es hijo de d_2 . Como T no tiene antimellizos, hay a lo sumo un hijo de v que no tiene hijos. Sea, entonces, $s_1 \neq d_1$ un hijo de v que tiene al menos un hijo (llamémoslo

s_2). Como, $d(v) \geq 3$, existe un vértice s_3 hijo de v que no es ni d_1 ni s_1 . Entonces, s_3, v, s_1, s_2 y d_4, d_2, d_1, d_3 forman dos P_4 donde la única arista posible entre ellos es (v, d_1) en el caso que d_1 sea hijo de v . Pero entonces T contiene un $2P_4$ cuando d_1 no es hijo de v o un R cuando d_1 es hijo de v . Absurdo. Por lo tanto, todos los vértices de $T \setminus \{v\}$ tienen grado a lo sumo 2.

Entonces, resta probar que no hay vértices a distancia 5 de v y que el diámetro de T es a lo sumo 7. Para esto basta ver que hay a lo sumo un vértice a distancia 4 de v .

Si hay un vértice a distancia 5 de v , el subárbol que lo contiene tiene un P_4 donde ningún vértice es hijo de v . Similarmente a lo anterior, tenemos s_1, s_2 y s_3 , que junto con v forman un P_4 con ningún vértice adyacente al primero. Por lo tanto T contiene un $2P_4$. Luego todo vértice está a distancia a lo sumo 4 de v . Ahora, si hay dos vértices a distancia 4 de v , esos vértices están en subárboles distintos. Entonces cada uno de estos subárboles contiene un P_4 y ambos son disjuntos. Absurdo. ■

Definición: Un c-bosque es un bosque donde toda componente conexa es un c-árbol y existe a lo sumo una componente conexa con más de 2 vértices.

Lema 4.3.4 Sea T un bosque. Entonces, son equivalentes:

- T no contiene ni un $2P_4$ ni un R y ninguna componente conexa de T tiene antimellizos.
- T es un c-bosque.

Demostración

$\Leftarrow$) Supongamos que T contiene un $2P_4$. Si los dos P_4 están en componentes conexas distintas, entonces T tiene dos componentes conexas con más de 2 vértices, contradiciendo que T sea un c-bosque. Si los dos P_4 están en la misma componente conexa (es decir el mismo árbol), por Lema 4.3.3 T no es un c-bosque. Absurdo y por lo tanto T no contiene $2P_4$.

Si T contiene un R , entonces algún árbol de T tiene al menos 2 vértices de grado mayor o igual a 3, contradiciendo que T sea un c-bosque. Por lo tanto T no contiene un R .

Como T es un c-bosque, ninguna componente conexa de T tiene antimellizos.

$\Rightarrow$) La demostración es por inducción en la cantidad de árboles de G . El caso base es el Lema 4.3.3.

Sea G un bosque de $k + 1$ árboles y T el árbol con menor cantidad de vértices de G . Por HI, $G \setminus T$ es un c-bosque.

Si $|T| \leq 2$, G es un c-bosque por definición.

Si $|T| = 3$, entonces T (que es una componente conexa) tiene antimellizos. Absurdo.

Si $|T| \geq 4$, como T no tiene antimellizos, entonces T contiene un P_4 . Pero, como T era el árbol de menor cantidad de vértices de G , hay otro árbol en $G \setminus T$ que tiene otro P_4 , que es disjunto del primero. Absurdo. ■

Lema 4.3.5 Sea T un c-árbol no trivial. Entonces, existe una bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de $V(S(T))$ acumulable sobre $\mathcal{V}_2$, donde además $\mathcal{V}_2$ es Helly.

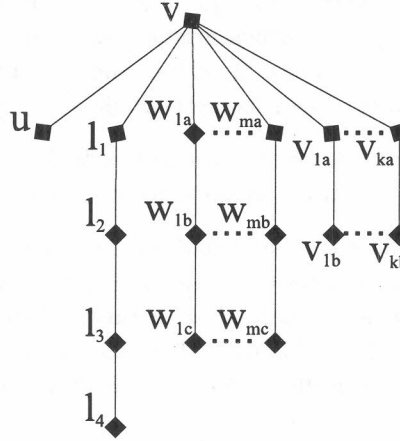


Figura 4.1: Estructura de un c-árbol.

Demostración

Como T es un c-árbol, tenemos lo siguiente. Sea v la raíz de T . Salvo v , no hay vértices con 2 hijos, y por lo tanto todos los subárboles son caminos. A lo sumo hay un subárbol L con un vértice a distancia 4 de v , con $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$. A lo sumo hay un subárbol u que es un solo vértice. El resto de los subárboles son caminos P_2 y P_3 . Sean $H_1, \dots, H_k$ los subárboles de T que son un P_2 , con $V(H_i) = \{v_{ia}, v_{ib}\}$, donde v_{ia} adyacente a v y a v_{ib} . Sean $W_1, \dots, W_m$ los subárboles de T que son un P_3 , con $V(W_i) = \{w_{ia}, w_{ib}, w_{ic}\}$, donde w_{ia} adyacente a v y a w_{ib} , y con w_{ib} adyacente a w_{ic} . Ver figura 4.1.

Dividimos a los conjuntos independientes maximales de T en dos: los de tipo I, que tienen a v y los de tipo II, que no contienen a v . Según si u y L existen o no, tenemos 4 casos.

Caso 1: ni u ni L existen.

Entonces los conjuntos de tipo I y II tienen la siguiente forma:

- Tipo I: $\{v\} \cup \{v_{ib}\}_{i \in I_k} \cup \{w_{ib}\}_{i \in C} \cup \{w_{ic}\}_{i \in (I_m \setminus C)}$ con $C \subseteq I_m$.
- Tipo II: $\{v_{ia}\}_{i \in A} \cup \{v_{ib}\}_{i \in (I_k \setminus A)} \cup \{w_{ia}\}_{i \in (I_m \setminus B)} \cup \{w_{ib}\}_{i \in B} \cup \{w_{ic}\}_{i \in (I_m \setminus B)}$ con $A \subseteq I_k$, $B \subseteq I_m$, donde A e $I_m \setminus B$ no son simultáneamente vacíos.

Claramente un conjunto de tipo I está determinado por el conjunto C y uno de tipo II por los conjuntos A y B . Analicemos como se intersecan estos conjuntos.

Sea X un conjunto de tipo I, y $C \subseteq I_m$ el conjunto de índices que lo determina. Sea Y un conjunto de tipo II, y $A \subseteq I_k$, $B \subseteq I_m$ los conjuntos que lo determinan. Si $A \neq I_k$, X e Y intersecan en algún v_{ib} . Si $C \cap B \neq \emptyset$, X e Y intersecan en un w_{ib} . Si $(I_m \setminus C) \cap (I_m \setminus B) \neq \emptyset$, X e Y intersecan en algún w_{ic} . En definitiva, X e Y no intersecan sii $A = I_k$ y $B = I_m \setminus C$. En conclusión, todo conjunto de tipo I no interseca a lo sumo a un conjunto de tipo II y viceversa.

Sean Y_1, Y_2 dos conjuntos de tipo II, y $A_1, A_2 \subseteq I_k$ y $B_1, B_2 \subseteq I_m$ los conjuntos que los determinan. Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, Y_1 e Y_2 intersecan en algún v_{ia} . Si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, Y_1 e Y_2 intersecan en algún w_{ib} . Si $(I_k \setminus A_1) \cap (I_k \setminus A_2) \neq \emptyset$, Y_1 e Y_2 intersecan en algún v_{ib} . Si $(I_m \setminus B_1) \cap (I_m \setminus B_2) \neq \emptyset$, Y_1 e Y_2 intersecan en algún w_{ia} . En definitiva, Y_1 e Y_2 no intersecan si $A_1 = I_k \setminus A_2$ y $B_1 = I_m \setminus B_2$. Es decir, todo conjunto de tipo II no interseca a lo sumo a un conjunto de tipo II.

Veamos ahora que, tanto si $k \geq 1$ como si $k = 0$, hay una bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de $V(S(T))$ acumulable sobre $\mathcal{V}_2$ con $\mathcal{V}_2$ Helly.

