

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Triangulaciones de Delaunay de alto orden en el terreno práctico de los sistemas de información geográfica

Reparaz, Matias Miguel
Rodríguez, Natalia Andrea

Director: Silveira, Rodrigo
E-Mail: rodrigo.silveira@upc.edu

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias de la Computación

24 de abril de 2014

Resumen

Una de las formas más comunes de representar terrenos es mediante el uso de triangulaciones. Una triangulación es una subdivisión del plano en triángulos en la que los vértices de dichos triángulos son puntos con una altura determinada. Existen muchas maneras distintas de obtener una triangulación y cada una de ellas define implícitamente la forma de interpolar alturas para puntos que no estén entre los muestreados. Es por esto que, a la hora de triangular terrenos, es muy importante elegir la triangulación cuidadosamente.

Una de las características deseables de una triangulación es que sus triángulos posean *buena forma*. Es por esto y por la eficiencia computacional con la que pueden calcularse que, en Sistemas de Información Geográfica (GIS), se ha impuesto como estándar de triangulación la **triangulación de Delaunay** (DT por su nombre en inglés, *Delaunay Triangulation*). Pero, esta última, posee ciertas limitaciones. Dado que sólo se preocupa por la forma de los triángulos, ignora otros criterios que pueden ser importantes para muchos usos de terrenos y hasta puede dar lugar a representaciones que disten mucho del terreno original.

Si bien sería deseable poder modificar la triangulación de *Delaunay*, su definición hace que, en general, sea única. Para solucionar esta limitación, Gudmundsson et al. [1] propusieron las **triangulaciones de Delaunay de alto orden** o *Higher Order Delaunay Triangulations* (HODTs) que son una generalización de las DTs.

La mayoría de los trabajos existentes sobre HODTs se centran en aspectos teóricos y algorítmicos: pretenden determinar la complejidad computacional de optimizar criterios sobre HODTs. Sin embargo, existen pocos trabajos que estudien HODTs desde el punto de vista práctico y, es en este último aspecto, donde radica la importancia del presente trabajo.

El objetivo de esta tesis es estudiar cuán útiles son las triangulaciones de *Delaunay* de alto orden en la práctica, de manera experimental con terrenos reales y criterios de optimización concretos, y así poder determinar si son realmente útiles en el terreno práctico de GIS.

Abstract

One of the most common ways to represent terrains is by using triangulations. A triangulation is a subdivision of the plane into triangles in which the vertices of these triangles are points with a specific height. There are many different ways to build a triangulation and each one implicitly defines how to interpolate heights for points that are not among those sampled. This is the reason why it is so important to choose a triangulation very carefully.

One of the desirable features of a triangulation is that its triangles are *well shaped*. This is one of the reasons why, in Geographic Information Systems (GIS), the **Delaunay Triangulation** (DT) is commonly used. The other reason is that it can be calculated in an efficient way. But DTs have certain limitations. Since they only take care about the shape of the triangles, they ignore other criteria that may be important for many terrain uses and may even lead to representations that fall far short of the original terrain.

Despite it would be desirable to modify the Delaunay Triangulation, its definition makes it generally unique. To overcome this limitation, Gudmundsson et al. [1] proposed the **Higher Order Delaunay Triangulations** (HODTs) which are a generalization of the DTs.

Most existing work on HODTs focus on their theoretical and algorithmic features: they try to determine the computational complexity of optimizing criteria over HODTs. However, there are only a few studies on HODTs from a practical point of view, and in this lies the importance of this work.

The aim of this thesis is to study how useful Higher Order Delaunay Triangulations are in practice, making experiments with real terrains and specific optimization criteria, in order to determine if they are really useful in the practical field of GIS.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiéramos agradecer a nuestro director de tesis Rodrigo, por habernos acompañado durante la realización de este trabajo.

A la facultad y a los docentes que tuvimos por habernos brindado la educación que recibimos. Les agradecemos por habernos brindado la formación que nos hace hoy profesionales.

A quienes se tomaron el trabajo de leer y corregir nuestro trabajo minuciosamente.

A todos aquellos que nos acompañaron e incentivaron durante todo este tiempo, que no nos permitieron bajar los brazos y que nos acompañaron en los buenos y malos momentos.

Agradecimientos de Matias

Quiero agradecer a mis papás Cristina y Miguel y mis hermanas Lucia y Victoria por apoyarme, aconsejarme, cuidarme y quererme, por creer en mí y ayudarme a seguir adelante luego de cada obstáculo, gracias a ustedes es que puedo estar hoy presentando este trabajo. También a mis abuelos, tíos, primos y amigos de Trenque que a pesar de las distancias están siempre conmigo. Y especialmente a Valentina, por alegrarme cada vez que la veo, te quiero mucho peque.

A mis amigos de siempre, Nacho y Juanma, con quienes compartí gran parte de mi vida, la primaria y secundaria, vacaciones y viajes, por estar en las buenas y en las malas, en fin, por estar siempre.

A mis compañeros de facultad, que ya más que compañeros son amigos de la vida: Ale, Alex, Caro, Celes, Dami B., Dami M., Gabi, Jona, Juli, Maxi y Tom. Gracias por ayudarme a llegar hasta acá.

Al grupo de los “Ex-Mecon” con los que trabajé, aprendí y me divertí mucho: Bruno, Caro, Celes, Dami, Fer, Flor, Gabi, Moski, Seba y Tom.

A mis actuales compañeros de trabajo que hacen que el día a día sea más entretenido: Alex, Fede, Juan, Meli, Migue, Zulma.

A toda la gente de teatro por hacerme pasar muy buenos momentos, divertirnos y vivir aventuras en mundos de fantasía, y en este mundo también.

Por último, pero no menos importante, a Natalia, mi compañera a lo largo de todos estos años, en la carrera, la tesis y la vida. Gracias por todo el tiempo que compartimos. Y también a su familia, que siempre me hicieron sentir como un miembro más.

Muchas gracias a todos.

Agradecimientos de Natalia

Ante todo quiero agradecer a mis padres Adriana y César por haberme brindado apoyo incondicional, por haberme inculcado la cultura del trabajo y el esfuerzo, por haberme dado la posibilidad de desarrollarme profesionalmente y hacerme quien soy hoy. Son mi admiración y orgullo. Sin ellos no hubiera podido llegar hasta acá y es por esto que les dedico especialmente este trabajo.

Quisiera también agradecer a mis hermanos Mario, Giannina y Luciano por estar ahí siempre, por haberme apoyado y ayudado siempre que lo necesité.

A mis abuelos Delia y Oscar, que aunque ya no estén conmigo me brindaron todo el amor del mundo y debo a ellos gran parte de lo que soy hoy en día.

A mi compañero de tesis Matias, por haberme acompañado todos estos años: en la vida, en la carrera y en la realización de este trabajo.

Gracias a mis amigos y compañeros de facultad: Ale, Alex, Caro, Cele, Chris, Dami B., Dami M., Esteban, Gabi, Jona, Juli, Maxi, Pablo, Pau, Tincho, Tom y todos aquellos que me acompañaron en esta etapa y que, a lo largo de todos estos años, se convirtieron en parte de mi familia.

Gracias a todos los que pasaron por mi camino, que me acompañaron en el crecimiento tanto personal como profesional y me ayudaron a llegar hasta donde llegué.

A nuestros seres queridos.

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Agradecimientos	IV
1. Introducción	1
2. Preliminares	7
2.1. Sistemas de información geográfica	8
2.2. Modelos digitales de terrenos	8
2.2.1. Modelos digitales de elevación	8
3. Triangulaciones: definiciones y propiedades	12
3.1. Triangulación de Delaunay	15
3.1.1. Definición	15
3.1.2. Propiedades	15
3.2. Triangulaciones de Delaunay de alto orden	17
3.2.1. Definición	17
3.2.2. Propiedades	17
4. Optimización de triangulaciones: heurísticas y algoritmos	20
4.1. Optimizaciones precedentes a la construcción de una triangulación	22
4.2. Optimizaciones de triangulaciones preexistentes	25
4.2.1. Constrained triangulations	26
4.2.1.1. Constrained DT	26
4.2.1.2. Constrained HODTs	27
4.2.2. Optimización de triangulaciones de alto orden	29
4.2.2.1. Optimización de triangulaciones de orden 1	29
4.2.2.2. Optimización de triangulaciones de orden k (con $k > 1$)	34
4.2.3. Procedimientos de optimización local	36
4.2.3.1. Técnica basada en el intercambio de ejes	36
4.2.3.2. Técnica basada en la inserción de ejes	38
4.2.3.3. Técnica centrada en vértices	41
4.2.4. Métodos de reducción de datos	42

5. Optimización de triangulaciones: criterios	44
5.1. Triangulaciones dependientes de datos	48
5.2. Criterios dependientes de datos	50
5.2.1. Angle Between Normal (ABN)	51
5.2.2. Piecewise Linear analog of Curvature (PLC)	51
5.2.3. Refined Angle Between Normals (WABN)	52
5.2.4. Jump Normals Derivatives (JND)	53
5.2.5. Deviations from Linear Polynomials (DLP)	53
5.2.6. Distances From Planes (DFP)	53
5.2.7. Análisis comparativo y resultados	55
5.2.8. Conclusiones	62
5.3. Selección de criterios	63
6. Implementación	65
6.1. Pseudocódigo de algoritmos implementados	66
6.2. Herramientas utilizadas	69
6.2.1. United States Geological Survey (USGS)	69
6.2.2. Quantum GIS (QGIS)	70
6.2.3. Computational Geometry Algorithms Library (CGAL)	71
6.3. Implementación de algoritmos	72
6.3.1. Triangulaciones de alto orden en CGAL	72
6.3.2. Cálculo del error	75
7. Resultados	77
7.1. Preliminares	78
7.1.1. Terrenos	78
7.1.2. Selección de puntos específicos	83
7.1.3. Métricas de error	87
7.1.4. Orden máximo	87
7.1.5. Valores obtenidos	88
7.2. Resultados y análisis comparativo	89
7.2.1. Tiempo de ejecución	89
7.2.2. Análisis del algoritmo exacto para 1-ODT	98
7.2.3. Métricas de error	115
7.2.4. Valores obtenidos	148
7.2.5. Slivers	184
8. Conclusiones	191
8.1. Conclusiones sobre el trabajo experimental	191
8.2. Conclusiones sobre el trabajo de tesis	196
A. Métricas de error	199
B. Uso del ejecutable	201
C. Resultados de ejecución	203
C.1. Tiempo de ejecución	203

C.2. Análisis del algoritmo exacto para 1-ODT	207
C.3. Métricas de error	232
C.4. Valores obtenidos	270

Bibliografía

288

Capítulo 1

Introducción

Tanto en GIS como en Geometría Computacional, las triangulaciones son estructuras de suma importancia y, uno de sus principales usos, es el modelado de terrenos. Una triangulación es una partición de un conjunto de puntos o región del plano en triángulos de manera que los vértices de esos triángulos son puntos del conjunto. Estos puntos son usualmente muestras del terreno real, obtenidas experimentalmente.

Para un conjunto de puntos dado existen muchas triangulaciones posibles y pueden obtenerse de distintas maneras en función de los criterios que se desea que las mismas cumplan y de las características de los terrenos cuyas alturas estamos interpolando.

Una triangulación muy conocida y utilizada es la **triangulación de Delaunay** (DT por su nombre en inglés, *Delaunay Triangulation*). Sus principales propiedades son:

- a) la circunferencia circunscrita de cada triángulo no contiene ningún punto del conjunto dentro y
- b) maximiza el menor ángulo sobre todas las triangulaciones posibles

Una característica importante y deseable en las triangulaciones es que los triángulos que la conforman tengan *buena forma* (es decir, que se asemejen a equiláteros). La triangulación de *Delaunay* posee esta propiedad y es ésta una de las razones por las cuales es ampliamente utilizada en GIS.

Sin embargo, la triangulación de *Delaunay* puede poseer determinadas características que hagan que el modelo del terreno obtenido no sea fiel al terreno cuya muestra de puntos se está interpolando. Así por ejemplo, puede haber creado depresiones (pozos) en la representación que no existen en el terreno real. A estas alteraciones que dan

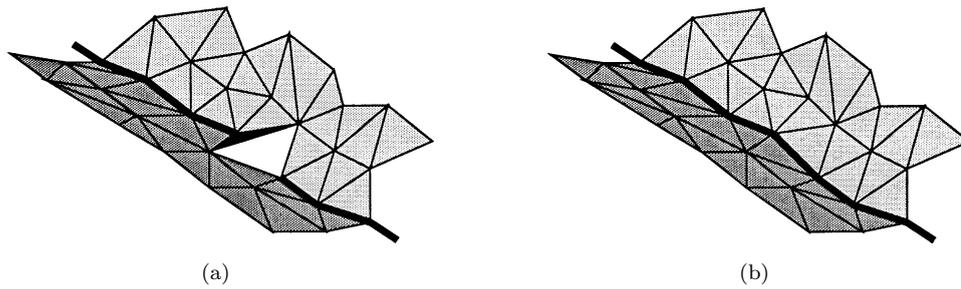


FIGURA 1.1:
 (a) Un valle interrumpido por un *artifact*.
 (b) Versión corregida al realizar el *flip* del eje que generaba el *artifact*. [1]

ciertas características a la representación pero que no existen en el terreno real se les llama *artifacts*. Se puede observar en la [Figura 1.1](#) un ejemplo gráfico de un *artifact*.

Algo deseable sería entonces poder modificar la triangulación para poder conseguir una representación más real, ya sea eliminando estos *artifacts* o incorporando otras propiedades deseables (como ser: reducir el número de mínimos locales o hacer que las líneas de drenaje coincidan con los ejes).

El problema es que, dado un conjunto de puntos no degenerados¹, la triangulación de *Delaunay* está completamente definida (es decir, es única) y se concentra sólo en conseguir triángulos con *buena forma*. Esto hace que no haya suficiente flexibilidad para modificar la triangulación y así poder conseguir una representación más fiel al terreno real.

Lo que se busca entonces es conseguir triangulaciones que no pierdan la propiedad de tener triángulos con *buena forma* pero que, adicionalmente, permitan incorporar otros criterios deseables. Es en este marco que se introducen, por Gudmundsson et al [1], las **triangulaciones de Delaunay de alto orden** o *Higher Order Delaunay Triangulations* (HODTs). Estas últimas son una extensión de las triangulaciones de *Delaunay* que permite más flexibilidad en la selección de los triángulos a utilizar.

Mientras que las triangulaciones de *Delaunay* exigen que los círculos que se forman con los vértices de los triángulos estén vacíos, las HODTs permiten tener a lo sumo k puntos dentro de ellos, donde k es el orden de la triangulación. A estas últimas se les llama **triangulaciones de Delaunay de orden k** o *k-order Delaunay Triangulation* (k -OD).

Cuando k es cero las HODTs coinciden con las triangulaciones de *Delaunay*. A medida que k aumenta éstas difieren más entre sí pero hay más triangulaciones posibles. Así por

¹Un conjunto de puntos \mathcal{P} es no degenerado si no hay 3 puntos de \mathcal{P} en la misma línea, ni 4 en una misma circunferencia.

ejemplo, si bien para k relativamente pequeño las formas de los triángulos se mantiene más o menos buena, la cantidad de triangulaciones posibles no es mucha, por lo que las limitaciones para conseguir triangulaciones más fieles son más altas.

En otras palabras, las HODTs brindan una solución de compromiso entre la calidad de los triángulos, la cantidad de triangulaciones posibles y el costo computacional para generarlas. Al haber más triangulaciones, es factible optimizar parámetros que sean importantes para su aplicación pero más costosa es su generación.