Si $k \geq 1$ (existe v_{1a} y v_{1b}), sean $\mathcal{V}_1 = \{ \text{los conjuntos independientes maximales de } T \text{ que contienen a } v_{1a} \}$ y $\mathcal{V}_2 = \{ \text{los conjuntos independientes maximales de } T \text{ que contienen a } v_{1b} \}$. Como v_{1b} es una hoja, por Lema 1.2.7 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ es una bipartición de $V(S(T))$, con $\mathcal{V}_2$ completo y Helly.

Probemos que para cada elemento $X \in \mathcal{V}_1$, hay un elemento $Y \in \mathcal{V}_2$, tal que Y no interseca a X , pero interseca a todos los otros elementos de $\mathcal{V}_2$. Entonces, con cualquier ordenamiento de $\mathcal{V}_1$, la bipartición resulta acumulable.

Notar que todos los conjuntos de tipo I están en $\mathcal{V}_2$, y por lo tanto, todos los elementos de $\mathcal{V}_1$ son de tipo II.

Sea $X \in \mathcal{V}_1$. X es de tipo II. Sean $A \subseteq I_k$ y $B \subseteq I_m$ los conjuntos que lo determinan.

Si $A = I_k$, sea $C = I_m \setminus B$, y sea Y el conjunto de tipo I determinado por C . X e Y no intersecan. Entonces, como Y no interseca a lo sumo a un conjunto de tipo II, interseca a todos los elementos de $\mathcal{V}_1$ que no sean X (que son conjuntos de tipo II).

Si $A \neq I_k$, sea $A' = I_k \setminus A$ y $B' = I_m \setminus B$. Sea Y el conjunto de tipo II determinado por A' y B' . X e Y no intersecan. Entonces, como todos los conjuntos de tipo II no intersecan a lo sumo a un conjunto de tipo II, Y interseca a todos los elementos de $\mathcal{V}_1$ que no sean X .

Ahora, si $k = 0$, sea la siguiente bipartición de $S(T)$: $\mathcal{V}_1 = \{ \text{los conjuntos de tipo II} \}$ y $\mathcal{V}_2 = \{ \text{los conjuntos de tipo I} \}$. Como los conjuntos de tipo I tienen a v , $\mathcal{V}_2$ es Helly y completo en $S(T)$.

Sea $X \in \mathcal{V}_1$ un conjunto de tipo II, y sea B el conjunto de índices que lo determina. En este caso no hace falta un conjunto de índices A ya que $I_k = \emptyset$ (porque $k = 0$). Sea $C = I_m \setminus B$, y sea Y el conjunto de tipo I determinado por C . Claramente, X e Y no intersecan. Como Y es un conjunto de tipo I, Y no interseca a lo sumo a un conjunto de tipo II, que en este caso es X . Por lo tanto, Y interseca a todos los conjuntos de $\mathcal{V}_1$ que no son X .

Entonces, con cualquier ordenamiento de $\mathcal{V}_1$, la bipartición resulta acumulable.

Caso 2: u existe, pero L no existe.

Los conjuntos de tipo I son los mismos que en el Caso 1. A todos los conjuntos de tipo II se les agrega el vértice u . Además se agrega el conjunto de tipo II para el cual, $A = I_m \setminus B = \emptyset$.

Sea la siguiente bipartición de $S(T)$: $\mathcal{V}_1 = \{ \text{los conjuntos de tipo I} \}$ y $\mathcal{V}_2 = \{ \text{los conjuntos de tipo II} \}$. Entonces, como u es una hoja, por Lema 1.2.7, $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ es una bipartición de $V(S(T))$, con $\mathcal{V}_2$ completo y Helly.

Sea X un conjunto de tipo I determinado por el conjunto C ; e Y un conjunto de tipo II deter-

minado por los conjuntos A y B . Al igual que en el Caso 1, X no interseca a Y si $A = I_k$ y $B = I_m \setminus C$. Notar que, a diferencia del Caso 1, para todo X de tipo I siempre existe Y de tipo II, tal que X no interseca a Y . En conclusión para cada conjunto de tipo I, hay un único conjunto de tipo II al cual no interseca y para cada conjunto de tipo II hay a lo sumo un conjunto de tipo I que no interseca. Entonces, con cualquier ordenamiento de $\mathcal{V}_1$, la bipartición resulta acumulable.

Caso 3: u no existe, pero L sí existe.

Entonces los conjuntos de tipo I y II tienen la siguiente forma:

- Tipo I: $\{v\} \cup \{v_{ib}\}_{i \in I_k} \cup \{w_{ib}\}_{i \in C} \cup \{w_{ic}\}_{i \in (I_m \setminus C)} \cup L_D$ con $C \subseteq I_m, D \in \{\{2, 4\}, \{3\}\}$
- Tipo II: $\{v_{ia}\}_{i \in A} \cup \{v_{ib}\}_{i \in (I_k \setminus A)} \cup \{w_{ia}\}_{i \in (I_m \setminus B)} \cup \{w_{ib}\}_{i \in B} \cup \{w_{ic}\}_{i \in (I_m \setminus B)} \cup L_E$, donde $A \subseteq I_k, B \subseteq I_m, E \in \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}\}$, excluyendo el caso $E = \{2, 4\}, A = I_m \setminus B = \emptyset$, que no determina un conjunto independiente maximal.

Como antes, los conjuntos de tipo I están determinados por los conjuntos C y D y los de tipo I por los conjuntos A, B y E .

Sean $\mathcal{V}_1 = \{\text{los conjuntos independientes maximales que contienen a } l_3\}$, y $\mathcal{V}_2 = \{\text{los conjuntos independientes maximales que contienen a } l_4\}$. Como l_4 es una hoja, por Lema 1.2.7 esta es una bipartición de $V(S(T))$, donde $\mathcal{V}_2$ es completo y Helly.

Sea Z el conjunto de tipo II determinado por $A = I_k, B = I_m$ y $E = \{1, 3\}$. Como $l_3 \in Z, Z \in \mathcal{V}_1$.

Ordenamos los conjuntos de $\mathcal{V}_1$ de la siguiente manera. Primero colocamos los conjuntos de tipo I de $\mathcal{V}_1$, y a esos le hacemos seguir los conjuntos de tipo II de $\mathcal{V}_1$, con la única condición de que Z quede último. Veamos que este ordenamiento hace que la partición sea acumulable sobre $\mathcal{V}_2$.

Sea $X \in \mathcal{V}_1$ de tipo I. Sean C y D los conjuntos que lo determinan. Como $l_3 \in X, D = \{3\}$. Sean $A = I_k, B = I_m \setminus C$ y $E = \{1, 4\}$, y sea Y el conjunto de tipo II determinado por A, B y E . Claramente Y no interseca a X .

Sea $X' \in \mathcal{V}_1$, distinto de X . Si X' es de tipo I, sean C' y D' , los conjuntos que lo determinan. Al igual que con $D, D' = \{3\}$. Entonces, como $X \neq X', C' \neq C$, haciendo que Y interseque a X' en algún w_{ib} . Si X' es de tipo II, sean A, B y E los conjuntos que lo determinan. Como $l_3 \in X', E = \{1, 3\}$, y entonces Y interseca a X' en l_1 .

Tenemos, entonces, que Y interseca a todos los elementos de $\mathcal{V}_1$ que no son X .

Sea $X \in \mathcal{V}_1$ de tipo II, distinto de Z . Sean A, B y E los conjuntos que lo determinan. Como $l_3 \in X, E = \{1, 3\}$. Sean $A' = I_k \setminus A, B' = I_m \setminus B$ y $E' = \{2, 4\}$, y sea Y el conjunto de tipo II determinado por A', B' y E' . Claramente Y no interseca a X . Notar que si X fuera igual a Z , Y no sería un conjunto independiente maximal.

Sea $X' \in \mathcal{V}_1$ de tipo II, distinto de X . Sean A'', B'' y E'' los conjuntos que lo determinan. Al igual que con $E, E'' = \{1, 3\}$. Como $X' \neq X, A'' \neq A$ o $B'' \neq B$. Entonces, Y interseca a X' en algún v_{ia} o en algún w_{ib} . Notar que si X' es de tipo I, Y no necesariamente lo interseca, por esto es que se tomó el ordenamiento de $\mathcal{V}_1$.

Resta ver que para Z hay un conjunto $Y \in \mathcal{V}_2$ tal que Y no interseca a Z . Como $\mathcal{V}_1$ fue ordenado de tal forma que Z es el último, a Y no se le requiere que interseque a ningún conjunto de $\mathcal{V}_1$. Tal Y es el conjunto de tipo I determinado por $C = \emptyset$ y $D = \{2, 4\}$.

Caso 4: u y L existen.

Los conjuntos de tipo I son los mismos que en Caso 3. A los conjuntos de tipo II se les agrega u . Además se agrega el conjunto de tipo II para el cual, $A = B = \emptyset$ y $D = \{2, 4\}$.

Sea la siguiente bipartición de $S(T)$: $\mathcal{V}_1 = \{ \text{los conjuntos de tipo I} \}$ y $\mathcal{V}_2 = \{ \text{los conjuntos de tipo II} \}$. Entonces, como u es un hoja, por Lema 1.2.7, $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ es una bipartición de $V(S(T))$, con $\mathcal{V}_2$ completo y Helly.

Sea $X \in \mathcal{V}_1$. X es de tipo I. Sean C y D los conjuntos que lo determinan.

Si $D = \{2, 4\}$, Sean $A = I_k$, $B = I_m \setminus C$ y $E = \{1, 3\}$, y sea Y el conjunto de tipo II determinado por A , B y E . Claramente, X e Y no intersecan. Sea $X' \in \mathcal{V}_1$, distinto de X . X' es de tipo I. Sean C' y D' , los conjuntos que lo determinan. Si $D' = \{1, 3\}$, Y interseca a X' en l_1 . Si $D' = \{2, 4\}$, como $X \neq X'$, $C \neq C'$ y entonces, Y interseca a X' en algún w_{ib} . En definitiva, Y interseca a todos los conjuntos de $\mathcal{V}_1$ que no son X .

Si $D = \{1, 3\}$, Y se define de la misma forma, pero eligiendo $E = \{2, 4\}$. Al igual que antes, Y interseca a todos los conjuntos de $\mathcal{V}_1$ que no son X .

Entonces, con cualquier ordenamiento de $\mathcal{V}_1$, la bipartición resulta acumulable. ■

Lema 4.3.6 *Sea G un c -bosque sin vértices aislados. Entonces, existe una bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de $V(S(T))$ acumulable sobre $\mathcal{V}_2$, donde además $\mathcal{V}_2$ es Helly.*

Demostración

La demostración es por inducción en la cantidad de árboles de G . El caso base es el Lema 4.3.5.

Sea G un c -bosque de $k + 1$ c -árboles. Sea T el c -árbol con menor cantidad de vértices de G . Por definición de c -bosque, $|T| \leq 2$. Pero como G no tiene vértices aislados, $|T| = 2$. Supongamos $V(T) = \{a, b\}$.

Por hipótesis inductiva, existe $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ bipartición de $V(S(G \setminus T))$ acumulable sobre $\mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_2$ es completo y Helly. Sea $X_1, \dots, X_k$ el ordenamiento de $\mathcal{V}_1$.

Sea X un conjunto independiente maximal de $G \setminus T$. Entonces, $X^a = X \cup \{a\}$ y $X^b = X \cup \{b\}$ son conjuntos independientes maximales de G . Notar que todo conjunto independiente maximal de G es de alguna de esas dos formas.

Sean $\mathcal{V}'_1 = \{X^a\}_{X \in \mathcal{V}_1} \cup \{X^b\}_{X \in \mathcal{V}_1}$ y $\mathcal{V}'_2 = \{X^a\}_{X \in \mathcal{V}_2} \cup \{X^b\}_{X \in \mathcal{V}_2}$ una partición de $S(G)$. Consideremos el siguiente ordenamiento de $\mathcal{V}'_1$: $X_1^a, X_1^b, \dots, X_k^a, X_k^b$. Vamos a ver que con este ordenamiento, la partición $\mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2$ resulta acumulable.

Sea $X' \in \mathcal{V}'_1$. Entonces, $X' = X_i^a$ o $X' = X_i^b$ para algún $X_i \in \mathcal{V}_1$. Podemos suponer $X' = X_i^a$.

Sea $Y_i \in \mathcal{V}_2$ tal que Y_i no interseca a X_i , pero interseca a X_j para todo j donde $i < j \leq k$ (que existe por definición de acumulable). Sea $Y' = Y_i^b$. Claramente, Y' no interseca a $X' = X_i^a$ e interseca a X_i^b . Sea $X_j^a \in \mathcal{V}_1'$ con $i < j \leq k$. Y' interseca a X_j^a porque Y_i interseca a X_j . Sea $X_j^b \in \mathcal{V}_1'$ con $i < j \leq k$. Y' interseca a X_j^b en b .

Como $\mathcal{V}_2$ es completo y Helly, existe un $h \in \bigcap_{X \in \mathcal{V}_2} X$. Pero entonces, por la definición de $\mathcal{V}_2'$, $h \in \bigcap_{X \in \mathcal{V}_2'} X$, y por lo tanto $\mathcal{V}_2'$ es completo y Helly. ■

Lema 4.3.7 *Sea G un c -bosque. Entonces $\omega(S(G)) = M(\overline{G})$.*

Demostración

Si G tiene un vértice aislado, entonces todos los conjuntos independientes de G lo contienen. Y por lo tanto, $S(G)$ es un completo, resultando $\omega(S(G)) = M(\overline{G})$.

Si G no tiene vértices aislados, por Lema 4.3.6 existe una bipartición $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de $V(S(G))$ acumulable sobre $\mathcal{V}_2$, donde además $\mathcal{V}_2$ es Helly. Por Lema 4.3.2, $\mathcal{V}_2$ es una clique máxima de $S(G)$. Pero como $\mathcal{V}_2$ es Helly, entonces $M(\overline{G}) = \omega(S(G))$. ■

Teorema 4.3.8 *Sea G un bosque. Son equivalentes:*

- (i) $\overline{G}$ es coordinado.
- (ii) G no contiene ni un $2P_4$ ni un R .
- (iii) El bosque G' que se obtiene de identificar los antimellizos de G es un c -bosque.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Como se vio en la sección 2.1, los complementos de $2P_4$ y de R no son C-good, y por lo tanto no son coordinados.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea G' el resultado de identificar todos los antimellizos de G . Como G no contiene un $2P_4$ ni un R entonces G' no contiene ni un $2P_4$ ni un R . Entonces, por Lema 4.3.4, G' es un c -bosque.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Como la clase los grafos que son complemento de bosques es hereditaria, por Lema 1.2.14 solo hace falta ver que $\overline{G}$ es C-good.

Por Lema 4.3.1, $S(G)$ es trivial o el complemento de un bipartito. Si $S(G)$ es trivial, es perfecto. Si $S(G)$ es el complemento de un bipartito, por el Teorema 1.2.1 $S(G)$ también es perfecto. Pero, como $S(G) = K(\overline{G})$, entonces $\overline{G}$ es K-perfecto, o sea, $\omega(K(\overline{G})) = \chi(K(\overline{G}))$. Como por definición $\chi(K(\overline{G})) = F(\overline{G})$, entonces basta ver que $\omega(K(\overline{G})) = M(\overline{G})$, es decir, que $\omega(S(G)) = M(\overline{G})$.

Como G' es un c -bosque, entonces, por Lema 4.3.7, $\omega(S(G')) = M(\overline{G'})$. Además como G' es el resultado de identificar todos los antimellizos de G , por Lemas 1.2.8 y 1.2.9 (aplicados a $\overline{G'}$) $S(G')$ es isomorfo a $S(G)$ y $M(\overline{G'}) = M(\overline{G})$. Por lo tanto, $\omega(S(G)) = M(\overline{G})$. ■

Corolario 4.3.9 Sea G el complemento de un bosque. Entonces G es coordinado sii G no contiene $\overline{2P_4}$ ni $\overline{R}$.