Objetivos

Desde que las HODTs fueron propuestas, ha habido varios estudios sobre algoritmos para optimizar distintos criterios. De hecho, la mayoría de los trabajos que existen sobre HODTs, se centran en aspectos teóricos y algorítmicos: pretenden determinar la complejidad computacional de optimizar criterios sobre HODTs. Sin embargo, existen pocos trabajos que estudien HODTs desde el punto de vista práctico.

El objetivo de la tesis es estudiar la utilidad práctica de las HODTs experimentando con terrenos reales y criterios de optimización concretos. La mayoría de los trabajos sobre HODTs están motivados por la utilidad práctica que, teóricamente, posee esta familia de triangulaciones. Pero casi no existen trabajos que analicen si esta supuesta utilidad es realmente tal.

Uno de los trabajos más importantes sobre este tema es [2] donde se estudian criterios sobre depresiones y valles. Biniaz et al. tienen un trabajo sobre *slope fidelity* en [3] (donde se analiza cuán fielmente se representa la pendiente del terreno) y otro sobre depresiones [4].

Al día de hoy se conocen muchos criterios que pueden ser optimizados eficientemente para las HODTs (al menos para $k=1$) [5]. Se han desarrollado algoritmos eficientes para encontrar HODTs que optimicen determinados criterios, pero casi ninguno de estos métodos se ha implementado. Tampoco se ha evaluado si la mejora que se obtiene al utilizar HODTs es significativa.

Algunas preguntas que vamos a contestar en el presente trabajo son:

- ¿Qué mejoras se obtienen con el uso de HODTs en terrenos reales?
- ¿Cuán complicado es utilizar HODTs en terrenos reales? Es decir, ¿Cuán difícil es implementar los algoritmos necesarios para trabajar con HODTs?
- ¿Cuán útiles son los algoritmos propuestos? ¿Existen algoritmos heurísticos que den resultados similares?
- ¿Cuáles son los criterios que más se benefician con el uso de HODTs?
- La pregunta mas general sería: ¿son las HODTs realmente útiles en la práctica?

Organización del informe

El presente trabajo se compone, a grandes rasgos, de las siguientes etapas:

- [Capítulo 2. Preliminares](#)

El objetivo de este capítulo es comprender para qué se usan los modelos digitales de terrenos en GIS y Geometría Computacional y cuál es su importancia en esta área.

- [Capítulo 3. Triangulaciones: definiciones y propiedades](#)

Este capítulo comprende el estudio de la literatura preexistente sobre triangulaciones en el ámbito de GIS. Se presentan aquí las definiciones y propiedades sobre las triangulaciones más utilizadas.

- [Capítulo 4. Optimización de triangulaciones: heurísticas y algoritmos](#)

El objetivo de este capítulo es comprender cuáles son las posibles optimizaciones que pueden realizarse sobre triangulaciones (antes, durante y después de su construcción) y conocer algunos de los algoritmos y heurísticas existentes para realizar dicha tarea.

- [Capítulo 5. Optimización de triangulaciones: criterios](#)

El objetivo de este capítulo es comprender cuáles son algunos de los criterios más importantes en la práctica. Se presenta una breve descripción de los criterios encontrados en la literatura consultada, un análisis comparativo entre cada uno de ellos y una selección de aquellos que se estudiaron, analizaron e implementaron en el presente trabajo.

- [Capítulo 6. Implementación](#)

El presente trabajo incluye la implementación de un software capaz de leer datos de elevación y construir triangulaciones de alto orden. Para esto fue necesario interiorizarse sobre los formatos y estándares que se utilizan para representar terrenos en GIS y las distintas fuentes disponibles para obtener datos de elevaciones. Se realiza en este capítulo una breve reseña de las herramientas utilizadas para esta tarea, detalles relativos a la implementación de los algoritmos para los criterios seleccionados, la obtención y manipulación de datos y la realización de experimentos con terrenos reales, de distintos tipos y características, con el objetivo de determinar qué efecto tiene el uso de HODTs.

- [Capítulo 7. Resultados](#)

Este capítulo contiene una breve reseña de los resultados obtenidos luego de la implementación descrita en el capítulo anterior.

- [Capítulo 8. Conclusiones](#)

En este capítulo pueden encontrarse las conclusiones del trabajo realizado, los resultados obtenidos y el trabajo futuro que surge de esta tesis.

Capítulo 2

Preliminares

La demanda de representaciones de terrenos para la realización de análisis hidrológicos sobre los mismos se ha visto incrementada de manera considerable en los últimos tiempos. Actualmente resulta necesario estimar ciertas características como la profundidad de un flujo o su velocidad. Estas características son de suma importancia dado que de eso depende el transporte de sedimentos y nutrientes de terrenos y, aunque estos pueden ser predichos en forma razonable, no se puede esperar que los modelos de calidad de agua sean adecuados para simular dicho transporte. El control topográfico del movimiento del agua entre campos es fundamental para la predicción de dichos flujos. Una gran deficiencia de muchos modelos hidrológicos y de calidad de agua es su actual imposibilidad de representar los efectos en los terrenos tridimensionales de los procesos de flujo y la variabilidad espacial hídrica.

Hay también una gran demanda de técnicas simples para asistir a la administración diaria de los campos. Se requiere, por ejemplo, la identificación de áreas susceptibles a distintos tipos de peligros ambientales y degradaciones tales como la erosión, la sedimentación, la salinización y las inundaciones, entre otras. Así mismo, es necesario acceder y manejar la productividad biológica y su diversidad entre los campos. Muchos sistemas de información geográficas e inventarios de recursos han sido desarrollados para almacenar información topográfica como datos base para el uso en el análisis de recursos de agua y problemas biológicos.

Los atributos topográficos pueden ser primarios o secundarios. Los primarios son calculados directamente desde los datos del terreno e incluyen variables tales como la elevación o la pendiente. Los atributos secundarios o compuestos involucran combinaciones de atributos primarios y son índices que describen o caracterizan la variabilidad espacial de procesos específicos en terrenos, tales como la distribución del agua o la erosión potencial de la tierra.

Algunos de los atributos topográficos y su significancia hidrológica son presentados por [6]. A continuación se presentan algunos de los atributos más utilizados:

Atributo	Definición	Significancia hidrológica
Altitud	Elevación	Clima, tipo de vegetación, energía.
Pendiente	Gradiente	Aceleración del flujo, tasa de erosión y decantación
Inclinación del plano	<i>Contour curvature</i>	Convergencia o divergencia de flujos

CUADRO 2.1: Atributos topográficos primarios [6]

2.1. Sistemas de información geográfica

Los **sistemas de información geográfica** son actualmente la principal manera de manipular, almacenar y acceder a los datos. Esto se debe principalmente a que:

- poseen información integral en un solo sistema,
- ofrecen un *framework* consistente para el análisis de la variación espacial a lo largo de terrenos,
- dan conocimiento geográfico para manipular y desplegar dicha información de diversas formas (incluyendo mapas) y
- permiten realizar conexiones entre entidades basadas en la proximidad geográfica y características que son vitales para conocer y manejar tanto actividades como recursos.

2.2. Modelos digitales de terrenos

Un **modelo digital de un terreno** (DTM por su nombre en inglés, *Digital Terrain Model*) es un modelo topográfico de la superficie de un terreno que puede ser manipulado computacionalmente. Un DTM puede definirse como un arreglo ordenado de números que representan atributos del terreno que desea modelarse.

2.2.1. Modelos digitales de elevación

Los **modelos digitales de elevación**, o *Digital Elevation Models* (DEMs), son un subconjunto de los DTMs. En el caso particular de los DEMs los atributos son las elevaciones.

Existen numerosos organismos gubernamentales, como *United States Geological Survey* (USGS) y *Australian Surveying and Land Information Group* (AUSLIG), que publican información de elevación para ciertas zonas geográficas. Estos datos son la fuente de información que se utiliza para la construcción de los DEMs.

Existen diferentes tipos de DEMs:

- *Grid-based Networks*: es una grilla regular de celdas triangulares o rectangulares. La más utilizada es la grilla rectangular. Se puede observar en la [Figura 2.1](#) un ejemplo gráfico de este tipo de DEM.

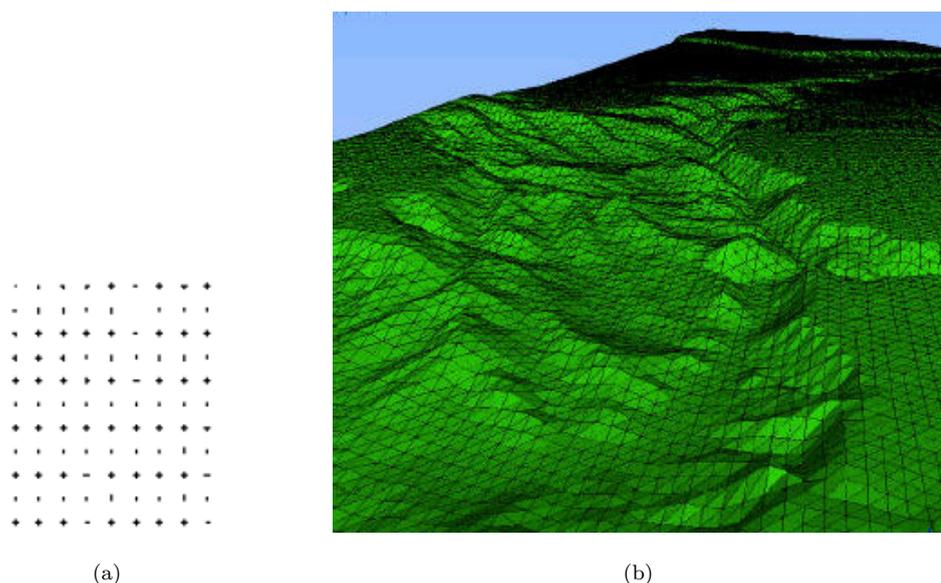


FIGURA 2.1:
 (a) Grilla regular de celdas.
 (b) Representación del relieve de un terreno utilizando un *Grid DTM*.

- PROS: son estructuras sencillas, fáciles de usar y eficientes computacionalmente. Por esto es que son muy utilizadas actualmente.
 - CONTRAS: no pueden manejar fácilmente cambios abruptos de elevación. El tamaño de las celdas de la grilla afecta los resultados obtenidos y la eficiencia computacional (cuanto más pequeñas las celdas, mejor resultado pero mayor costo de cómputo). No son apropiadas para muchas aplicaciones hidrológicas ni geomorfológicas y, dado que la grilla es regular y debe ser ajustada en zonas geográficamente accidentadas, la redundancia puede ser significativa en áreas suaves dentro del mismo terreno.
- *Triangular Irregular Networks* (TINs): usualmente se utilizan muestras de puntos específicos de la superficie como picos, crestas o quebradas. Con ellos se forma una red irregular de puntos, que son almacenados como un conjunto de coordenadas

(x, y, z) . El área elemental es el triángulo definido por los tres puntos y es conocido como una cara o *facet*. Se puede observar en la [Figura 2.2](#) un ejemplo gráfico de este tipo de DEM.

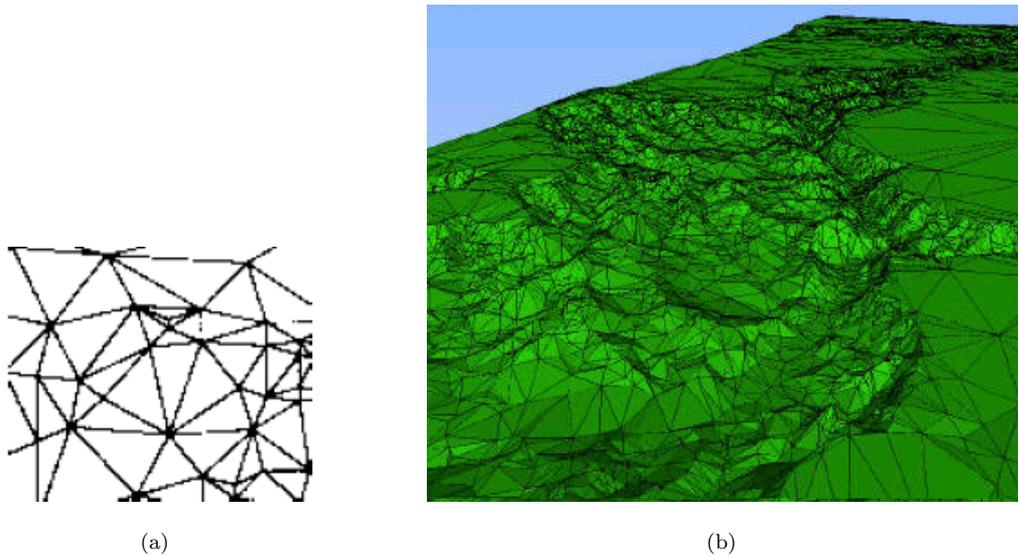
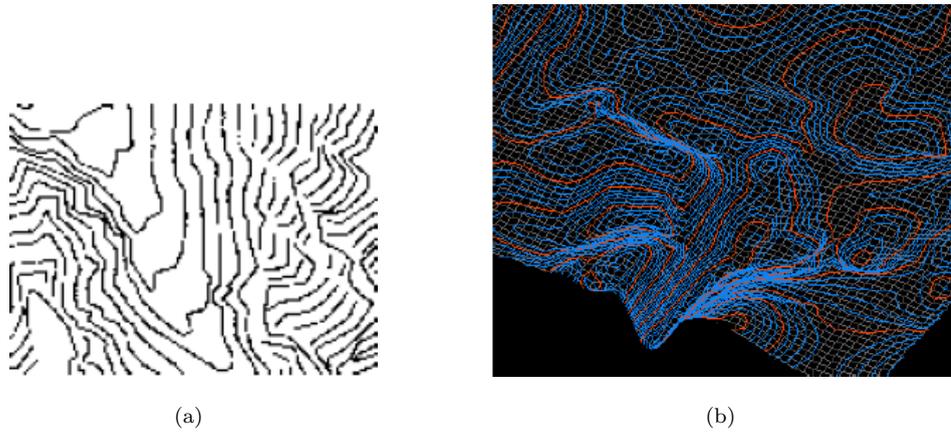


FIGURA 2.2:

(a) Triangulación de una red irregular de puntos.

(b) Representación del relieve de un terreno utilizando *TINs*.

- **PROS:** se pueden obtener representaciones más fieles al terreno real. Se puede utilizar una mayor cantidad de puntos para representar las zonas geográficamente accidentadas sin tener redundancia en el resto del terreno.
 - **CONTRAS:** puede ser difícil determinar computacionalmente algunos atributos del terreno. Generalmente se utiliza la triangulación de Delaunay para obtener este modelo, pero a veces puede producir resultados poco fieles al terreno y es necesaria cierta inspección visual o manipulación manual para corregirlo.
- *Contour-based Networks:* se utiliza un conjunto de curvas de nivel para representar líneas en el terreno que se encuentran a una determinada altura. Estas pueden ser utilizadas para subdividir el área en polígonos irregulares delimitados por curvas de nivel adyacentes y contiguas. Se puede observar en la [Figura 2.3](#) un ejemplo gráfico de este tipo de DEM.



(a)

(b)

FIGURA 2.3:

(a) Conjunto de curvas de nivel.

(b) Representación del relieve de un terreno basada en curvas de nivel.

- PROS: pueden obtenerse automáticamente usando un proceso de barrido y vectorización.
- CONTRAS: este método requiere un orden de magnitud mayor de almacenamiento de datos y no provee ventajas computacionales.