Corolario 4.3.10 Los grafos $\overline{2P_4}$ y $\overline{R}$ son mínimamente no coordinados.

Teorema 4.3.11 El problema de determinar si el complemento de un bosque es coordinado puede ser resuelto en tiempo lineal.

Demostración

Consideremos el siguiente algoritmo para determinar si el grafo es coordinado.

Entrada: Un grafo G complemento de un bosque.

Salida: Verdadero si G es coordinado, Falso si no lo es.

- 1 Calcular G_1 el grafo que resulta de contraer todos los mellizos de G .
- 2 Calcular G_2 complemento de G_1 .
- 3 Verificar que todas las componentes conexas de G_2 tienen a lo sumo 2 vértices salvo una, a la que llamamos T . Si no se verifica informar que G no es coordinado y terminar.
- 4 Verificar que T es un c-árbol. Sino no lo es, informar que G no es coordinado y terminar.
- 5 Informar que G es coordinado.

La correctitud del algoritmo es consecuencia del Teorema 4.3.8 y de la definición de c-bosque.

Como se mostró en la sección 1.2 (Teorema 1.2.11), el paso 1 se puede ejecutar en tiempo $O(|V(G)| + |E(G)|) = O(|V(G)|)$. El paso 2 se puede ejecutar en tiempo $O(|V(G_1)|^2) = O(|V(G)|^2)$.

El paso 3 fácilmente se puede ejecutar en tiempo $O(|V(G_2)| + |E(G_2)|) = O(|V(G_2)|)$.

Para el paso 4, si T es un camino solo hace falta verificar que la longitud de T sea a lo sumo 7. Sino se puede hacer un recorrido de T en BFS desde el vértice de mayor grado verificando que a lo sumo haya un vértice a distancia 4 de la raíz y que cada vértice tenga grado menor o igual a 2. Cualquiera de los casos se puede ejecutar en tiempo $O(|V(T)| + |E(T)|) = O(|V(G)|)$.

Entonces, el tiempo de ejecución total del algoritmo es $O(|V(G)|^2) = O(E(G))$. ■

4.4. Grafos sin gems, W_4 ni bulls

El objetivo de esta sección es probar que los grafos sin gems, W_4 ni bulls perfectos son K-perfectos (Teorema 4.4.11). Los grafos sin gems, W_4 ni bulls perfectos son claramente CHH porque son una subclase de los grafos sin gems ni W_4 . Como la clase es hereditaria, se obtendrá como corolario que estos grafos son clique-perfectos y coordinados (Teorema 4.4.12).

En la figura 4.2 se muestran tres grafos perfectos no K-perfectos. El de la izquierda no contiene gems ni W_4 y es mínimamente no coordinado; el del medio no contiene gems ni bulls; por último el de la derecha es el grafo $\overline{C}_7$ que no contiene bulls ni W_4 y que también es mínimamente no coordinado.

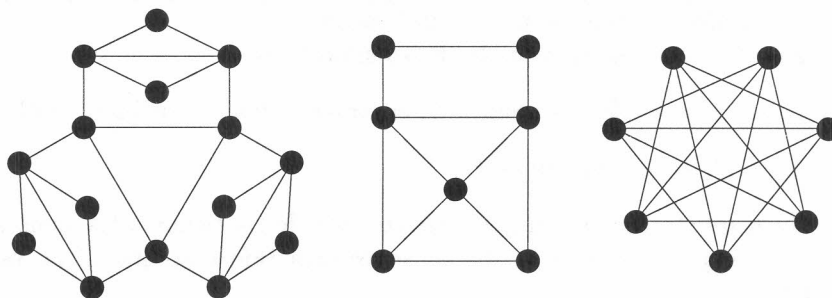


Figura 4.2: Ejemplos de grafos no K-perfectos. El de la izquierda no contiene gems ni W_4 y es mínimamente no coordinado. El del medio no contiene gems ni bulls. El de la derecha no contiene bulls ni W_4 y también es mínimamente no coordinado.

La sección se divide probando primero que los grafos clique de los grafos sin gems ni W_4 no contienen antiholes impares (Teorema 4.4.2). Luego para probar que no contienen holes impares, se verá que todo par de aristas consecutivas de un ciclo de intersección impar no son ambas propias (Lema 4.4.10) ni ambas impropias (Lema 4.4.9). Luego, el ciclo de intersección no era impar.

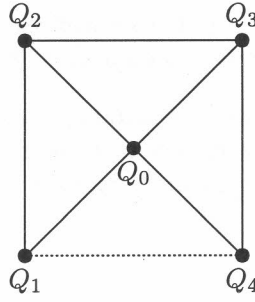
Las definiciones de arista propia e impropia se darán en el medio de la sección previamente a su utilización.

Empezaremos ahora demostrando que los grafos clique que se obtienen a partir de esta clase no contienen antiholes impares.

Lema 4.4.1 Sea G un grafo sin gems ni W_4 , entonces $K(G)$ no contiene gems ni W_4 .

Demostración

Supongamos que no. Entonces existen 5 cliques $Q_0, \dots, Q_4$ de G donde $Q_1, \dots, Q_4$ inducen un camino o un hole en $K(G)$ y Q_0 interseca a $Q_1, \dots, Q_4$.



Sean $V_2 = (Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2)$, $V_0 = (Q_0 \cap Q_2 \cap Q_3)$ y $V_3 = (Q_0 \cap Q_3 \cap Q_4)$ que por ser G CHH no son vacíos.

Como $V_3 \neq \emptyset$ entonces existe $v_3 \in V_3$. Como $Q_2 \cap Q_4 = \emptyset$ entonces $Q_2 \cap V_3 = \emptyset$. Luego, $v_3 \notin Q_2$ y por lo tanto existe $v_1 \in Q_2$ tal que v_1 no es adyacente a v_3 . Entonces, como $v_3 \in Q_0$, ocurre que $v_1 \notin Q_0$. Por el mismo argumento, deben existir $v_2 \in V_2$ y $v_4 \in Q_3 \setminus Q_0$ no adyacentes entre sí.

Como $v_2 \in V_2$ entonces $v_2 \in Q_2$ y como $v_1 \in Q_2$ entonces son adyacentes. Análogamente, v_3 y v_4 son adyacentes. Como $v_2 \in V_2$ y $v_3 \in V_3$ entonces ambos pertenecen a Q_0 y por lo tanto son adyacentes. Por lo tanto v_1, v_2, v_3, v_4 inducen un hole o un camino dependiendo de si v_1 y v_4 son o no adyacentes.

Por último, sea $v_0 \in V_0$. Como $v_0 \in Q_2 \cap Q_3$ entonces v_0 es adyacente a v_1 y a v_4 . Por lo tanto $v_0 \neq v_2, v_3$ y además es adyacente a ambos porque $v_0 \in Q_0$. Por lo tanto v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 inducen un gem o W_4 dependiendo de si v_4 y v_1 son o no adyacentes. ■

Teorema 4.4.2 Sea G un grafo sin gems ni W_4 , entonces $K(G)$ no contiene antiholes impares de longitud mayor a 5.

Demostración

Supongamos que $Q_1, \dots, Q_{2k+1}$ inducen un antihole de $K(G)$ con $k > 2$. Entonces Q_1, Q_4, Q_6, Q_3, Q_5 inducen un gem en $K(G)$. Absurdo, porque por Lema 4.4.1, $K(G)$ no contiene gems ni W_4 . ■

Los siguientes dos lemas son bastante simples, pero los usaremos repetidas veces en la caracterización.