Capítulo 3

Triangulaciones: definiciones y propiedades

La representación de superficies a través de **triangulaciones** es un recurso utilizado en una amplia gama de aplicaciones. En GIS, las *Triangular Irregular Networks* (TINs) son una de las técnicas de modelado digital de terrenos más utilizada para la reconstrucción y representación de superficies.

Son estructuras simples y fáciles de almacenar: una triangulación es una colección de triángulos y un triángulo puede ser representado por tres puntos en el espacio. Adicionalmente, su alta capacidad de capturar detalles significativos del terreno las hace muy atractivas a la hora de modelar terrenos digitalmente.

Triángulos

Un *triángulo* es un objeto geométrico con tres esquinas, tres bordes y tres ángulos y se encuentra unívocamente definido por tres puntos no colineales p_1 , p_2 y p_3 (con $p_i = (x_i, y_i)$ un punto del plano).

La *circunferencia* circunscrita de un triángulo es el único círculo que contiene en su borde a los tres puntos p_1 , p_2 y p_3 que forman al triángulo en cuestión. Este último, se encuentra contenido dentro del disco circular generado por este círculo. El centro del círculo es el único punto c en el plano que es equidistante de p_1 , p_2 y p_3 y se le llama *circuncentro*.

Triangulaciones

Para que una colección de triángulos sea considerada como una triangulación es necesario, desde el punto de vista teórico y práctico, imponer ciertas restricciones. Más precisamente, se deben hacer cumplir ciertas restricciones para que una triangulación sea una subdivisión de un dominio Ω en una colección de triángulos conectados que no se solapen.

Los triángulos de una triangulación están formados por puntos dados en el dominio Ω de interés. Estos puntos pueden estar dados o pueden ser seleccionados por algún procedimiento adecuado para dicha tarea. En la mayoría de los casos, se comienza el proceso de triangulación contando con un conjunto dado de puntos \mathcal{P} . Para todo $p_i \in \mathcal{P}$, se cumple que p_i pertenece al dominio Ω . Este último es una porción o región del plano que debe estar delimitada por un polígono convexo.

Algunas consideraciones a tener en cuenta:

- Cada vez que de ahora en más se utilice la palabra *punto*, nos estaremos refiriendo a la posición geométrica en el plano de un vértice de un triángulo en una triangulación.
- El *vértice* (o nodo) de una triangulación denota un elemento topológico. La topología de una triangulación depende de las relaciones entre sus vértices, aristas y triángulos.
- Asociamos los puntos p_i , p_j y p_k con los vértices v_i , v_j y v_k respectivamente.
- Un único triángulo $\triangle i, j, k$ en una triangulación \mathcal{T} es atravesado por los tres vértices v_i , v_j y v_k simultáneamente.
- Se asume sin pérdida de generalidad, que los bordes no están ordenados (es decir que $e_{i,j}$ y $e_{j,i}$ representan el mismo *borde* entre v_i y v_j).

En general, podríamos darle el nombre de *triangulación* a cualquier colección de triángulos en el plano. Sin embargo, existen razones prácticas y teóricas por las que estamos interesados en la familia de triangulaciones que cumple con los siguientes requisitos:

1. No existe ningún triángulo $\triangle i, j, k$ en la triangulación \mathcal{T} que sea degenerado. Es decir que p_i , p_j y p_k no son colineales.
2. Los interiores de dos triángulos cualquiera de \mathcal{T} no se intersecan.

3. Los límites de dos triángulos cualquiera de \mathcal{T} sólo pueden cruzarse en un borde común o en un vértice común.
4. La unión de todos los triángulos de una triangulación \mathcal{T} es igual al dominio Ω sobre el cual se define \mathcal{T} .
5. El dominio Ω debe ser conexo.
6. La triangulación \mathcal{T} no puede dejar ningún punto de \mathcal{P} sin triangular.
7. Para todo vértice v_i en la frontera de Ω existen exactamente dos aristas de contorno que tienen v_i como un vértice común.

Consideramos, a lo largo del presente trabajo, que una *triangulación* es aquella que cumple con los requisitos antes descritos.

Un detalle importante al trabajar con triangulaciones digitalmente es el *tamaño* de la misma, es decir, el número de ejes, nodos y triángulos que ésta posee. Otro detalle relevante es el tamaño de los ángulos internos de cada triángulo. Por razones que se explicarán más adelante, a menudo se tratan de evitar triángulos con ángulos pequeños.

Dado un conjunto de puntos \mathcal{P} , existen muchas triangulaciones posibles. Los distintos tipos de triangulaciones existentes se distinguen por sus características y su construcción. En particular, en esta sección presentamos las definiciones y propiedades de dos familias triangulaciones muy conocidas: la triangulación de *Delaunay* y las triangulaciones de *Delaunay* de alto orden.

3.1. Triangulación de Delaunay

Como ya vimos, una triangulación es una partición de un conjunto de puntos \mathcal{P} (muestreo de una región del terreno) en triángulos. Una de las triangulaciones más conocidas y utilizadas es la llamada **triangulación de Delaunay** (DT, por su nombre en inglés *Delaunay Triangulation*). A continuación se presenta su definición y algunas de sus propiedades más importantes.

3.1.1. Definición

Una de las características deseables en una triangulación es que los triángulos que la componen posean *buena forma* (es decir, sea parecidos a equiláteros). Más específicamente, si comparamos todas las posibles triangulaciones construidas a partir del mismo conjunto de puntos, es posible que se prefiera aquella que posee un triángulo con el ángulo máximo más pequeño, o de forma alternativa, se puede preferir una con un triángulo que tiene el mayor ángulo mínimo. Estos criterios son conocidos como el criterio *MinMax angle* y *MaxMin angle* respectivamente.

Una triangulación que es óptima respecto al criterio *MaxMin angle* y que se define en la envolvente convexa de un conjunto de puntos se llama triangulación de *Delaunay*.

Este tipo particular de triangulación ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Tiene muchas características interesantes y hay una extensa lista de beneficios teóricos que la misma posee. La triangulación de *Delaunay* es fácil de calcular. Esto hace que se diferencie de otros tipos de triangulaciones que son estudiadas únicamente en el plano teórico y que son difíciles de calcular.

3.1.2. Propiedades

La triangulación de Delaunay posee varias características:

- Es única (si el conjunto \mathcal{P} es no degenerado¹).
- Para cada triángulo, la circunferencia que une todos sus vértices no contiene ningún punto de \mathcal{P} adentro.
- Al maximizar el ángulo más chico, no posee muchos **triángulos largos y angostos** (*slivers*). Tiene en su mayoría triángulos parecidos a equiláteros.

¹Un conjunto de puntos \mathcal{P} es no degenerado si no hay 3 puntos de \mathcal{P} en la misma línea, ni 4 en una misma circunferencia.

- La suma de los radios de todos los círculos contenidos en la triangulación es mínima.
- Para la función $x^2 + y^2$ (que es visualmente como una depresión) la triangulación de *Delaunay* minimiza la función de error \mathcal{L}_p^2 , para cualquier $1 \leq p < \infty$.
- Para las funciones $x^2 + a * y^2$, con $a > 1$ (que son visualmente como un valle) la triangulación de *Delaunay* deja de ser óptima. Cuanto más grande es a , mejor es la aproximación al terreno con triangulaciones que posean triángulos largos y angostos, ya que la relación entre las derivadas direccionales es mayor.

Triángulos largos y angostos (slivers)

Una de las propiedades más importantes que caracteriza a la triangulación de *Delaunay* es la buena forma de sus triángulos. Predominan en ella los triángulos similares a equiláteros. La forma de los triángulos es muy importante: triángulos largos y angostos deben ser evitados ya que implican realizar una interpolación entre puntos muy alejados, lo que puede resultar en un error considerable.

Si bien no hay una definición cuantitativa estándar de un *sliver*, suele definirse como descriptor de la forma un δ , en función de la base y la altura del triángulo, que es cero para los equiláteros.

Sin embargo, Rippa [7] probó que los triángulos largos y angostos (*slivers*), pueden ser muy útiles para representar algunas superficies (como las cónicas por ejemplo).

- PROS: son útiles para representar superficies que poseen una dirección preferida (es decir, aquellas que poseen una segunda derivada muy grande en una dirección respecto a otra dirección).
- CONTRAS:
 - El error numérico al trabajar con este tipo de triángulos es alto y, por tanto, es muy difícil saber si un punto está dentro o fuera del mismo.
 - Son poco estéticos al graficarse. Por lo general se grafican como una superficie discontinua.

²Las definiciones formales de cada una de estas métricas se encuentran en: [Apéndice A. Métricas de error](#).

3.2. Triangulaciones de Delaunay de alto orden

A continuación se presenta la definición formal de las **triangulaciones de Delaunay de alto orden** o *Higher Order Delaunay Triangulations* (HODTs) y sus propiedades más importantes.

3.2.1. Definición

Las HODTs son una clase de triangulaciones que extienden la definición de *Delaunay*. Se utilizan en el modelado de terrenos reales con un conjunto de puntos del plano con elevaciones.

Un triángulo de un conjunto de puntos \mathcal{P} se dice de **orden k** si la circunferencia comprendida entre todos sus vértices contiene, a lo sumo, k puntos de \mathcal{P} adentro. Una triangulación del conjunto \mathcal{P} de puntos es una triangulación de *Delaunay* de orden k (k -ODT) si cada triángulo de la triangulación es de orden k .

La triangulación de *Delaunay* estándar es una 0-ODT. Para cada entero positivo k puede haber varias triangulaciones de *Delaunay* de orden k . Por definición, cualquier k -ODT es también una k' -ODT con $k' \geq k$.

3.2.2. Propiedades

En esta sección se presentan algunos resultados importantes extraídos de la literatura consultada, muchos de los cuales fueron utilizados como base de conocimiento para la implementación de los algoritmos propuestos. Antes de poder enunciarlos debemos presentar algunas definiciones básicas.

Sea \mathcal{P} un conjunto de puntos del plano no degenerado y sean u, v y $w \in \mathcal{P}$:

- Un eje \overline{uv} es un eje de *Delaunay* de orden k , o *k-order Delaunay edge* (**k-OD edge**), si existe un círculo entre u y v con a lo sumo k puntos de \mathcal{P} dentro.
- Un triángulo $\triangle uvw$ es triángulo de *Delaunay* de orden k , o *k-order Delaunay triangle* (**k-OD triangle**), si existe un círculo entre u, v y w con a lo sumo k puntos de \mathcal{P} dentro.
- Una triangulación de \mathcal{P} es una triangulación de *Delaunay* de orden k , o *k-order Delaunay triangulation* (**k-ODT**) de \mathcal{P} si todo triángulo de la triangulación es *k-OD triangle*.

- Un k -*OD edge* \overline{uv} se dice que es **útil** si existe una k -*ODT* que incluye a \overline{uv} .
- Un k -*OD triangle* Δuvw se dice que es **válido** si no contiene ningún otro punto de \mathcal{P} dentro y sus tres ejes son útiles.
- Dada una triangulación \mathcal{T} de \mathcal{P} y dos ejes e_1 y e_2 en \mathcal{T} , decimos que e_1 y e_2 son **independientes** si no pertenecen al mismo triángulo en \mathcal{P} .

Sea \mathcal{P} un conjunto de puntos del plano no degenerado y sean s, p, u, v y $w \in \mathcal{P}$:

- Cada eje de un k -*OD triangle* es un k -*OD edge*.
- Cada eje de una k -*ODT* es un k -*OD edge útil*.
- Cada k -*OD edge* que no es un θ -*OD edge* interseca un *Delaunay edge*.
- Para cada k -*OD edge* \overline{uv} y cualquier *Delaunay edge* \overline{sp} que interseca \overline{uv} , el círculo $C(u, v, s)$ contiene a p .
- Los ejes de *Delaunay* que intersecan un k -*OD edge útil* \overrightarrow{uv} están conectados con a lo sumo k vértices en cada lado del k -*OD edge*.
- Todo eje 1 -*ODT útil* interseca a lo sumo a un eje *útil* de orden 1.
- Toda 1 -*ODT* puede obtenerse a partir de la triangulación de *Delaunay* realizando *flips* de ejes *independientes* de *Delaunay*.
- Una 1 -*ODT* óptima con respecto a la minimización del número de mínimos locales, puede obtenerse en tiempo $O(n \log n)$, realizando **flips** de ejes *independientes* de *Delaunay* (siendo n la cantidad de vértices de la DT).
- Sea \overline{uv} un eje de *Delaunay*. El número de k -*OD edges útiles* en una triangulación \mathcal{T} que intersecan a \overline{uv} es $O(k)$.
- En [1] se prueba que, para determinar si un eje \overline{uv} es *útil*, alcanza con analizar dos triángulos. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que \overline{uv} es un eje vertical. Sea \overline{uv} un k -*OD edge* y sea s_1 un punto de \mathcal{P} que es el primer punto a la izquierda (o derecha) de \overrightarrow{vu} , tal que el círculo $C(u, s_1, v)$ no contiene ningún punto a la izquierda (o derecha) de \overrightarrow{vu} . Si Δus_1v no es un k -*OD triangle*, entonces \overrightarrow{uv} no es *útil*.

Es decir que, si el primer triángulo a la izquierda de \overrightarrow{uv} Δus_1v , es un k -*OD triangle*, y lo mismo ocurre en el lado derecho de \overrightarrow{uv} , entonces \overline{uv} es *útil* (ver: [Figura: 3.1](#)).

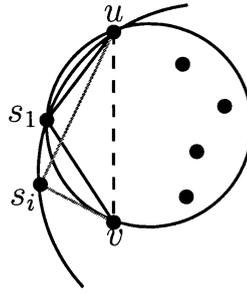


FIGURA 3.1: Si \overline{uv} es útil entonces Δus_1v es un k -OD triangle [1].

- Sea n el número de puntos en \mathcal{P} . La complejidad de calcular todos los ejes útiles de orden k en \mathcal{P} es $O(nk^2 + n \log n)$.

Capítulo 4

Optimización de triangulaciones: heurísticas y algoritmos

Obtener la aproximación óptima de una superficie en algunos casos, si bien es deseable, es un problema computacionalmente difícil de resolver. Es por esto que, en la práctica, se utilizan ciertas heurísticas y algoritmos para llegar a obtener una triangulación cercana a la óptima, según el criterio que se busca optimizar.

En la literatura consultada se encontraron optimizaciones que pueden aplicarse en las distintas etapas de la construcción de una TIN: antes, durante y después.

La etapa inicial para el cálculo de una TIN es la *selección de puntos*. La siguiente etapa consiste en *triangular* estos puntos (para lo cual, generalmente, se utiliza la triangulación de *Delaunay*). Estas dos etapas pueden ser combinadas en paralelo o en serie con distintas variantes en cada una de ellas. Se presenta en la [Sección 4.1](#) un análisis de las opciones encontradas en la bibliografía consultada con sus ventajas y desventajas.

Como vimos, la triangulación más conocida y utilizada en la práctica es la triangulación de *Delaunay*. Su éxito radica en la eficiencia computacional con la que puede calcularse y las buenas propiedades que ésta posee. Sin embargo, la triangulación de *Delaunay* puede poseer determinadas características que hagan que el modelo del terreno obtenido no sea fiel al terreno cuya muestra de puntos se está interpolando.

Se presenta en la [Sección 4.2](#) el conjunto de algoritmos y heurísticas recopilados de la literatura consultada que proponen realizar a la triangulación de *Delaunay* (o cualquier otra triangulación ya construida) ciertas modificaciones con el objetivo de obtener aproximaciones más fieles al terreno original.

Así mismo, existen ciertas modificaciones que pueden hacerse a una triangulación ya construida, y posiblemente optimizada, por ejemplo: se puede querer eliminar ciertos bordes, ejes, nodos o triángulos que no se desea que estén presentes en el modelo obtenido. Un detalle de algunas de estas posibles optimizaciones y técnicas de reducción de datos se presenta también en [Sección 4.2](#).

4.1. Optimizaciones precedentes a la construcción de una triangulación

El objetivo detrás de la construcción de una TIN es construir una interpolación lineal de la superficie, o *Piecewise Linear Interpolating Surface* (PLIS), triangulando un subconjunto de los puntos de muestra del terreno original y tratando de optimizar algún criterio adicional.

La razón por la que se toma un subconjunto de los puntos de muestra es para eliminar los puntos del conjunto original que son coplanares (o casi coplanares), para eliminar puntos del borde y para optimizar recursos como espacio en disco, memoria, ancho de banda, etc.

La generación de una TIN, por lo general, involucra los siguientes dos pasos:

1. *Selección de puntos*: se seleccionan los puntos de interés (o *specific points*), como pueden ser puntos en valles, crestas de montaña, etc.
2. *Triangulación*: se triangulan los puntos seleccionados en la etapa anterior, generalmente utilizando la [triangulación de Delaunay](#), para así obtener una TIN.

Las dos etapas antes descriptas pueden ser combinadas en paralelo o en serie con distintas variantes en cada una de ellas. Cabe destacar que, el presente trabajo, no se concentra en la etapa de selección de puntos sino en la etapa de triangulación y sus posteriores optimizaciones. No obstante, se incluye en este informe el análisis de ciertos métodos que involucran a las dos etapas con el objetivo de tener en cuenta las posibles optimizaciones que pueden realizarse incorporando variantes al proceso de selección de puntos.

Si bien la realización del proceso de selección y triangulación por separado es un método sencillo de entender, sufre de algunas desventajas:

- Cuando el filtro utilizado para la selección de puntos es pequeño resulta muy sensible a errores de datos y variaciones de la superficie.
- El proceso de selección de puntos es estático. Cada vez que un punto es elegido e insertado en la TIN la configuración de la misma se modifica y, en consecuencia, cambia también la importancia de los puntos restantes no utilizados aún.
- Todos los esfuerzos computacionales utilizados para la selección de los puntos específicos a triangular, lo cual puede ser muy costoso, se descartan y no se reutilizan.

Sin embargo, hay muy poco trabajo hecho sobre la combinación de las dos etapas. La mayoría de las investigaciones se concentran en el estudio de las etapas por separado.

En [8] se realizó un análisis de los siguientes métodos propuestos:

- *VipDt*: en este esquema se separa la selección de puntos del proceso de triangulación. Los puntos que se utilizan se generan con el comando VIP (*very important points* [9]) en ARC/INFO¹. Se utiliza como criterio de triangulación el de *Delaunay*.
- *SgiDt*: en este esquema se realiza el proceso de selección de puntos y de triangulación en simultáneo utilizando un algoritmo goloso de inserción gradual de puntos (SGI por su nombre en inglés, *sequential greedy insertion*). Se utiliza como criterio de triangulación el de *Delaunay*.
- *PgiDt*: es un esquema similar al anterior. La única diferencia es que en este esquema la selección de puntos se realiza en paralelo: se utiliza un algoritmo goloso de inserción paralela de puntos (PGI por su nombre en inglés, *parallel greedy insertion*). Este último fue presentado por Garland y Heckbert en 1995 y consiste, en líneas generales, en seleccionar e insertar más de un punto en cada pasada.

Para las pruebas se utilizaron dos DEMs. Para cada uno de ellos se construyeron TINs de 2500, 5000 y 10000 puntos. Para medir la calidad de la aproximación obtenida se utilizó como *ground truth* un muestreo aleatorio de 900 puntos y las métricas de error utilizadas fueron *mean absolute error* y *root mean square error*².

A partir de las pruebas realizadas en [8] se llega a las siguientes conclusiones:

- El método *SgiDt* construyó representaciones significativamente más fieles al terreno original que *VipDt*. Esto se observó tanto para áreas planas, como para áreas geográficamente accidentadas.
- Aunque los dos esquemas seleccionan muchos puntos en áreas geográficamente accidentadas, pudo verse que *SgiDt* seleccionó puntos en forma considerable en áreas planas también.
- *VipDt* seleccionó muchos puntos en áreas geográficamente accidentadas muy pequeñas y alrededor de los bordes.

¹ARC/INFO es un sistema de información geográfica muy completo desarrollado por Esri. Posee una gran variedad de comandos que pueden ser ejecutados tanto desde línea de comandos como desde una interfaz gráfica de usuario. Es un sistema pago y es ésta una de las razones por las cuales en este trabajo se utiliza *QGIS* en lugar de ARC/INFO (para más detalles ver: [Capítulo 6](#)).

²Las definiciones formales de cada una de estas métricas se encuentran en: [Apéndice A. Métricas de error](#).

- El método *SgiDt* resultó preservar mejor la estructura topográfica de los terrenos de las pruebas.
- Como era de esperarse *PgiDt*, resultó ser más rápido.
- *PgiDt* construyó TINs de menor calidad que los otros dos esquemas propuestos.
- Como conclusión final, de los tres esquemas comparados, *SgiDt* resultó ser el mejor.

Cabe destacar que, si bien se pueden utilizar distintos criterios para la selección de puntos específicos, para el presente trabajo la selección se realizó en forma aleatoria y siguiendo un esquema similar a *VipDt* (es decir, se realizaron por separado las etapas de selección y triangulación).

4.2. Optimizaciones de triangulaciones preexistentes

Se presentan en esta sección el conjunto de algoritmos y heurísticas, recopilados de la literatura consultada, que proponen realizar a la triangulación de *Delaunay* (o cualquier otra triangulación ya construida) ciertas modificaciones con el objetivo de obtener aproximaciones más fieles al terreno original. Algunas de las modificaciones propuestas son:

- Realizar el agregado a la triangulación de ejes o nodos que se desea que estén en la triangulación final. Se presenta en la sección [Constrained triangulations](#) una breve reseña de algunas heurísticas utilizadas para realizar esta tarea así como también algunas definiciones formales relevantes.
- Construir triangulaciones de alto orden que optimicen algún criterio. En la sección [Optimización de triangulaciones de alto orden](#) se presentan algunos criterios que se pueden incorporar en la construcción de k -ODTs, ciertas propiedades particulares de las 1-ODT que justifican que algunos de esos criterios pueden ser optimizados cuando k es 1 y una descripción detallada de un algoritmo exacto para este caso.
- Aplicar heurísticas de optimización local con el objetivo de mejorar alguna métrica en particular. En la sección [Procedimientos de optimización local](#) se presenta una breve descripción de algunas de estas técnicas.

También es posible que se desee realizar una depuración sobre triangulaciones ya construidas, y posiblemente optimizadas, eliminando nodos, ejes o triángulos que no aporten información adicional o que resulten irrelevantes para el modelo final obtenido. El objetivo detrás de esta técnica es obtener una triangulación con menor densidad de datos cuya lectura, procesamiento y representación sea más eficiente (ver: [Métodos de reducción de datos](#)).

4.2.1. Constrained triangulations

Una *TIN* es una forma natural de representar diferentes estructuras topográficas. Existen casos en los que se desean incorporar ciertos puntos específicos (picos, pozos, etc.) o segmentos (valles, lagunas, etc.) con el objetivo de obtener una representación más fiel al terreno original.

Afortunadamente, la operación de agregar un nuevo punto p a una triangulación de *Delaunay* no suele ser una operación costosa ya que, por lo general, se trata de un proceso local. En muchos casos, la región afectada por el agregado de este punto (también llamada *zona de influencia* de p), se encuentra acotada.

Los **bordes predefinidos** se denominan comúnmente *constrained edges* o *break lines*. Éstos se utilizan con frecuencia en triangulaciones para la representación de los ríos, surcos, valles y lagunas. Una triangulación que contiene *constrained edges* recibe el nombre de *constrained triangulation*.

4.2.1.1. Constrained DT

La triangulación de *Delaunay* se puede generalizar para dar lugar a la inclusión de *constrained edges* o *break lines*. La extensión de la triangulación de *Delaunay* que incluye ciertos *constrained edges* se denomina **Constrained Delaunay Triangulation** (CDT).

Los *constrained edges* pueden representar los ríos, caminos, límites de lagos, sierras o cualquier otra característica similar del terreno cuyo muestreo de puntos se está interpolando.

Las CDTs pueden ser calculadas en forma similar a como se construyen las triangulaciones de *Delaunay* convencionales. De hecho, algunos algoritmos necesitan sólo ser modificados ligeramente para poder tener en cuenta la incorporación de los *constrained edges*. Existen tanto algoritmos incrementales para el cálculo de una CDT (que involucran conceptos y algoritmos más sencillos y flexibles) como no incrementales. Ejemplos de estos últimos son: estrategias de *divide and conquer* y otros algoritmos estáticos que tratan todas las restricciones al mismo tiempo.

En cualquiera de los casos antes mencionados, la construcción de una CDT involucra, al menos, dos operaciones básicas:

- la inserción de un *constrained edge* en una CDT existente, y
- la inserción de un nuevo nodo (o punto específico) en un CDT existente.

La forma más sencilla de realizar la construcción de una CDT consiste en utilizar sólo las dos operaciones antes descritas y seguir una estrategia incremental. Esta estrategia comienza con la construcción de la triangulación de *Delaunay* y continúa con la incorporación en serie de cada uno de los *constrained edges* que se desea incorporar.

En líneas generales, existen dos enfoques diferentes para incorporar un eje (o *break line*) al construir una CDT:

- Agregar puntos extras al insertar las *break lines* que permitan dividirlos, con el objetivo de preservar el criterio de *Delaunay*. La ventaja de este método es que la triangulación resultante sigue siendo una DT y, por consiguiente, mantiene sus propiedades (por ejemplo, los triángulos con *buena forma*). Sin embargo, el número y la posición de los puntos que dividen a las *break lines* resultan difíciles de determinar.
- Otra opción es no agregar puntos adicionales y, por consiguiente, puede no preservarse el criterio de *Delaunay*. En este caso lo que se puede hacer es utilizar un **chequeo de visibilidad** que guíe el proceso de triangulación. Dos vértices i y j de una triangulación \mathcal{T} se dicen **visibles** si el segmento que los conecta no interseca ningún otro eje de \mathcal{T} . En esta construcción, un triángulo Δ pertenece a la CDT si y sólo si no existe otro vértice dentro de la circunferencia de Δ que sea visible por todos los 3 vértices que forman Δ . Este método genera una única triangulación (si el conjunto de puntos es no degenerado) y puede contener un gran número de *slivers*.

En [10] y [11] se presenta una descripción más precisa de los algoritmos mencionados. No se incluye aquí el detalle los algoritmos existentes para la construcción de CDTs ya que no fueron implementados en el presente trabajo.

4.2.1.2. Constrained HODTs

Existe un concepto similar al mencionado en la sección anterior pero aplicado a las HODTs. Se presenta aquí una definición formal de las *Constrained High Order Delaunay Triangulations* o *Constrained HODTs*

Antes de mencionar la definición formal de una *Constrained HODT* se recuerdan algunos conceptos importantes:

- Dado un conjunto de puntos \mathcal{P} , el **orden** de un eje comprendido entre dos puntos $p, q \in \mathcal{P}$ es el mínimo número de puntos dentro de cualquier círculo que pase por p y q .

- El **orden útil** de un eje es el mínimo orden de la triangulación que incluye a dicho eje (es decir, es el *orden* de un eje *útil*).

Dado un conjunto de puntos \mathcal{P} de tamaño n y un conjunto \mathcal{E} de ejes que no se intersecan con los puntos de \mathcal{P} . Si cada eje de \mathcal{E} tiene un *orden útil* k o menor, entonces existe una triangulación de \mathcal{P} y \mathcal{E} que tiene orden a lo sumo $2k - 2$. Esta triangulación es una **Constrained High Order Delaunay Triangulation**.

En [12] se presenta el algoritmo para calcular el orden de una triangulación y uno para completar una triangulación sobre un conjunto de puntos \mathcal{P} con un conjunto de ejes \mathcal{E} minimizando el orden de la misma. Nuevamente, no se presenta aquí el detalle de estos algoritmos ya que no forman parte de los algoritmos implementados en el presente trabajo.

4.2.2. Optimización de triangulaciones de alto orden

En esta sección se presentan algunos métodos que permiten construir triangulaciones de alto orden que optimizan algún criterio particular. A diferencia de las triangulaciones de *Delaunay*, que son únicas para un conjunto de puntos no degenerado, existen muchas posibles HODTs para el mismo conjunto de puntos. Se puede intentar entonces incorporar ciertos criterios en la construcción de las HODTs sin sacrificar demasiado la buena forma de los triángulos, que es otra de las buenas propiedades que posee la triangulación de *Delaunay*.

Como vimos, la triangulación de *Delaunay* es óptima respecto al criterio de maximización del mínimo ángulo de cada uno de sus triángulos. No obstante, existen otros criterios que se puede desear optimizar en una triangulación: minimizar el número de mínimos locales, minimizar el número de extremos locales, maximizar el área de un triángulo, maximizar el ángulo de cada vértice, minimizar la longitud total de los ejes, etc.

Muchos de estos criterios pueden ser optimizados para 1-ODT, por lo que se presentan a continuación algunas optimizaciones posibles para triangulaciones de orden 1. Así mismo, se presentan ciertos resultados encontrados en la literatura consultada sobre las optimizaciones de algunos criterios para k -ODTs cuando $k > 1$.

4.2.2.1. Optimización de triangulaciones de orden 1

Muchos criterios pueden ser optimizados para las triangulaciones de orden 1. Esto se debe a que las *1-ODT* poseen una estructura especial. Si se quitan de la triangulación de *Delaunay* todos los ejes *útiles* de orden 1, la subdivisión de los puntos del plano resultante contiene sólo triángulos y cuadriláteros convexos. Es decir que estos triángulos y cuadriláteros son *fijos*: están presentes en todas las triangulaciones de orden 1 de ese conjunto de puntos.

Se denominan **flippables** las diagonales de los cuadriláteros convexos que verifican ser (ambas) ejes *útiles* de orden 1. Los cuadriláteros que las contienen reciben la misma denominación (ver: [Figura 4.1](#)).

Debido a la estructura especial que poseen las *1-ODT* es que, por ejemplo, se pueden minimizar en tiempo $O(n \log n)$ criterios como la cantidad de mínimos locales. Lo mismo ocurre al minimizar el área máxima de los triángulos, minimizar la longitud total de los ejes y algunos otros criterios presentados en [1]. En esta sección se presentan algunos de los métodos propuestos para realizar estas optimizaciones.

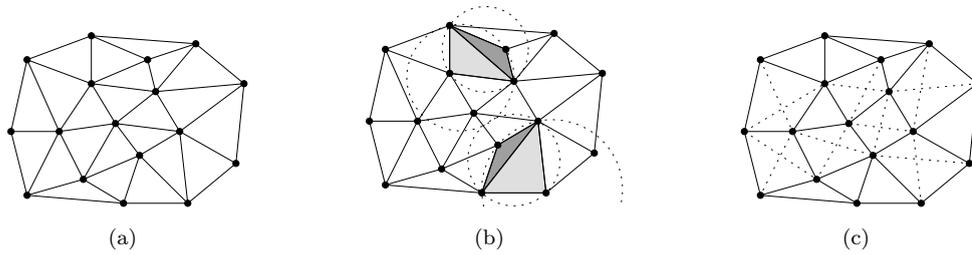


FIGURA 4.1:

- (a) Triangulación de *Delaunay*.
 (b) *2-ODT*: los triángulos gris claro son de orden 1 y los gris oscuro de orden 2.
 (c) Estructura de la *1-ODT* con las diagonales *flippables* marcadas con líneas punteadas.