Lema 4.4.3 Sea G un grafo sin gems ni W_4 y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Entonces:

1. C no posee cuerdas cortas, y
2. ningún vértice de C es adyacente a 3 vértices consecutivos de C .

Demostración

Si v_{i-1} es adyacente a v_{i+1} entonces como $Q(v_{i-1}, v_i)$ es una clique y $v_{i+1} \notin Q(v_{i-1}, v_i)$, existe $w_{i-1} \in Q(v_{i-1}, v_i)$ no adyacente a v_{i+1} . Por el mismo argumento se obtiene que existe

$w_{i+1} \in Q(v_{i+1}, v_i)$ no adyacente a v_{i-1} . Pero entonces $v_i, w_i, v_{i-1}, v_{i+1}, w_{i+1}$ inducen un gem o W_4 dependiendo de si w_{i-1} es adyacente o no a w_{i+1} . Por lo tanto, C no posee cuerdas cortas.

Si v_i es adyacente a v_j, v_{j+1}, v_{j+2} entonces como $Q(v_j, v_{j+1})$ es una clique y $v_i \notin Q(v_j, v_{j+1})$, existe $w \in Q(v_j, v_{j+1})$ no adyacente a v_i . Por otra parte, por lo recién probado en el ítem 1, v_j no es adyacente a v_{j+2} . Por lo tanto $v_{j+1}, w, v_j, v_i, v_{j+2}$ inducen un gem o W_4 dependiendo de si w es adyacente o no a v_{j+2} . ■

Lema 4.4.4 Sea G un grafo sin gems ni W_4 y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección donde v_i, v_j, v_l inducen un triángulo. Entonces

- Si $i+1 \neq j$ e $i+1 \neq l$ entonces v_j, v_l son ambos adyacentes a v_{i+1} o ambos no adyacentes a v_{i+1} .
- Si $i-1 \neq j$ e $i-1 \neq l$ entonces v_j, v_l son ambos adyacentes a v_{i-1} o ambos no adyacentes a v_{i-1} .

Demostración

Basta probar que el teorema vale para $i+1$, ya que para probarlo para $i-1$ se reindexan los vértices de C en el orden inverso.

Llamemos Q_i a la clique $Q(v_i, v_{i+1})$. Supongamos que v_{i+1} es adyacente a uno solo de $\{v_j, v_l\}$, que sin pérdida de generalidad asumimos es v_j . Como Q_i es una clique y $v_i, v_{i+1} \in Q_i$ son ambos adyacentes a v_j , tiene que existir $w \in Q_i$ no adyacente a v_j .

Entonces $v_i, v_l, v_j, v_{i+1}, w$ inducen un gem o un W_4 dependiendo de si w es adyacente o no a v_l . ■

Sea C un ciclo de G . Una arista $e \in C$ es impropia si e forma un triángulo con algún otro vértice de C . Una arista $e \in C$ es propia si e no es impropia. Un vértice $v \in C$ es solitario si v no induce un triángulo con otros dos vértices de C .

Antes de ir a los lemas que prueban que dos aristas consecutivas no son a la vez propias o impropias, necesitamos algunos lemas auxiliares. La idea intuitiva de estos lemas es que si un ciclo de intersección tiene un triángulo, entonces el triángulo se puede “rotar”.

Lema 4.4.5 Sea G un grafo sin bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo y sean $i', j', l' \in \{1, -1\}$. Si v_i, v_j, v_l inducen un triángulo, $v_{i+i'}$ no es adyacente ni a v_j ni a v_l , $v_{j+j'}$ no es adyacente ni a v_i ni a v_l ; y $v_{l+l'}$ no es adyacente ni a v_i ni a v_j . Entonces $v_{i+i'}, v_{j+j'}, v_{l+l'}$ inducen un triángulo.

Demostración

Intercambiando los índices, basta probar que $v_{i+i'}$ es adyacente a $v_{j+j'}$. Pero si no fueran adyacentes, entonces $v_i, v_j, v_l, v_{i+i'}, v_{j+j'}$ inducirían un bull, lo que no puede ocurrir. ■

Lema 4.4.6 Sea G un grafo sin gems, W_4 ni bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Si v_i, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo entonces v_{i+1}, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo o $v_{i+1}, v_{j-1}, v_{j+2}$ inducen un triángulo.

Demostración

Basta probar que el teorema vale para $i + 1$, ya que para probarlo para $i - 1$ se reindexan los vértices de C en el orden inverso.

Supongamos que v_{i+1}, v_j, v_{j+1} no inducen un triángulo. Por el ítem 1 del Lema 4.4.3 C no posee cuerdas cortas y por lo tanto $i \neq j - 1$. Aparte, $i \neq j$ ya que sino, v_i, v_j, v_{j+1} no inducen un triángulo. Luego por el Lema 4.4.4, v_{i+1} no es adyacente ni a v_j ni a v_{j+1} .

Como C no posee cuerdas cortas entonces v_j no es adyacente a v_{j+2} . Por el ítem 2 del Lema 4.4.3 v_i no puede ser adyacente a v_j, v_{j+1} y v_{j+2} . Pero entonces, como v_i, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo, v_{j+2} no es adyacente a v_i . De la misma manera vale que v_{j-1} no es adyacente a v_i ni a v_{j+1} .

En resumen, v_i, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo, v_{i+1} no es adyacente ni a v_j ni a v_{j+1} , v_{j-1} no es adyacente a v_i ni a v_{j+1} , v_{j+2} no es adyacente a v_i ni a v_j . Entonces por Lema 4.4.5 $v_{i+1}, v_{j-1}, v_{j+2}$ inducen un triángulo lo que prueba el lema. ■

Lema 4.4.7 Sea G un grafo sin gems, W_4 ni bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección donde v_i, v_{j-1}, v_{j+2} inducen un triángulo. Entonces:

- Si $i + 1 \neq j - 1$ entonces $v_{i+1}, v_{j-1}, v_{j+2}$ inducen un triángulo o v_{i+1}, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo.
- Si $i - 1 \neq j + 2$ entonces $v_{i-1}, v_{j-1}, v_{j+2}$ inducen un triángulo o v_{i-1}, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo.

Demostración

Basta probar solo el caso donde $i + 1 \neq j - 1$ ya que el otro caso se prueba numerando los vértices del ciclo en el orden inverso.

Por el ítem 1 del Lema 4.4.3 C no posee cuerdas cortas y por lo tanto, $i \neq j + 1$. Supongamos que $v_{i+1}, v_{j-1}, v_{j+2}$ no inducen un triángulo. Luego, por Lema 4.4.4, v_{i+1} no es adyacente a ninguno de v_{j-1}, v_{j+2} .

Como C no posee cuerdas cortas, entonces $j \neq i$. Además v_{j-1}, v_i, v_{j+2} inducen un triángulo, entonces por Lema 4.4.4 v_j es adyacente a v_{j+2} y v_i o a ninguno de los dos. Como C no posee cuerdas cortas, entonces v_j no es adyacente a v_{j+2} . Por lo tanto v_j no es adyacente a v_i . Numerando los vértices del ciclo en el orden inverso y utilizando la misma argumentación, surge que v_{j+1} no es adyacente a v_i ni a v_{j-1} .

En resumen, v_i, v_{j-1}, v_{j+2} inducen un triángulo; v_{i+1} no es adyacente a v_{j-1}, v_{j+2} ; v_j no es adyacente a v_i, v_{j+2} ; v_{j+1} no es adyacente a v_i ni a v_{j-1} . Entonces por Lema 4.4.5 v_{i+1}, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo y vale el lema. ■

Lema 4.4.8 Sea G un grafo perfecto sin gems, W_4 ni bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Entonces ningún v_i es solitario.

Demostración

Supongamos que no. Por Lema 1.2.2 existen tres vértices de C que inducen un triángulo. Por lo tanto, podemos tomar un vértice v_i solitario tal que v_{i+1} no lo sea. Por definición, existen j, l tales que v_{i+1}, v_j, v_{j+l} inducen un triángulo. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $i+1 < j < j+l$ donde tomamos l lo mínimo posible. Como v_i es solitario, $i \neq j, j+l$.