[5]

Muchos de los estudios y trabajos existentes sobre criterios de optimización sobre *1-ODT* involucran mediciones sobre triángulos individuales. En [5] se presenta un algoritmo exacto de optimización de criterios para *1-ODT* que, a diferencia de los trabajos anteriores sobre el tema, tiene en cuenta mediciones que involucran a más de un triángulo: se toman en cuenta pares de triángulos que comparten ya sea ejes o vértices. Cabe destacar que, los criterios sobre los que se concentra este algoritmo son del tipo *MinMax* o *MaxMin*.

Dado que el presente trabajo cuenta con una implementación de este algoritmo, se presenta en esta sección una explicación detallada del mismo.

Método de optimización para criterios del tipo MinMax o MaxMin

El objetivo de este algoritmo exacto es hallar una triangulación óptima respecto a una función de medición M (definida para una triangulación \mathcal{T}) dentro de todas las posibles triangulaciones de *Delaunay* de orden 1 para un conjunto de puntos \mathcal{P} . La función de medición M debe ser de la forma $M(\mathcal{T}) = \max_{q \in \mathcal{T}} \mu(q)$ siendo q un cuadrilátero (no necesariamente *flippable*) de \mathcal{T} . Cabe destacar que, se utiliza $\mu(e)$ (para cualquier e un eje de \mathcal{T}) para denotar $\mu(q)$ cuando e sea una diagonal de q .

Una *1-ODT* posee cuatro tipo de ejes (además de los ejes pertenecientes a la envolvente convexa de \mathcal{T}):

- Ejes entre dos triángulos fijos.
- Ejes entre un triángulo fijo y un cuadrilátero *flippable*.
- Ejes entre dos cuadriláteros *flippables*.
- Ejes *flippables*.

En consecuencia, existen $O(n)$ posible valores para $M(\mathcal{T})$, los cuales pueden ser determinados y ordenados en tiempo $O(n \log n)$.

El problema de minimizar $M(\mathcal{T})$ es transformado en una serie de instancias 2-SAT. Este último se utiliza para responder la siguiente pregunta:

¿Existe alguna triangulación \mathcal{T} de orden 1 tal que $M(\mathcal{T}) \leq \mu_0$?

Como existen $O(n)$ posibles valores para μ_0 , se puede realizar búsqueda binaria para encontrar el más chico. Esto puede resolverse en forma eficiente ya que la función que se está optimizando es local para los cuadriláteros ($M(\mathcal{T}) = \mu(q)$ para algún cuadrilátero q). Como la cantidad de cuadriláteros (*flippable* o no) es lineal en n , el conjunto de todos los posibles valores de $M(\mathcal{T})$ se puede calcular en tiempo lineal una vez que los cuadriláteros *flippables* fueron identificados. Luego de eliminar algunas diagonales, se modelan los cuadriláteros como variables y se les asignan un valor de verdad dependiendo de sus diagonales.

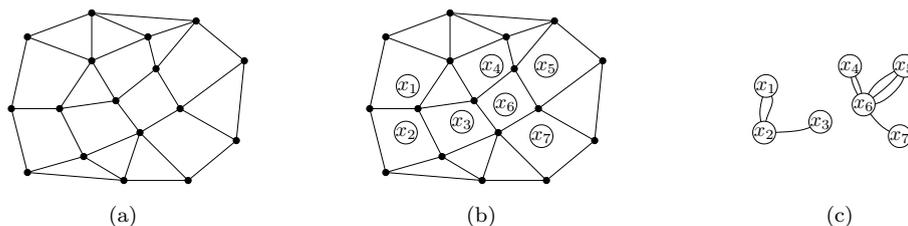


FIGURA 4.2:

- (a) Los ejes fijos y cuadriláteros *flippables* de toda 1-ODT.
- (b) Variables para cada cuadrilátero.
- (c) Clausulas para crear la instancia de 2-SAT. [5]

A continuación se define el **proceso de eliminación**. Sea \mathcal{S} una subdivisión de \mathcal{P} , que resulta de eliminar de la triangulación de *Delaunay* de \mathcal{P} los ejes *flippable* (ver: Figura 4.2(a)). Se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que μ_0 está fijo.

Para cada uno de los ejes e de \mathcal{S} que se encuentran entre un triángulo fijo y un cuadrilátero *flippable*, se decide cuál de las dos diagonales del cuadrilátero induce $\mu(e) > \mu_0$. Si las dos lo hacen, entonces se puede responder *no*. Si una de las dos induce $\mu(e) > \mu_0$, entonces se fija la otra diagonal en \mathcal{S} . Si ninguna de las dos lo hace, entonces se continúa con la iteración sobre el resto de los ejes que se encuentran entre un triángulo fijo y un cuadrilátero *flippable*. Este paso, pudo haber convertido cuadriláteros *flippables* en dos triángulos fijos en \mathcal{S} .

El siguiente paso consiste en realizar la verificación con las diagonales de los cuadriláteros *flippables* de \mathcal{S} . Si las dos diagonales inducen $\mu(\cdot) > \mu_0$, entonces se puede

responder nuevamente *no*. Si una de las dos diagonales induce $\mu(\cdot) > \mu_0$, entonces se fija la otra obteniendo dos nuevos triángulos en \mathcal{S} . Y si ninguna de las dos lo hace, entonces se continúa iterando.

Luego se procede a verificar el valor de μ para los ejes entre triángulos fijos. Si alguno de ellos induce $\mu(\cdot) > \mu_0$, entonces se puede responder nuevamente *no*.

Aún resta resolver el problema para los ejes entre cuadriláteros *flippables* de \mathcal{S} . Para cada cuadrilátero q , se introduce una variable booleana x_q (ver: Figura 4.2(b)). Una de las diagonales de q representa el valor *true* y la otra el *false*. Sea e un eje de \mathcal{S} entre dos cuadriláteros q y r . Por cada posible combinación de diagonales de q y r que induzcan $\mu(e) > \mu_0$ (por ejemplo, *true* en q y *false* en r), se coloca una clausula ($\neg x_q \vee x_r$) (ver: Figura 4.2(c)). Se obtienen así $O(n)$ clausulas, ya que hay a lo sumo 4 clausulas para cada eje entre cuadriláteros. La conjunción de todas estas clausulas es la instancia de 2-SAT que se debe resolver, cuyo costo de resolución es lineal.

El **proceso de búsqueda** del valor óptimo se realiza haciendo búsqueda binaria sobre todos los posibles valores de $M(\mathcal{T})$ (lo cual es $O(\log n)$). Para cada uno de ellos se busca resolver la instancia de 2-SAT antes propuesta (que es lineal). Como resultado, la complejidad del algoritmo resulta $O(n \log n)$.

Método de optimización para el criterio de minimización del número de mínimos locales

Minimizar el número de mínimos locales es sencillo cuando se trata de triangulaciones de orden 1. Si se reduce al mínimo el número de mínimos locales, se reduce el número de *artificial dams*. Cabe destacar que, se asume que se cuenta con la triangulación de *Delaunay* de un conjunto de puntos no degenerado y que, para cada vértice de dicha triangulación, se conoce la altura.

La inserción de un eje *útil* de orden 1 a la DT de la cual se parte (con la correspondiente eliminación del eje de *Delaunay* que interseca) para eliminar un mínimo local, no puede impedir que se retire cualquier otro mínimo local.

Sean v, y, u y s los vértices de un cuadrilátero convexo de la triangulación de *Delaunay* original de tal manera que $\overline{vy}, \overline{yu}, \overline{us}, \overline{sv}$ y \overline{ys} son ejes de dicha triangulación. Se asume, sin pérdida de generalidad, que \overline{uv} es eje *útil* de orden 1 ya que, en caso contrario, la única posibilidad sería dejar a \overline{ys} como eje en la nueva triangulación. Si hay un mínimo local en u o v , el mismo puede ser eliminado realizando un *flip* que ponga en contacto a u y v . En particular, si en u o en v hay un mínimo local entonces ambos son más bajos que y y s y hasta incluso el otro entre u y v que no es el mínimo local puede ser

más bajo que el mínimo que se desea eliminar. Los únicos dos vértices que pierden a un vecino por el *flip* realizado son y y s ya que se pierden entre sí como vecinos. Cabe destacar que, esta operación, no puede incorporar nuevos mínimos locales ya que u y v permanecen conectados.

De lo anterior se deduce una de las propiedades ya enunciadas en el [Capítulo 3](#): una *1-ODT* óptima con respecto a la minimización del número de mínimos locales, puede obtenerse en tiempo $O(n \log n)$, realizando **flips** de ejes *independientes* de *Delaunay* (siendo n la cantidad de vértices de la triangulación original).

Método de optimización para el criterio de minimización del número de extremos locales

El número de extremos locales (mínimos y máximos) también puede ser minimizado de manera eficiente sobre triangulaciones de orden 1. Anteriormente se presentó un método para reducir la cantidad de mínimos locales en una *1-ODT* realizando *flips* de las diagonales de algunos cuadriláteros convexos de la triangulación de *Delaunay*, de manera tal que esos intercambios permitan conectar los vértices más bajos del cuadrilátero entre sí. Pero si lo que se desea es minimizar los mínimos y máximos locales no se puede utilizar este método ya que puede ser que una diagonal de un cuadrilátero convexo de un mínimo local adicional y la otra diagonal de un máximo local.

Sea \mathcal{S} un conjunto de ejes que contiene a todos los ejes que deben estar en cualquier triangulación de orden 1. El conjunto de puntos que no poseen vecinos más bajos o vecinos más altos son **extremos locales** en \mathcal{S} . Sea \mathcal{G} un grafo definido como $\mathcal{G} = (\mathcal{M}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{M} es el conjunto de nodos que representan el extremos locales y dos nodos x e y se conectan en \mathcal{G} si representan puntos en la misma cara de cuadrilátero tal que: una de las diagonales hace que x no sea un extremo local y la otra diagonal hace que y no sea un extremo local (ver: [Figura 4.3](#)).

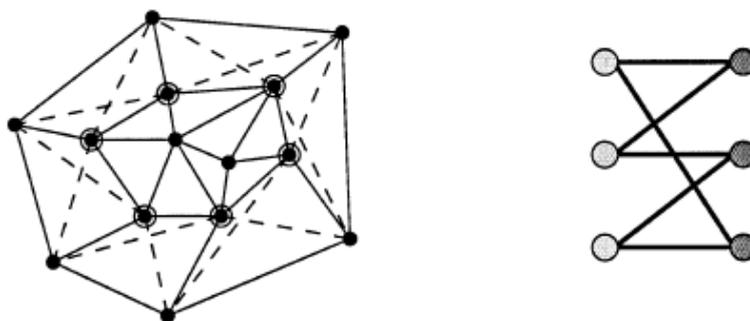


FIGURA 4.3: Extremos locales que aparecen conectados por un ciclo en el grafo bipartito.[1]

Cualquier cara de un cuadrilátero en \mathcal{S} define al menos un arco en \mathcal{G} y, este arco, conecta un mínimo local con un máximo local. Esto se debe a que cualquier eje de un cuadrilátero en una triangulación sólo puede evitar un extremo local si los dos puntos más altos y los dos puntos más bajos son opuestos entre sí en el cuadrilátero. Un eje de la triangulación sólo puede hacer que el segundo punto más alto deje de ser máximo y el otro eje sólo puede hacer que el segundo punto más bajo deje de ser mínimo.

\mathcal{G} es entonces un grafo bipartito, ya que cada arco conecta un mínimo local a un máximo local. Por cada arco se puede optar por hacer que uno de sus nodos deje de ser un extremo local eligiendo la triangulación adecuada para el cuadrilátero representado por el arco. Para cada nodo incidente a un único arco en \mathcal{G} se puede optar por eliminar un extremo local sin perder la condición de mantener el número mínimo de extremos locales. Si no existen nodos conectados a un solo nodo adicional entonces existe un ciclo que los une a todos. Dado que el grafo es bipartito todos sus ciclos tienen longitud par (ver: Figura 4.3). Se toma cualquier ciclo sin importar su longitud. Todos los nodos en ese ciclo pueden dejar de ser extremos: se asigna un cuadrilátero (representado por el arco) a un extremo incidente de \mathcal{S} y se elige el eje en la triangulación que le haga perder su condición de extremo local. Se puede repetir este procedimiento hasta que queden nodos con un único eje incidente en \mathcal{G} , o incluso ciclos completos, hasta que se eliminen todos los extremos locales posibles. Luego de realizar este procedimiento se completa la triangulación obtenida a partir de \mathcal{S} de cualquier manera. Este algoritmo goloso e incremental convierte la subdivisión \mathcal{S} en una 1-ODT que minimiza el número de mínimos y máximos locales.

De lo anterior se deduce que una triangulación de orden 1 óptima respecto al criterio de minimización del número de extremos locales se puede obtener en tiempo $O(n \log n)$ (siendo n la cantidad de puntos de la triangulación original).

Es importante destacar que, no todos los criterios pueden ser optimizados eficientemente para las triangulaciones de orden 1. En [5] se prueba que algunas optimizaciones son *NP-hard* aún cuando el dominio son las 1-ODTs.

Así mismo, existen métodos para optimizar otros criterios sobre triangulaciones de orden 1 de manera eficiente pero no se presentarán en este trabajo (algunos de ellos se pueden encontrar en [5]).

4.2.2.2. Optimización de triangulaciones de orden k (con $k > 1$)

No es sencillo obtener resultados de optimización generales para todos los criterios enumerados anteriormente, dado un valor de $k > 1$. Se presentan a continuación algunos resultados obtenidos de la literatura consultada.

Cuando k es lo suficientemente grande como para que cada par de puntos defina un eje útil (como $k = n - 3$), entonces ciertos criterios pueden ser optimizados. Por ejemplo, para el criterio de reducir al mínimo el número de mínimos locales, se puede para cada punto colocar un eje nuevo que lo conecte con el mínimo global (en los casos no degenerados) y, de este modo, en la nueva triangulación queda un sólo mínimo local. Para reducir al mínimo el ángulo máximo y algunos otros criterios, diferentes resultados óptimos se presentan en [13].

En [1] se presenta un método de optimización para el criterio de minimización del número de extremos locales para k -ODTs y se enuncia el siguiente resultado. Sea m el menor número de mínimos locales (o extrema) en cualquier k -ODT de un conjunto de puntos \mathcal{P} . Existe un algoritmo que calcula en tiempo $O(n \log n + nk^3)$ una k -ODT de \mathcal{P} con un máximo de $O(mk^2)$ mínimos locales (o extrema).

En [5] se enuncian un método no exacto para la optimización del criterio de maximización del número de ejes convexos sobre triangulaciones de orden k puede ser ejecutada en tiempo $2^{2^{O(k)}} 2^{O(\frac{1}{\epsilon^2})} n$, para cualquier constante $\epsilon > 0$.

En [14] se muestra que para $k \leq 2$ se pueden obtener todas las posibles triangulaciones de orden k (si el conjunto de puntos es no degenerado) con los siguientes tiempos:

- $O(n^2)$ como tiempo de ejecución por cada *output* y
- $O(n \log n)$ como tiempo de procesamiento.

4.2.3. Procedimientos de optimización local

Existen ciertas heurísticas conocidas que se utilizan para llegar a obtener una triangulación cercana a la óptima, según el criterio que se desea optimizar. A continuación se detallan algunas de las técnicas de *optimización local* que se utilizan a modo de heurísticas con el objetivo antes propuesto.