Si $l = 1$, es decir, v_{i+1}, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo, entonces por Lema 4.4.6 (tomando $i := i+1$, $j := j$ y $j+1 := j+1$) v_i, v_j, v_{j+1} inducen un triángulo o v_i, v_{j-1}, v_{j+2} inducen un triángulo lo que contradice el hecho de que v_i es solitario. Por el ítem 1 del Lema 4.4.3 C no posee cuerdas cortas y en consecuencia v_j no es adyacente a v_{j+2} . Por lo tanto $l \geq 3$.

Como $l > 2$ entonces $j+1 \neq j+l$. Por otra parte, $j+1 \neq i+1$ porque $i+1 < j+1 < j+l$. Por Lema 4.4.4 (tomando $i := j$, $j := i+1$, $l := j+l$) $v_{j+1}, v_{i+1}, v_{j+l}$ inducen un triángulo o v_{j+l}, v_{i+1} no son adyacentes a v_{j+1} . La elección de j y l fue de manera que l sea mínimo, entonces v_{j+1} no es completo a v_{j+l}, v_{i+1} ya que hubiéramos elegido v_{j+1} en lugar de v_j . Por lo tanto v_{j+1} no es adyacente ni a v_{j+l} ni a v_{i+1} . Por el mismo razonamiento (reindexando los vértices de C en el orden inverso), v_{j+l-1} no es adyacente ni a v_j ni a v_{i+1} .

En resumen, v_{i+1}, v_j, v_{j+l} inducen un triángulo; v_i no es adyacente ni a v_j ni a v_{j+l} ; v_{j+1} no es adyacente ni a v_{j+l} ni a v_{i+1} ; v_{j+l-1} no es adyacente ni a v_j ni a v_{i+1} . Entonces por Lema 4.4.5, v_i, v_{j+l-1}, v_{j+1} inducen un triángulo lo que contradice que v_i es solitario. ■

Lema 4.4.9 Sea G un grafo perfecto sin gems, W_4 ni bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Entonces C no contiene dos aristas consecutivas impropias.

Demostración

Supongamos que no. Entonces existen v_{i-1}, v_i, v_{i+1} donde v_{i-1}, v_i, v_j inducen un triángulo y v_i, v_{i+1}, v_{j+h} inducen un triángulo. Tomemos j, h tales que $|h|$ sea mínimo restringido a que v_{i-1}, v_i, v_{i+1} no pertenecen al conjunto $I = \{v_j, v_{j+sg(h)}, \dots, v_{j+h}\}$. Notar que siempre se pueden conseguir j y h porque $i-1, i, i+1$ son consecutivos. Para simplificar la notación, vamos a reindexar los vértices de I de j a $|h|$ llamando $w_j = v_j$, y $w_{j+s} = v_{j+s \times sg(h)}$ para $1 \leq s \leq |h|$. A partir de esta reindexación, vamos a llamar l a $|h|$.

Por el ítem 2 del Lema 4.4.3 w_j no puede ser adyacente a v_{i-1}, v_i, v_{i+1} , por lo tanto como es adyacente a v_{i-1} y v_i , no es adyacente a v_{i+1} . De la misma forma, w_{j+l} no es adyacente a v_{i-1} . Por lo tanto, $w_{j+l} \neq w_j$ y en consecuencia $l > 0$.

Por el ítem 1 del Lema 4.4.3 C no posee cuerdas cortas y por ende, v_{i-1} no es adyacente a v_{i+1} . Si $l = 1$ entonces $v_i, v_{i-1}, w_j, w_{j+1}, v_{i+1}$ inducen un gem lo que es una contradicción. Por lo tanto $l \geq 2$.

Dado que $l \geq 2$, v_{i-1}, v_i, w_{j+1} no inducen un triángulo porque sino habríamos elegido w_{j+1} en lugar de w_j lo que contradice la minimalidad de $l = |h|$. Claramente $w_{j+1} \in I$ y $v_i, v_{i-1} \notin I$ lo que muestra que son distintos. Pero entonces, por Lema 4.4.6 $w_{j+1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo.

Supongamos que $l = 2$. Entonces $w_{j+l} = w_{j+2}$ es adyacente a v_{i+1} . Como w_{j+1} es adyacente a v_{i+1} y $v_i \neq w_{j+2}$, w_{j+1} entonces por Lema 4.4.4 v_i es adyacente a w_{j+1} y a w_{j+2} o no es adyacente a ninguno. Como v_i es adyacente a $w_{j+2} = w_{j+l}$ entonces v_i es adyacente a w_j, w_{j+1} y w_{j+2} lo que es una contradicción al ítem 2 del Lema 4.4.3.

Si $w_{j+2} = v_{i-2}$ entonces $w_{j+3} = v_{j+3} = v_{i-1}$ ($h > 0$) o $w_j = v_j = v_i$ ($h < 0$). Si $w_{j+2} = v_{i+1}$, entonces $w_{j+1} = v_i$ ($h > 0$) o $w_{j+3} = v_{i+1}$ ($h < 0$). Ninguno de los dos casos ($w_{j+2} = v_{i-2}$ o $w_{j+2} = v_{i+1}$) puede pasar porque $w_j, w_{j+1}, w_{j+3} \in I$ y $v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \notin I$. Por lo tanto $w_{j+2} \neq v_{i-2}, v_{i+1}$ y como $w_{j+1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ induce un triángulo entonces por Lema 4.4.4, $w_{j+2}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo o w_{j+2} no es adyacente ni a v_{i-2} ni a v_{i+1} .

Si $w_{j+2}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo, definimos $a = 3$, si w_{j+2} no es adyacente ni a v_{i-2} ni a v_{i+1} , definimos $a = 2$. Como recién probamos, para $a = 2$, se cumple que w_{j+a} no es adyacente ni a v_{i-2} ni a v_{i+1} y $w_{j+a-1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo; y que $a < l$. Probamos ahora que también vale cuando $a = 3$.

Si $a = 3$, $w_{j+2}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo, entonces como v_{i+1} es adyacente a w_{j+1}, w_{j+2} y no es vecino de $w_{j+1}, w_{j+2}, w_{j+3}$ a la vez, surge que v_{i+1} no es adyacente a w_{j+3} . En tal caso $l > 3$. Por los mismos argumentos de antes (cambiando $j+2$ por $j+3$) se verifica que $w_{j+3} \neq v_{i-2}$, $w_{j+3} \neq v_{i+1}$. Por Lema 4.4.4, sabiendo que w_{j+3} no es adyacente a v_{i+1} , w_{j+3} no es adyacente ni a v_{i-2} ni a v_{i+1} .

En definitiva, w_{j+a} no es adyacente ni a v_{i-2} ni a v_{i+1} y $w_{j+a-1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ inducen un triángulo; $a < l$. Entonces, por Lema 4.4.7 w_{j+a}, v_{i-1}, v_i inducen un triángulo. Absurdo, porque los triángulos $\{w_{j+a}, v_{i-1}, v_i\}$ y $\{w_{j+l}, v_i, v_{i+1}\}$ contradice la elección de j y h de forma tal que $l = |h|$ sea mínimo (notar que con esta elección la distancia entre w_{j+a} y w_l es $l - a$). ■

Lema 4.4.10 Sea G un grafo perfecto sin gems, W_4 ni bulls y $C = v_1, \dots, v_{2k+1}$ un ciclo de intersección. Entonces C no contiene dos aristas consecutivas propias.

Demostración

Supongamos que no. Entonces existen v_{i-1}, v_i, v_{i+1} donde (v_{i-1}, v_i) y (v_i, v_{i+1}) no pertenecen a ningún triángulo formado por vértices de C . Por Lema 4.4.8 v_i no es solitario y por lo tanto forma un triángulo con dos vértices v_{i-j}, v_{i+l} . Tomemos $l \geq 1$ mínimo, y luego de fijar l tomemos $j \geq 1$ mínimo. Podemos suponer que $j \geq l$ cambiando la indexación de los vértices al orden opuesto de ser necesario. Podemos suponer además que $i - j < i < i + l$.

Claramente $l > 1$ porque sino, v_{i+1}, v_i, v_{i-j} inducen un triángulo que contradice el hecho de que (v_{i+1}, v_i) es una arista propia.