4.2.3.1. Técnica basada en el intercambio de ejes

Lawson [15] sugiere un procedimiento simple de optimización local (LOP por su nombre en inglés, *Local Optimization Procedure*) para la construcción de una nueva triangulación en base a una triangulación preexistente. El procedimiento opera sobre los ejes de la triangulación original y propone realizar ciertos intercambios (*flips*) sobre los mismos, según la optimización de algún criterio predefinido. El método recibe el nombre de **edge-flip** y nos referiremos a él como *método de Lawson*, nombre que hace referencia al autor del procedimiento en cuestión.

Tal como su nombre lo indica, la operación básica de este método es el intercambio de ejes. Se asigna a cada eje interno un costo, que depende del criterio a optimizar. Dado un cuadrilátero convexo, se decide intercambiar el eje de la diagonal e que pertenece a la triangulación original por la otra diagonal e' si y sólo si e' produce una triangulación con un costo más chico que e . Para el caso de los cuadriláteros que no son convexos, como existe para ellos una única triangulación posible, resultan por si mismos óptimos y, por tanto, no son analizados por el método. Tampoco se tienen en cuenta para el análisis en este método a los ejes de los bordes de la triangulación.

Sea e un eje de \mathcal{T} una triangulación del conjunto de n puntos \mathcal{S} . Denotamos al costo de \mathcal{T} como $C(\mathcal{T})$ y el costo de e en \mathcal{T} como $\mu(\mathcal{T}, e)$. Sea $q = \Delta^1 \cup \Delta^2$ con Δ^1 y Δ^2 dos triángulos de \mathcal{T} unidos por e y, se asume, que q es convexo. Sea e' la otra diagonal de q y sea \mathcal{T}' la triangulación que se obtiene de reemplazar e por e' en \mathcal{T} .

Por definición, se dice que un eje e de \mathcal{T} es **localmente óptimo** cuando:

- e es un eje del borde de \mathcal{T} ,
- e es la diagonal de un cuadrilátero q no convexo, o
- e es la diagonal de un cuadrilátero q convexo y $C(\mathcal{T}) \leq C(\mathcal{T}')$.

Análogamente, decimos que \mathcal{T} es **localmente óptima** si todos sus ejes son *localmente óptimos*.

La función de costo $C(\mathcal{T})$ puede definirse en forma *atómica*. En este caso se tienen en cuenta el eje e , el cuadrilátero q y, eventualmente, la *vecindad* de q (en caso de que la operación de intercambio afecte los costos de los ejes de la misma).

$C(\mathcal{T})$ se puede definir también teniendo en cuenta el costo de todos los ejes de \mathcal{T} . Dos ejemplos de este tipo de funciones de costo, muy utilizadas en la literatura consultada, son:

- La norma \mathcal{L}_1 de la suma de los costos de los ejes de \mathcal{T} :

$$C(\mathcal{T}) = \sum \mu(\mathcal{T}, e),$$

para todo e eje en \mathcal{T} y siendo $\mu(\mathcal{T}, e)$ el costo de eje e en \mathcal{T} .

- La norma \mathcal{L}_2 de la suma de los costos de los ejes de \mathcal{T} al cuadrado:

$$C(\mathcal{T}) = \sqrt{\sum \mu(\mathcal{T}, e)^2},$$

para todo e eje en \mathcal{T} y siendo $\mu(\mathcal{T}, e)$ el costo de eje e en \mathcal{T} .

La selección de una función de costo de ejes μ que sea apropiada depende tanto de las características del terreno como del criterio que se desee optimizar.

La aplicación sucesiva de este método en una triangulación converge en un número finito de pasos a una triangulación *localmente óptima*. No obstante, se debe tener en cuenta que un eje puede ser intercambiado más de una vez durante el proceso. Esto puede darse si uno de los bordes del cuadrilátero el eje e como diagonal se intercambia después de que e fue intercambiado por e' . Dado que el número de posibles triangulaciones de un conjunto de puntos finito es finito, el *método de Lawson* converge, después de un número finito de intercambio de ejes, a una triangulación *localmente óptima*.

Se presenta a continuación el pseudocódigo del *método de Lawson*:

Algorithm 1: edge-flip(\mathcal{S})

Input: Conjunto de vértices \mathcal{S}

Output: Triangulación \mathcal{T} localmente óptima

Construir una triangulación inicial $\mathcal{T}^{(0)}$ con los vértices de \mathcal{S} .

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T}^{(0)}$

while \mathcal{T} no es localmente óptima **do**

 Se toma un eje interno e de \mathcal{T} , que no es localmente óptimo.

 Se toma q como el cuadrilátero convexo formado por los dos triángulos de \mathcal{T} que contienen a e como eje común.

 Se intercambian las diagonales de q , reemplazando e por la otra diagonal e' , y se obtiene una nueva triangulación \mathcal{T}' .

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T}'$

end

Si se asume que las mediciones y el intercambio de ejes se pueden hacer con costo $O(1)$ entonces el costo de cada iteración es $O(n)$ ya que se realiza una iteración completa para cada eje y las operaciones dentro de cada iteración son constantes. Pero, para determinar la complejidad algorítmica de este método, es necesario poder acotar la cantidad de iteraciones totales y esto depende del criterio seleccionado. Se sabe, en base a la literatura consultada, que cuando se trata del criterio de *Delaunay* la cantidad de pasos es $O(n^2)$, pero no resulta trivial obtener esta cota cuando el criterio es otro. Decimos entonces que la complejidad de este método es $O(n * l)$ siendo n es la cantidad de nodos de \mathcal{S} y l una cota para la cantidad total de iteraciones del ciclo.

Cabe destacar que, en el *método de Lawson* se puede utilizar como triangulación inicial $\mathcal{T}^{(0)}$ a la triangulación de *Delaunay*. Es ésta combinación una de las herramientas más utilizadas en la literatura para generar triangulaciones y sobre la cual se basa el desarrollo de los algoritmos implementados en el presente trabajo.

4.2.3.2. Técnica basada en la inserción de ejes

Se presenta aquí otra técnica para obtener triangulaciones localmente óptimas: **edge-insertion** o *método de inserción de ejes*. En líneas generales, este método consiste en insertar un nuevo eje a la triangulación que se desea optimizar, borrar los ejes existentes que intersecan al nuevo y volver a triangular el polígono resultante que contiene a ese eje.

Sea \mathcal{S} un conjunto de puntos tal que $x, y, z \in \mathcal{S}$. Se denota como \overline{xy} al segmento que une x e y y $\triangle xyz$ al triángulo cuyos vértices son x , y y z .

Se define una función de medición μ que mapea en \mathcal{T} a cada triángulo Δxyz con un valor real $\mu_{\mathcal{T}}(\Delta xyz)$. Algunos ejemplos de funciones de medición son: el ángulo más grande o más pequeño, la altura y la pendiente, entre otros.

El criterio de medición μ define en si mismo una forma de comparación de triangulaciones que depende de la combinación que se elija de las mediciones μ sobre los triángulos de la triangulación.

Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos triangulaciones sobre el mismo conjunto de puntos \mathcal{S} . Se dice que \mathcal{T}' es una mejora de \mathcal{T} (denotado $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$) cuando:

- $\mu(\mathcal{T}') < \mu(\mathcal{T})$ o
- si $\mu(\mathcal{T}') = \mu(\mathcal{T})$ entonces, el conjunto de triángulos $\Delta xyz \in \mathcal{T}'$ que inducen ese valor de $\mu(\mathcal{T}')$, es un subconjunto propio de esos triángulos en \mathcal{T} .

La triangulación \mathcal{T} se dice **óptima** para μ si no existe ninguna mejora de \mathcal{T} .

A continuación se presenta la especificación formal del mecanismo de inserción de un eje en una triangulación preexistente. El mismo recibe una triangulación \mathcal{A} sobre el conjunto de puntos \mathcal{S} y un \overline{qs} , con $q, s \in \mathcal{S}$.

Algorithm 2: edge-insertion($\mathcal{A}, \overline{qs}$)

Input: Triangulación \mathcal{A} , \overline{qs}

Output: Triangulación \mathcal{B} que contiene el eje \overline{qs}

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}$

Agregar \overline{qs} a \mathcal{B} y remover de \mathcal{B} todos los ejes que intersecan \overline{qs} .

Volver a triangular los polígonos construidos en el paso anterior.

Devolver \mathcal{B} .

Se presenta a continuación el pseudocódigo del *método de inserción de ejes*:

Algorithm 3: edge-insertion(\mathcal{S})

Input: Conjunto de vértices \mathcal{S}

Output: Triangulación \mathcal{T} localmente óptima

Construir una triangulación inicial \mathcal{A} con los vértices de \mathcal{S} .

repeat

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{A}$

for *todos los pares* $q, s \in \mathcal{S}$ **do**

$\mathcal{B} \leftarrow \text{edge-insertion}(\mathcal{A}, \overline{qs})$

if $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ **then**

$\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}$

 Salir del for.

end

end

until $\mathcal{T} = \mathcal{A}$;

Devolver \mathcal{T} .

Es importante destacar que, el método *edge-insertion* es igual al método *edge-flip* cuando la cantidad de ejes que se intersecan es igual a uno.

Si se asume que la complejidad de calcular los costos en \mathcal{T} es constante entonces la complejidad del algoritmo es $O(n^8)$. Esto se debe a que:

- cada iteración tiene un costo de $O(n^5)$ ya que la operación individual de insertar un eje tiene un costo de $O(n^3)$ si se re-triangula la triangulación con un algoritmo de programación dinámica y
- la cantidad de veces que ese ciclo puede ejecutarse es $O(n^3)$ ya que existen $\binom{n}{3}$ posibles triángulos en \mathcal{S} y cada iteración descarta de forma permanente al menos uno de ellos cuando se encuentra una mejora de la triangulación actual.

En [16] se presenta una versión más sofisticada de este algoritmo que tiene complejidad $O(n^3)$ ó $O(n^2 \log n)$ dependiendo de la condición de comparación entre \mathcal{A} y \mathcal{T} . Así mismo, se presentan allí ciertas definiciones y propiedades que se derivan de la aplicación de este mecanismo sobre triangulaciones.

No se presenta aquí el detalle de cada una de ellas ya que no se implementa este método en el presente trabajo. Aquí nos concentramos en la implementación de optimizaciones de criterios sobre HODTs que involucran métricas sobre varios triángulos y el *método de inserción de ejes* no se puede utilizar para resolver este tipo de problemas ya que la

inserción de un eje de orden k en una triangulación y la posterior re-triangulación de los polígonos afectados con ejes de orden k es un problema difícil de resolver.

4.2.3.3. Técnica centrada en vértices

Un ejemplo de una variación del *método de Lawson* es el *método de optimización local basado en vértices* (VBLOP por su nombre en inglés, *vertex based local optimization procedure*) presentado por Brown en [17]. Este método utiliza funciones de costo sobre los vértices a diferencia del *método de Lawson* que lo hace sobre los ejes.

Sea \mathcal{S} un conjunto de n puntos y sea p_i cada uno de esos puntos con $i = 1, \dots, n$. Sea \mathcal{T} una triangulación de los puntos de \mathcal{S} . Un ejemplo para una posible función de costo sobre vértices para \mathcal{T} sería:

$$C(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \mu(\mathcal{T}, p_i)$$

Donde μ es la función de costo del vértice p_i en \mathcal{T} .

Se presenta a continuación el pseudocódigo del *método de optimización local basado en vértices*:

Algorithm 4: VBLOP(\mathcal{S})

Input: Conjunto de vértices \mathcal{S}

Output: Triangulación \mathcal{T} localmente óptima

Construir una triangulación inicial \mathcal{T} con los vértices de \mathcal{S} .

repeat

for i desde 1 hasta n **do**

 Verificar cada eje que contiene a p_i y, si no es localmente óptimo, realizar el flip de los ejes que corresponda en \mathcal{T} .

 Salir del for.

end

until se haga al menos un flip;

Devolver \mathcal{T} .

Cabe destacar que, cualquier función de optimización sobre ejes puede ser generada por otra que utilice los vértices.

4.2.4. Métodos de reducción de datos

En algunos casos las triangulaciones construidas y optimizadas tienen datos irrelevantes. Tener muchos puntos o triángulos no relevantes en aproximaciones de superficies es poco eficiente. Existen métodos que buscan reducir la densidad de los datos para obtener una triangulación que represente lo mismo que la original pero que no contenga redundancia de datos.

Dada una triangulación de una superficie lo que se busca es eliminar triángulos en forma iterativa. Existen varios aspectos que fundamentan este tipo de métodos:

- Un guardado y procesamiento de datos más eficiente.
- Uso de los puntos necesarios (ni más ni menos) para la representación de la forma geométrica que desea modelarse.

Un posible método de reducción de datos es el *método de eliminación de triángulos*. Dada una triangulación de la superficie \mathcal{T} se le asigna un peso a cada triángulo, dependiendo de la curvatura principal de sus vértices. Un triángulo es asociado a una región de la superficie con baja curvatura, si la suma de las curvaturas absolutas de todos sus vértices es baja. Esta medida se utiliza como un peso para determinar la relevancia del triángulo en \mathcal{T} .

El proceso de eliminación de triángulos en forma iterativa comienza con el cálculo de los pesos de los triángulos de la triangulación inicial. Se elimina el de menor peso (o menor relevancia) y se lo reemplaza por un nuevo punto. Se vuelve a triangular la región afectada y se vuelven a calcular los pesos de los nuevos triángulos, dando lugar así a la próxima iteración.

De esta forma, la triangulación varía en forma iterativa y la densidad local de los triángulos refleja la curvatura de la superficie. Las superficies con poca curvatura serán representadas con triángulos relativamente grandes mientras las superficies con mayor curvatura presentarán más densidad de datos en su representación.

Es posible además tener en cuenta tanto la estimación de la curvatura en los vértices de los triángulos como los ángulos interiores del mismo. Esta fórmula se utiliza para evitar los triángulos largos y angostos. Adicionalmente, se puede especificar el porcentaje de triángulos que puede eliminarse o la tolerancia de error soportada.

El *método de eliminación de triángulos* no requiere ninguna estructura de datos ni información adicional a la ya dada para la construcción de la triangulación a depurar.

Se presenta a continuación el pseudocódigo del *método de eliminación de triángulos*

Algorithm 5: Reducción de triangulaciones mediante borrado iterativo de triángulos.

Input: Conjunto T de N triángulos (con información del vecindario)

Conjunto V de vértices (incluyendo la curvatura principal)

Un porcentaje $p \in [0,100]$

Output: Conjunto T' de triángulos y uno V' de vértices (reducciones de los T y V originales)

Computar el peso de cada triángulo en T .

while *El número de triángulos sea mayor que $(p/100) * N$* **do**

 Determinar el triángulo T_i con menor peso.

 Remover T_i de la triangulación.

 Computar una primera re-triangulación.

 Mejorar la re-triangulación maximizando el mínimo ángulo.

 Computar los pesos de todos los triángulos.

end

Como puede observarse, el criterio de corte del algoritmo utiliza el porcentaje p recibido como parámetro. Sin embargo, se podría utilizar, en algunos casos, algún cálculo de error teniendo en cuenta las distancias entre los puntos de la triangulación original y la reducida. El algoritmo en este caso debería detenerse cuando se excedió la tolerancia del error previamente establecida.