Como (v_i, v_{i+1}) es propia, entonces v_{i+1}, v_i, v_{i-j} no inducen un triángulo y v_{i+1}, v_i, v_{i+l} tampoco, entonces v_{i+1} no es adyacente ni a v_{i-j} ni a v_{i+l} .

Repetiendo, $j - 1 \geq l - 1 > 0$ y $-j + 1 \leq i < l$. Por otra parte, ni v_{i+l-1}, v_i, v_{i-j} ni v_{i+l}, v_i, v_{i-j+1} inducen triángulos porque elegimos l mínimo y luego de fijar l , tomamos j mínimo. Entonces por Lema 4.4.4 v_{i+l-1} no es adyacente ni a v_i ni a v_{i-j} y v_{i-j+1} no es adyacente ni a v_i ni a v_{i+l} . Recordando que v_{i+1} no es adyacente ni a v_{i+l} ni a v_{i-j} , surge por Lema 4.4.5 que $v_{i+1}, v_{i+l-1}, v_{i-j+1}$ inducen un triángulo. Reindexando los vértices de C en el orden inverso y cambiando los roles de j y l surge que $v_{i-1}, v_{i+l-1}, v_{i-j+1}$ inducen un triángulo.

Por el ítem 1 del Lema 4.4.3 C no posee cuerdas cortas y por lo tanto $l > 2$. Ahora hay dos posibilidades, $l = j = 3$ o $j > 3, l \geq 3$.

Caso $l = j = 3$: Instanciando l y j , tenemos que $v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i-2}$ inducen un triángulo y $v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i-2}$ inducen otro triángulo. Como $Q = Q(v_{i-2}, v_{i-1})$ es una clique y $v_{i-2}, v_{i-1} \in Q$ son ambos adyacentes a v_{i+2} , entonces existe $w \in Q$ no adyacente a v_{i+2} . C no posee cuerdas cortas, por lo tanto v_{i-1}, v_{i+1} no son adyacentes y en consecuencia $w, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+1}$ inducen un hole o un camino, dependiendo de si v_{i+1} y w son o no adyacentes. Además, v_{i-2} es adyacente a $v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+1}, w$ y por lo tanto $v_{i-2}, w, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+1}$ inducen un gem o W_4 , lo que contradice la hipótesis.

Caso $l \geq 3, j > 3$: Claramente $i - j + 2 < i < i + 1 < i + l$ y por lo tanto $-j + 2 \neq l - 1$ y $i - j + 2 \neq i + 1$. Entonces, por Lema 4.4.4 v_{i-j+2} es adyacente a v_{i+1}, v_{i+l-1} (caso A) o no adyacente a ninguno (caso B).

En el caso A, por el ítem 2 del Lema 4.4.3, v_{i+l-1} no es adyacente a v_{i-j+1}, v_{i-j+2} y v_{i-j+3} y como es adyacente a los primeros dos, entonces v_{i-j+3} no es adyacente a v_{i+l-1} . Por el mismo argumento tomando $i + 1$ en lugar de $i + l - 1$, v_{i-j+3} no es adyacente a v_{i+1} .

Sea $a = j - 3$ en el caso A y $a = j - 2$ en el caso B. En ambos casos $v_{i-a-1}, v_{i+l-1}, v_{i+1}$ inducen un triángulo y v_{i-a} no es adyacente ni a v_{i+l-1} ni a v_{i+1} .

Si v_{i+l} es adyacente a v_{i-a-1} , entonces como v_{i+l-1} también es adyacente a v_{i-a-1} y $Q' = Q_C(v_{i+l}, v_{i+l-1})$ es una clique, existe $w \in Q'$ no adyacente a v_{i-a-1} . Como ya dijimos v_{i+l} no es adyacente a v_{i+1} , pero entonces $v_{i+l-1}, w, v_{i+l}, v_{i-a-1}, v_{i+1}$ inducen un gem o W_4 dependiendo de si w es o no adyacente a v_{i+1} . Por lo tanto v_{i+l} no es adyacente a v_{i-a-1} .

Resumiendo, $v_{i-a-1}, v_{i+l-1}, v_{i+1}$ inducen un triángulo y v_{i-a} no es adyacente ni a v_{i+l-1} ni a v_{i+1} ; v_{i+l} no es adyacente a v_{i-a-1} ni a v_{i+1} ; y como (v_i, v_{i+1}) es una arista propia, v_i no es adyacente ni a v_{i+l-1} ni a v_{i-a-1} . Entonces por Lema 4.4.5 v_{i-a}, v_{i+l}, v_i inducen un triángulo. Absurdo porque $a < j$ y habíamos tomado j mínimo. ■

Teorema 4.4.11 *Sea G perfecto sin gems, W_4 ni bulls. Entonces G es K -perfecto.*

Demostración

Supongamos que no. Por Teorema 4.4.2 $K(G)$ no contiene antiholes impares de longitud mayor a 5. Por lo tanto $K(G)$ tiene un hole impar y debe existir un ciclo de intersección impar $v_1, \dots, v_{2k+1}$ en G . Llamemos $e_i = (v_i, v_{i+1})$, entonces por Lemas 4.4.10 y 4.4.9 podemos asumir que e_1 es impropio y e_2 es propio. Aplicando sucesivamente estos lemas se llega a que e_{2k+1} es impropio y por lo tanto e_1 es propio. Absurdo pues e_1 también es impropio, por lo tanto vale el teorema. ■

El siguiente es un corolario del Lema 1.2.17 y del Teorema 4.4.11, teniendo en cuenta que los grafos sin gems ni W_4 son CHH y que los antiholes de longitud $6k + 3$ para $k \geq 1$ (los únicos grafos clique-perfectos que no son perfectos) contienen gems.

Teorema 4.4.12 *Sea G sin gems, W_4 ni bulls. Entonces son equivalentes:*

- G es clique-perfecto.
- G es coordinado.
- G es perfecto.

El siguiente es un corolario de los Teoremas 1.2.3 y 4.4.12.

Corolario 4.4.13 *El problema de determinar si G es coordinado/clique-perfecto es polinomial para la clase de grafos sin gems, W_4 ni bulls.*

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

En esta tesis trabajamos principalmente con grafos coordinados aunque también lo hicimos con grafos clique-perfectos. Ambas clases son variantes de los grafos perfectos y en particular los grafos coordinados son perfectos. Una clase de grafos importante en la intersección de ambos son los grafos {CH, K-perfectos}-hereditarios.

En el capítulo 2 mostramos grafos mínimamente no coordinados que fuimos encontrando a lo largo de nuestro trabajo. En especial, mostramos una familia exponencial de grafos mínimamente no coordinados fijada una cantidad de vértices y aristas. Mostramos como se pueden construir grafos mínimamente no coordinados con $M = 3$ y otras clases de grafos mínimamente no coordinados con $M > 3$.

La cantidad de grafos mínimamente no coordinados dificulta la tarea de encontrar caracterizaciones por subgrafos prohibidos minimales. Una tarea posible sería encontrar una definición de la familia de los grafos mínimamente no coordinados (para algún M). En este sentido se podrían tratar de generalizar las operaciones para construirlos y extender las definiciones de *cambiadores* y *mantenedores* para $M > 3$ y para más conectores.

En el capítulo 3 analizamos la complejidad del problema de determinar si un grafo es coordinado. Como resultado importante, obtuvimos que el problema es NP-hard en general y que aún restringido a la clase de grafos G sin gems ni C_4 , $M(G) \leq 3$, $\Delta(G) \leq 4$ y $\omega(G) \leq 3$ es NP-completo. Este resultado es el mejor posible en el siguiente sentido: para $M(G) \leq 2$ ó $\Delta(G) \leq 3$ ó $\omega(G) \leq 2$ el problema es polinomial.

Como trabajo futuro queda encontrar otras clases para las cuales el problema sea NP-completo. En particular hay tres clases de interés con las que trabajamos en esta tesis: los grafos complementos de bipartitos, los grafos arco-circulares Helly y los grafos sin bulls.