Capítulo 5

Optimización de triangulaciones: criterios

Si bien las triangulaciones de *Delaunay* poseen triángulos con *buena forma* y son óptimas respecto al criterio *MaxMin angle* no son, necesariamente, la mejor opción para representar ciertos tipos de terrenos. En este capítulo nos concentraremos en la construcción de triangulaciones que son óptimas respecto de ciertas funciones de costo local y global que se encuentran diseñadas para reflejar las propiedades del modelo físico subyacente del que se ha tomado la muestra de puntos.

Motivación

Sea \mathcal{T} una triangulación de un conjunto de puntos (no degenerado) \mathcal{P} del plano de tamaño n . Cada punto $p_i \in \mathcal{P}$ ($p_i = (x_i, y_i)$, con $i = 1, \dots, n$) posee un valor real asociado z_i . Se asume que los datos del conjunto $\{(x_i, y_i, z_i)\}$ son las muestras de alguna función subyacente, o superficie, que se desea modelar.

Sea $\mathcal{S}_1^0(\mathcal{T})$ el espacio finito de funciones definido como:

$$\mathcal{S}_1^0(\mathcal{T}) = \{f \in C^0(\Omega) : f|_{\Delta_i} \in \Pi_1, i = 1, \dots, m\}$$

donde cada Δ_i es un triángulo de \mathcal{T} , Π_1 es el conjunto de funciones polinomiales lineales a donde la restricción de f sobre t_i pertenece y m es la cantidad de triángulos de \mathcal{T} . Ω representa el dominio triangulado por \mathcal{T} y $C^0(\Omega)$ el espacio de funciones continuas definidas en Ω , que no poseen derivadas continuas sobre los ejes de los triángulos de \mathcal{T} . \mathcal{S}_1^0 toma el 1 de Π_1 y el 0 de C^0 .

Sean z_1, \dots, z_n los valores reales asociados a cada uno de los puntos de \mathcal{P} . La condición de interpolación $f(x_i, y_i) = z_i$ determina una única *surface triangulation* en \mathcal{S}_1^0 . Es decir que, f es la única *surface triangulation* que define un polinomio lineal sobre cada triángulo Δ_i en \mathcal{T} y que interpola al conjunto $\{(x_i, y_i, z_i)\}$:

$$f|_{\Delta_i} \in \Pi_1, i = 1, \dots, m$$

$$f(x_i, y_i) = z_i, i = 1, \dots, n$$

con Π_1 el espacio de polinomios lineales. Notar que $m = 2n - h - 2$, siendo h la cantidad de puntos en la envolvente convexa de \mathcal{P} .

Cabe destacar que f depende directamente de la triangulación \mathcal{T} seleccionada por lo que se la denota como $f_{\mathcal{T}}$.

Sea $F_1(x, y) = (\tanh(9y - 9x) + 1)/9$ la función que se desea triangular, cuya representación gráfica se muestra en la siguiente figura:

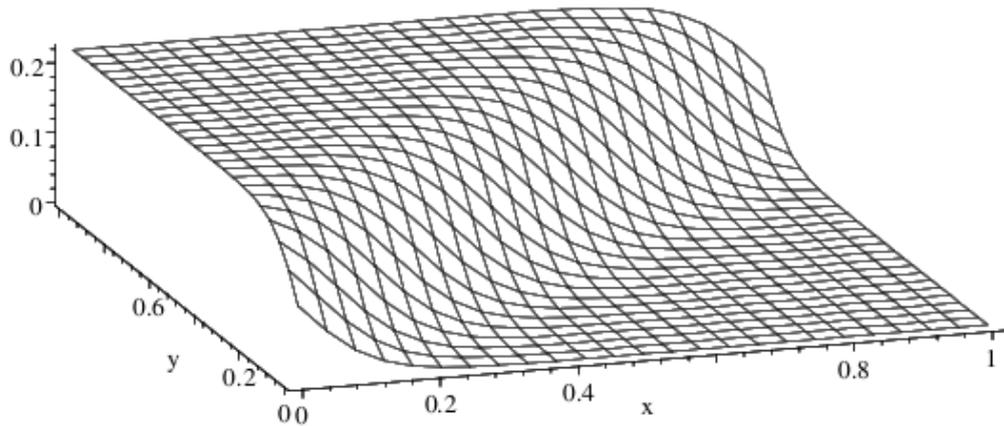


FIGURA 5.1: Función de prueba $F_1(x, y) = (\tanh(9y - 9x) + 1)/9$. [11]

Si se trata de aproximar la superficie generada por F_1 utilizando la triangulación de *Delaunay* \mathcal{T} y tomando como \mathcal{P} a los puntos de una cuadrícula como muestra la [Figura 5.2](#), se obtiene la siguiente aproximación:

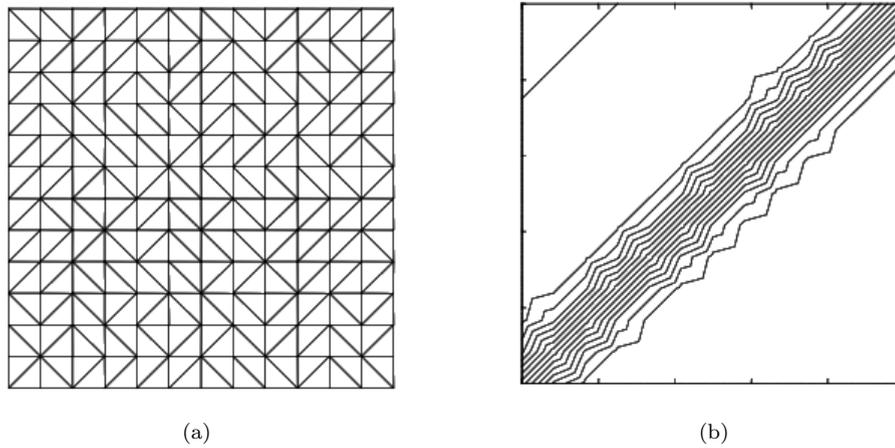


FIGURA 5.2:
 (a) Triangulación de *Delaunay* \mathcal{T} de un conjunto de puntos seleccionado sobre una cuadrícula.
 (b) Curvas de nivel de la aproximación $f_{\mathcal{T}}$ a F_1 . [11]

Y supongamos que se construye otra triangulación \mathcal{T}' sobre el mismo conjunto de puntos pero utilizando el *método de Lawson* con el criterio **ABN** y la norma \mathcal{L}_1 y define la función $f_{\mathcal{T}'}$ sobre \mathcal{T}' como muestra la figura **Figura 5.3**.

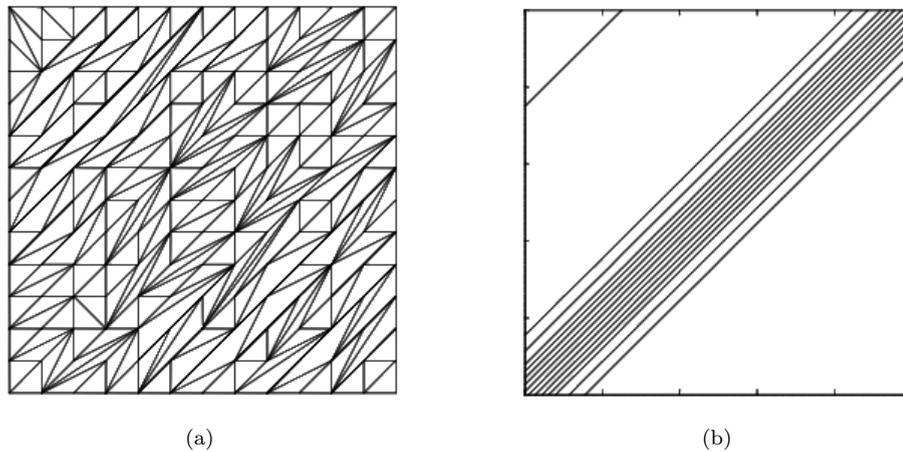


FIGURA 5.3:
 (a) Triangulación \mathcal{T}' construida utilizando el *método de Lawson* con el criterio **ABN** y la norma \mathcal{L}_1 .
 (b) Curvas de nivel de la aproximación $f_{\mathcal{T}'}$ a F_1 . [11]

Las curvas de nivel de $f_{\mathcal{T}'}$ son claramente más exactas que las de $f_{\mathcal{T}}$ e indican que $f_{\mathcal{T}'}$ es más suave, en cierto sentido, que $f_{\mathcal{T}}$. En muchas aplicaciones se preferiría $f_{\mathcal{T}'}$ a $f_{\mathcal{T}}$ y, por consiguiente, la triangulación \mathcal{T}' a \mathcal{T} (aunque \mathcal{T}' no posea la propiedad *equiangular* que sí poseen las de triangulaciones de *Delaunay*). Más aún, se puede observar en la **Figura 5.3 (a)** que \mathcal{T}' posee varios triángulos que son largos y angostos.

Las observaciones anteriores sugieren que es deseable buscar alternativas a los criterios de *Delaunay* para decidir si una triangulación es óptima. En particular, resulta importante la búsqueda de criterios que utilicen los valores de los datos $\{z_i\}$.

5.1. Triangulaciones dependientes de datos

En el capítulo anterior se presentó el [método de Lawson](#) como procedimiento para obtener triangulaciones localmente óptimas, respecto a algún criterio predefinido, partiendo de una triangulación arbitrariamente construida. En particular, si se definen funciones de costo local que tienen en cuenta los valores del conjunto de datos muestreados $\{z_i\}$ se obtienen las triangulaciones llamadas **triangulaciones dependientes de datos** (DDT por su nombre en inglés, *Data Dependent Triangulations*).

La definición y selección de estas funciones de costo local dependen del criterio que se desee optimizar y de la superficie que desea aproximarse.

Concepto general

Sea \mathcal{T} una triangulación arbitraria del conjunto de los puntos (no degenerado) \mathcal{P} con valores de datos asociados $\{z_i\}$ y $f_{\mathcal{T}}$ la *surface triangulation* definida sobre \mathcal{T} . Para cada borde interior e_i de \mathcal{T} se asocia una función de costo local $\mu(\mathcal{T}, e_i)$ que mapea e_i con un valor real en \mathcal{T} .

En general, el costo local asociado con un borde interior \mathcal{T} se encuentra relacionado con una medida sobre la superficie del entorno de ese eje en la triangulación. Un ejemplo de esto último es: el ángulo entre las normales de los dos triángulos que comparten al eje e_i . Varias funciones de costo local se presentan y se comparan en las siguientes secciones.

En función de los costos de cada uno de los ejes de \mathcal{T} se puede construir un *vector indicador* \mathcal{V} definido como:

$$\mathcal{V} = (\mu(\mathcal{T}, e_1), \dots, \mu(\mathcal{T}, e_j))$$

siendo j la cantidad total de ejes en \mathcal{T} . Notar que $j = 3n - h - 3$, siendo h la cantidad de puntos en la envolvente convexa de \mathcal{P} .

La calidad de la triangulación \mathcal{T} se encuentra determinada por la medida del *vector indicador* utilizando alguna norma apropiada. Se pueden utilizar las normas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 (tal como se sugiere en el capítulo anterior) dando lugar así a la definición de las siguientes funciones de costo global de valores reales en \mathcal{T} :

$$C_{\mathcal{L}_p}(\mathcal{T}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^j \mu(\mathcal{T}, e_i)^p}, p = 1, 2$$

No obstante se puede utilizar como función de costo global cualquier otra que se desee. En el [Apéndice A](#) se definen algunas posibles normas que pueden ser utilizadas como funciones de costo global.

Diferentes triangulaciones definidas sobre el mismo conjunto de puntos \mathcal{P} se pueden comparar mediante la comparación de sus funciones de costo global asociadas. La **triangulación óptima** respecto al criterio de medición μ dentro de todas las posibles triangulaciones de \mathcal{P} será aquella que posea el valor de la función de costo global más pequeño.

Los criterios dependientes de datos que se presentan en la siguiente sección inducen una función de costo local asociada a un borde interior e_i de una triangulación \mathcal{T} que se puede calcular utilizando la información geométrica asociada a los dos triángulos que comparten a e_i . El entorno que rodea a ese eje se denomina *vecindad* de e_i . Por lo tanto, el efecto de intercambiar e_i por e'_i en \mathcal{T} y la consecuente transformación de \mathcal{T} a una nueva triangulación \mathcal{T}' , se puede comprobar localmente. La [Figura 5.4](#) muestra resaltados los ejes cuyos costos se ven afectados por el intercambio de e_i en \mathcal{T} .

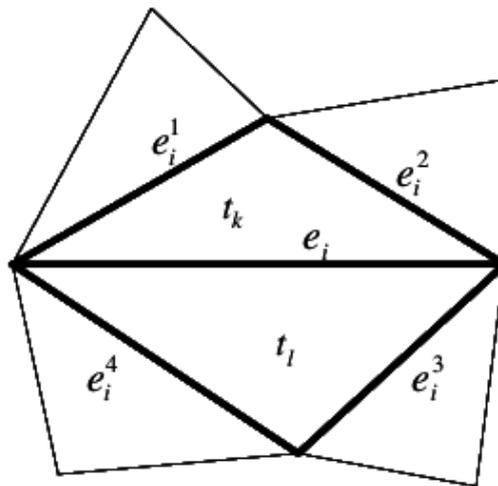


FIGURA 5.4: Ejes que deben ser verificados al intercambiar e_i .[\[11\]](#)

De lo anterior puede deducirse que, para las funciones de costo global antes mencionadas, basta con realizar la verificación de las funciones de costo de la *vecindad* del eje a intercambiar para obtener su valor y así poder determinar la calidad de la nueva triangulación obtenida con respecto a la anterior.

5.2. Criterios dependientes de datos

Un **criterio** de triangulación elige dentro de todas las posibles, su triangulación preferida y define una función de orden en el conjunto. Se dice que $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$ (es decir que \mathcal{T}' es más chica que \mathcal{T}) cuando el *criterio* prefiere a \mathcal{T}' antes que a \mathcal{T} .

Se dice que una triangulación \mathcal{T}' del conjunto de puntos \mathcal{P} es *óptima* respecto a un determinado **criterio** si $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$, para toda triangulación \mathcal{T} de \mathcal{P} .

La triangulación *óptima* para un conjunto de puntos \mathcal{P} respecto a un criterio dado siempre existe, pero puede ser muy costoso hallarla. Es por esto que, en la práctica, se suelen buscar las triangulaciones *localmente óptimas* utilizando como herramienta de construcción de las mismas alguno de los métodos presentados en el capítulo anterior (asociando un criterio a una función de costo local).

En esta sección se presenta una clase de criterios que se pueden utilizar como funciones de costo local. Los criterios que se presentan a continuación se denominan **criterios dependientes de datos** ya que utilizan para su definición los valores del conjunto $\{z_i\}$ antes presentado. Más específicamente, el diseño de las funciones de costo local $\mu(\mathcal{T}, e_i)$ asociado a cada eje e_i de una triangulación \mathcal{T} que se utilizan para las funciones de costo global se calcula utilizando la información de los dos triángulos t_1 y t_2 que comparten el eje e_i en \mathcal{T} (ver: [Figura 5.5](#)).