Por otro lado, aún no se conoce si existe un algoritmo polinomial para el problema de determinar si un grafo es clique-perfecto. Los grafos clique-perfectos y coordinados tienen cierta similitud en cuanto a su definición, y comparten varias propiedades como se muestra en [7] y [8]. En este sentido creemos que sería valioso intentar hacer una tarea similar a la hecha con los grafos coordinados para los grafos clique-perfectos. Otra posibilidad sería intentar una reducción del problema de reconocimiento de grafos coordinados al de los clique-perfectos.

En el capítulo 4 probamos caracterizaciones parciales por subgrafos prohibidos para coordinados

Clase de grafos	Subgrafos prohibidos	Reconocimiento	Referencia
Grafos de línea	pirámide, holes impares	Lineal	4.1.8
Grafos sin paws	holes impares	Lineal	4.2.8
Complemento de bosques	$\overline{\mathcal{H}}$ y $2P_4$	Lineal	4.3.8
Grafos sin gems, W_4 ni bulls	holes impares	Polinomial	4.4.12

Cuadro 5.1: Resumen de resultados de las caracterizaciones parciales para grafos coordinados

Clase de grafos	Subgrafos prohibidos	Reconocimiento	Referencia
Grafos de línea	pirámide, holes impares	Lineal	[5]
Grafos sin paws	holes impares	Lineal	4.2.13
Grafos sin gems, W_4 ni bulls	holes impares	Polinomial	4.4.12

Cuadro 5.2: Resumen de resultados de las caracterizaciones parciales para grafos clique-perfectos

y clique-perfectos. Todas las caracterizaciones llevan a algoritmos polinomiales para el problema de reconocimiento. En la tabla 5.1 se muestra el resumen para los grafos coordinados y en la tabla 5.2 el resumen para los grafos clique-perfectos.

Como trabajo a futuro quedan encontrar otras caracterizaciones por subgrafos prohibidos. En particular, se conoce la caracterización por subgrafos prohibidos (no todos minimales) de los grafos sin diamantes clique-perfectos[5]. Conjeturamos que los únicos grafos sin diamantes mínimamente no coordinados son los holes impares.

Bibliografía

- [1] V. Balachandhran, P. Nagavamsi y C. Pandu Rangan, Clique-transversal and clique-independence on comparability graphs, *Information Processing Letters* **58** (1996), 181–184.
- [2] C. Berge, Les problèmes de colorations en théorie des graphes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* **9** (1960), 123–160.
- [3] C. Berge, Färbung von Graphen, deren sämtliche beziehungsweise, deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung), *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* **10** (1961), 114–115.
- [4] C. Berge y M. Las Vergnas, Sur un théorème du type König pour hypergraphes, *Annals of the New York Academy of Sciences* **175** (1970), 32–40.
- [5] F. Bonomo, M. Chudnovsky y G. Durán, Partial characterizations of clique-perfect graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **19** (2005), 95–101.
- [6] F. Bonomo y G. Durán, Characterization and recognition of Helly circular-arc clique-perfect graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **22** (2005), 147–150.
- [7] F. Bonomo, G. Durán y M. Groshaus, *Coordinated graphs and clique graphs of clique-Helly perfect graphs*, *Utilitas Mathematica*, en prensa.
- [8] F. Bonomo, G. Durán, M. Groshaus y J. Szwarcfiter, On clique-perfect and K-perfect graphs, *Ars Combinatoria*, en prensa.
- [9] A. Brandstädt, V. Chepoi y F. Dragan, Clique r -domination and clique r -packing problems on dually chordal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **10** (1997), 109–127.
- [10] M. Buckingham y M. Golumbic, Partitionable graphs, circle graphs and the strong perfect graph conjecture, *Discrete Mathematics* **44** (1983), 45–54.
- [11] M. Buckingham y M. Golumbic, Recent results on the strong perfect graph conjecture, *Annals of Discrete Mathematics* **20** (1984), 75–82.
- [12] M. Chang, M. Farber y Z. Tuza, Algorithmic aspects of neighbourhood numbers, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **6** (1993), 24–29.
- [13] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour y K. Vušković, Recognizing Berge Graphs, *Combinatorica* **25** (2005), 143–187.
- [14] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour y R. Thomas, The Strong Perfect Graph Theorem, *Annals of Mathematics*, en prensa.

- [15] V. Chvátal y N. Sbihi, Bull-free berge graphs are perfect, *Graphs and Combinatorics* **3** (1987), 127–139.
- [16] M. Conforti, $(K_4 - e)$ -free graphs and star cutsets, *Lecture Notes in Mathematics* **1403** (1989), 236–253.
- [17] M. Conforti, G. Cornuéjols y K. Vušković, Square-free perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **90** (2004), 257–307.
- [18] G. Durán, M. Lin y J. Szwarcfiter, On clique-transversal and clique-independent sets, *Annals of Operations Research* **116** (2002), 71–77.
- [19] D. Fulkerson, On the perfect graph theorem, In: *Mathematical Programming* (T. Hu and S. Robinson, eds.), Academic Press, New York, 1973, pp. 69–76.
- [20] M. Garey and D. Johnson. *Computers and Intractability*, W. H. Freeman, San Francisco, 1979.
- [21] F. Gavril, Algorithms on circular-arc graphs, *Networks* **4** (1974), 357–369.
- [22] P.C. Gilmore y A.J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canadian Journal of Mathematics* **16** (1964), 391–407.
- [23] M. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, second ed., Annals of Discrete Mathematics, vol. 57, North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [24] M. Grötschel, L. Lovász y A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, *Combinatorica* **1** (1981), 169–197.
- [25] V. Guruswami y C. Pandu Rangan, Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets, *Discrete Applied Mathematics* **100** (2000), 183–202.
- [26] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA 1969.
- [27] B. Hedman, Clique graphs of time graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **37** (1984), 270–278.
- [28] D. König, Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre, *Mathematische Annalen* **77** (1916), 453–465.
- [29] D. König, Graphok 'es matrixok, *Matematikai 'es Fizikai Lapok* **38** (1931), 116–119.
- [30] J. Lehel y Z. Tuza, Neighborhood perfect graphs, *Discrete Mathematics* **61** (1986), 93–101.
- [31] P. Lehot, An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph, *Journal of the ACM* **21**(4) (1974), 569–575.
- [32] C. Lekkerkerker y D. Boland, Representation of finite graphs by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae* **51** (1962), 45–64.
- [33] L. Lovász, A characterization of perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **13** (1972), 95–98.
- [34] F. Maffray, Kernels in perfect line graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **55** (1992), 1–8.

- [35] F. Maffray y M. Preissmann, On the NP-completeness of the k -colorability problem for triangle-free graphs, *Discrete Mathematics* **162** (1996), 313–317.
- [36] S. Olariu, Paw-free Graphs, *Information Processing Letters* **28** (1988), 53–54.
- [37] K. Parthasarathy y G. Ravindra, The strong perfect-graph conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **21** (1976), 212–223.
- [38] E. Prisner, Hereditary clique-Helly graphs, *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **14** (1993), 216–220.
- [39] A. Sassano, Chair-free Berge graphs are perfect, *Graphs and Combinatorics* **13** (1997), 369–395.
- [40] D. Seinsche, On a property of the class of n -colorable graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **16** (1974), 191–193.
- [41] L. Sun, Two classes of perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **53** (1991), 273–292.
- [42] L. Trotter, Line perfect graphs, *Mathematical Programming* **12** (1977) 255–259.
- [43] A. Tucker, Coloring perfect $(K_4 - e)$ -free graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **42** (1987), 313–318.
- [44] A. Tucker, Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **23** (1977), 143–149.
- [45] A. Tucker, The strong perfect graph conjecture for planar graphs, *Canadian Journal of Mathematics* **25** (1973), 103–114.
- [46] A. Tucker, A reduction procedure for coloring perfect K_4 -free graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series B* **43** (1987), 151–172.
- [47] A. Tucker, The validity of the strong perfect graph conjecture for K_4 -free graphs, In: *Topics on Perfect Graphs* (C. Berge and V. Chvátal, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 149–157.