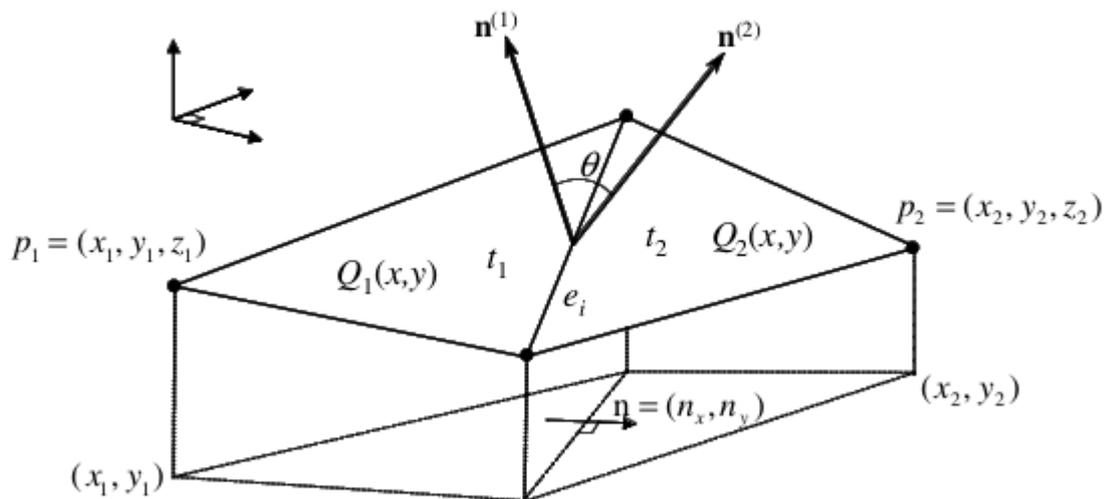


FIGURA 5.5: Información geométrica de la *vecindad* de e_i que puede ser de utilidad para definir las funciones de costo local. El eje e_i es la diagonal del cuadrilátero convexo definido por dos triángulos t_1 y t_2 . $Q_1(x,y)$ y $Q_2(x,y)$ son las ecuaciones de los planos definidos por t_1 y t_2 . El vector $n = (n_x, n_y)$ es un vector unitario ortogonal a la proyección de e_i en el plano (x,y) . [11]

Como notación común para las funciones de costo local que se presentan a continuación, se utilizan los dos planos Q_1 y Q_2 asociados a los triángulos t_1 y t_2 . Es decir, Q_1 y Q_2 son las restricciones de la *surface triangulation* $f_{\mathcal{T}}$ a t_1 y t_2 respectivamente.

A continuación se presentan algunas de las posibles funciones de costo, que aparecen en la literatura consultada, para criterios dependientes de datos.

5.2.1. Angle Between Normal (ABN)

Sean $n^{(1)}$ y $n^{(2)}$ los vectores normales a los planos Q_1 y Q_2 respectivamente, tal como se muestra en la [Figura 5.5](#). Los vectores normales son los gradientes de las superficies implícitas $q_i(x, y, z) = -a_i x - b_i y + z = 0$, $i = 1, 2$ de Q_1 y Q_2 .

$$n^{(i)} = \nabla q_i(x, y, z) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}, \frac{\partial q_i}{\partial y}, \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) = (-a_i, -b_i, 1), i = 1, 2$$

La función de costo **ABN** se define como la medida del ángulo θ entre $n^{(1)}$ y $n^{(2)}$ y θ se puede expresar como el siguiente producto escalar:

$$\cos \theta = \frac{n^{(1)} \cdot n^{(2)}}{\|n^{(1)}\|_2 \|n^{(2)}\|_2}$$

En función de lo anterior, se obtiene la siguiente función de costo:

$$\mu_{ABN}(\mathcal{T}, e) = \theta = \cos^{-1} \frac{n^{(1)} \cdot n^{(2)}}{\|n^{(1)}\|_2 \|n^{(2)}\|_2} = \cos^{-1} \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + 1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + 1)(a_2^2 + b_2^2 + 1)}}$$

La función de costo antes definida mide, se cierta forma, la suavidad local del eje e_i en \mathcal{T} . La idea detrás de aplicar algún método de optimización local con función de costo local μ_{ABN} es suavizar la superficie de la representación obtenida: el objetivo es obtener una representación con normales que exhiban pocos cambios al pasar por los ejes de la triangulación.

5.2.2. Piecewise Linear analog of Curvature (PLC)

Esta función de costo fue presentada por Brown en [\[17\]](#). A diferencia del criterio anterior, en donde la asignación de costo es por ejes, este se centra en los vértices (ver [VBLOP](#)). Brown en su trabajo menciona haber probado diversas funciones de costo por vértices, pero presentó la que funcionó en sus pruebas mejor que ABN. Se presenta su definición formal a continuación.

Sea \mathcal{T} una triangulación de \mathcal{P} y sea u un vértice de \mathcal{T} . Sean s_1, \dots, s_m ejes en \mathcal{T} que contienen a u , ordenados en sentido horario. Sea $n_i = s_i \times s_{(i+1) \bmod m}$ para $i = 1, \dots, m$ (si u no está en el borde) o para $i = 1, \dots, m-1$ (si u está en el borde). Es decir que, n_i son normales a los triángulos adyacentes a u . Se define $n = \sum_i \frac{n_i}{\|n_i\|_2}$ y se define:

$$\mu_{PLC}(\mathcal{T}, u) = \sum_i \left(\cos^{-1} \frac{n \cdot n_i}{\|n\|_2 \|n_i\|_2} \right)^2$$

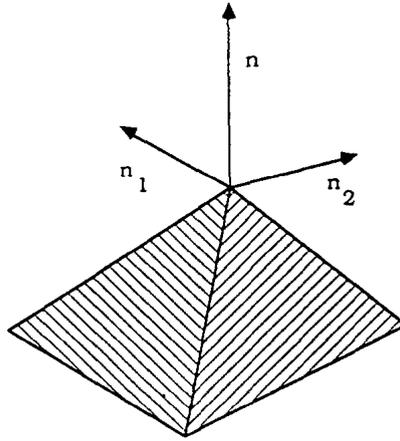


FIGURA 5.6: n_1 y n_2 son los vectores normales a los triángulos adyacentes a u y n es la suma de las normales normalizadas.[17]

En [17] se mencionan variantes de este criterio. Una de ellas consiste en modificar la fórmula para que no calcule la inversa del coseno. La otra variante consiste en no normalizar las normas de los triángulos adyacentes, es decir tomar $n = \sum_i n_i$. Según las pruebas presentadas en [17], ambas variantes resultaron ser peores que la definición de PLC enunciada y, es por esto que, se utilizó esta última como definición formal del método propuesto por Brown.

5.2.3. Refined Angle Between Normals (WABN)

Esta función de costo fue presentada por Weisz et al. en [18]. Es una modificación del criterio ABN antes descrito que propone incorporar a la función de costo la longitud del vector e_i . Es decir:

$$\mu_{WABN}(\mathcal{T}, e_i) = \|e_i\|_2 \cdot \cos^{-1} \frac{n^{(1)} \cdot n^{(2)}}{\|n^{(1)}\|_2 \|n^{(2)}\|_2}$$

Donde $n^{(1)}$ y $n^{(2)}$ se definen como en el criterio [ABN](#).

Al igual que para ABN, lo que este criterio tiene como objetivo es suavizar la representación obtenida y, la motivación por la que surge esta variante, es el hecho de que para ABN los ejes de triángulos largos y angostos con un mismo valor de μ son considerados igual de buenos (o malos). En el caso de WABN el costo de un eje de mayor longitud es mayor que otro de menor longitud. Es decir que el criterio prefiere ejes cortos a ejes largos (que tengan el mismo valor de μ_{ABN}) tendiendo a evitar *slivers*.

5.2.4. Jump Normals Derivatives (JND)

Sea $n = (n_x, n_y)$ un vector unitario en el plano xy ortogonal a la proyección de e_i sobre el plano xy (ver: [Figura 5.5](#)). La derivada de Q_i en la dirección de n se define por el siguiente producto escalar:

$$\partial Q_i / \partial n = \nabla Q_i \cdot n = (\partial Q_i / \partial x, \partial Q_i / \partial y) \cdot (n_x, n_y) = a_i n_x + b_i n_y$$

La función de costo JND, presentada en [\[19\]](#), se define como:

$$\mu_{JND}(\mathcal{T}, e_i) = |\partial Q_1 / \partial n - \partial Q_2 / \partial n| = |(a_1 - a_2)n_x + (b_1 - b_2)n_y|$$

Este es un criterio muy similar a ABN. Tanto JND como ABN son criterios que, en cierto sentido, están relacionados a la minimización de la curvatura media.

5.2.5. Deviations from Linear Polynomials (DLP)

La definición formal de esta función de costo según [\[19\]](#) es:

$$\mu_{DLP}(\mathcal{T}, e_i) = \left\| \begin{pmatrix} Q_1(x_2, y_2) - z_2 \\ Q_2(x_1, y_1) - z_1 \end{pmatrix} \right\|$$

Esta función de costo mide la distancia vertical entre el plano Q_1 y el vértice p_2 y vice versa para Q_2 y p_1 (para alguna $\|\cdot\|$ norma definida en \mathbb{R}^2).

5.2.6. Distances From Planes (DFP)

En este caso, la distancia utilizada en la definición de la función de costo DLP se reemplaza por la distancia normalizada entre p_1 y p_2 con Q_2 y Q_1 respectivamente. En

[19] se presenta la siguiente definición:

$$\mu_{DFP}(\mathcal{T}, e_i) = \left\| \begin{pmatrix} \text{dist}(Q_1, p_2) \\ \text{dist}(Q_2, p_1) \end{pmatrix} \right\|$$

La distancia entre el plano $Q(x, y) = ax + by + c$ y un punto $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ se define como:

$$\text{dist}(Q, p_i) = |Q(x_i, y_i) - z_i| / (a^2 + b^2 + 1)^{1/2}$$

Tanto este criterio como el anterior miden la distancia entre cada plano asociado a uno de los dos triángulos y el otro punto del cuadrilátero. La diferencia entre ellos radica en la forma en que miden esta distancia. En DLP se mide la distancia vertical, mientras que en DFP se usa la distancia normalizada (es decir, la distancia entre el punto y el punto más cercano del plano).

La diferencia entre DLP y DFP es notoria cuando la distancia vertical es muy distinta de la distancia normalizada. Es el caso, por ejemplo, de un cuadrilátero con forma de valle y planos muy inclinados. En este caso, el ángulo entre las normales se encuentra cerca de los 180° por lo que la distancia vertical puede ser muy grande y la distancia normalizada muy pequeña. Esta diferencia puede indicar la preferencia de un criterio a otro.

En ambos casos (y al igual que ocurre con ABN y JND) al minimizar estos valores se intenta que los dos triángulos sean lo más coplanares posibles. Notar que, como se menciona en [11], estas funciones dan cero cuando los triángulos son coplanares, y aumentan cuando lo son menos. La forma de medir cuan no coplanares son es en lo que las cuatro difieren. Esto se debe a que estos cuatro criterios se presentan en Dyn et al. [19] y allí se concentran en criterios que permitan obtener terrenos suaves (en el sentido de continuidad C^1).

5.2.7. Análisis comparativo y resultados

Como vimos, existen varios criterios que se utilizan para generar DDTs. No es el objetivo encontrar uno que sea óptimo para todas las triangulaciones sino identificar cuáles son útiles en función de las características del terreno a modelar, pudiendo así elegir uno u otro para conseguir una representación más fiel que la que produce la triangulación de *Delaunay*.

En [19], por ejemplo, se presentan una gran variedad de criterios y heurísticas para generar triangulaciones, muchas de las cuales se pusieron a prueba con funciones matemáticas $F(x, y)$ como funciones subyacentes a las superficies que se desea aproximar con las triangulaciones obtenidas. Pudo deducirse, en función de estas pruebas, que no hay ningún esquema que funcione mejor que otro para todas las funciones de prueba $F(x, y)$ utilizadas.

En la literatura consultada se presentan diversas variantes de los criterios y heurísticas antes enunciados, así como también, pruebas y análisis que pueden ayudar a deducir en qué casos algunos criterios son más apropiados que otros. Cabe destacar que, para comprar triangulaciones producidas con distintos criterios se utilizan métricas como las mencionadas en el [Apéndice A](#). Para realizar esta tarea es necesario tomar una muestra del terreno real (o función subyacente) como *ground truth* para poder medir las distancias entre esos puntos y la representación obtenida tras es proceso de triangulación seleccionado.

A continuación presentamos una reseña de las pruebas encontradas y su correspondiente análisis comparativo.

Sea \mathcal{T} una triangulación de puntos y $E(\mathcal{T})$ el conjunto de ejes internos de \mathcal{T} .

Nombre	$C(\mathcal{T})$	Método
$ABN_{\mathcal{L}_1}$	$C_{ABN_{\mathcal{L}_1}} \quad \sum_{e \in E(\mathcal{T})} \mu_{ABN}(\mathcal{T}, e)$	Lawson con $\mathcal{T}^0 = DT$
$ABN_{\mathcal{L}_2}$	$C_{ABN_{\mathcal{L}_2}} \quad \sqrt{\sum_{e \in E(\mathcal{T})} \mu_{ABN}(\mathcal{T}, e)^2}$	Lawson con $\mathcal{T}^0 = DT$
$WABN_{\mathcal{L}_1}$	$C_{WABN_{\mathcal{L}_1}} \quad \sum_{e \in E(\mathcal{T})} \mu_{WABN}(\mathcal{T}, e)$	Lawson con $\mathcal{T}^0 = DT$
$WABN_{\mathcal{L}_2}$	$C_{WABN_{\mathcal{L}_2}} \quad \sqrt{\sum_{e \in E(\mathcal{T})} \mu_{WABN}(\mathcal{T}, e)^2}$	Lawson con $\mathcal{T}^0 = DT$

CUADRO 5.1: Algunas variantes de funciones de costo global para DDTs en función de los criterios antes definidos.

En [18] se presenta un análisis comparativo entre: DT, $ABN_{\mathcal{L}_1}$, $ABN_{\mathcal{L}_2}$, $WABN_{\mathcal{L}_1}$ y $WABN_{\mathcal{L}_2}$. Las pruebas se realizaron sobre funciones matemáticas como funciones subyacentes a la superficie a modelar, con vectores de 33 puntos aleatorios como muestra

y se tomaron las métricas de error con $\mathcal{L}_2 - error$. Como resultado de estas pruebas se pudo deducir que:

- Ninguno de ellos funcionó sistemáticamente mejor que el otro. Más aún, hubo un caso en que DT dio mejores resultados.
- Comparando $ABN_{\mathcal{L}_1}$ con $WABN_{\mathcal{L}_1}$ funcionó mejor en más casos $WABN_{\mathcal{L}_1}$. Y lo mismo ocurrió en la comparación entre $ABN_{\mathcal{L}_2}$ y $WABN_{\mathcal{L}_2}$, pero no por mucho.
- Más allá de que fue mayor la cantidad de veces en que $WABN_{\mathcal{L}_*}$ funcionó mejor que $ABN_{\mathcal{L}_*}$, las métricas de error no distan tanto entre sí.

En Brown [17] se presenta un análisis comparativo entre: DT, PLC y ABN (usando VBLOP como heurística para ambos casos y con DT como triangulación inicial). Las pruebas se realizaron sobre una base de 100 puntos aleatorios, usando funciones matemáticas como funciones subyacentes a la superficie que se desea modelar y las métricas de error se tomaron con MAE. Las funciones que se utilizaron como objetivo a modelar representan superficies con una dirección preferida que son superficies que, por sus características, en general *no* resultaron ser bien aproximadas utilizando DT. Como resultado de esas pruebas pudo deducirse que:

- DT resultó ser una mala aproximación para casi todas las superficies de prueba (es decir, DT puede ser una mala aproximación para superficies con una dirección predefinida). Existen casos en donde, si la superficie no posee una dirección preferida, DT funciona mejor que PLC y ABN, pero las aproximaciones son similares en cualquier caso.
- PLC permitió obtener aproximaciones de mejor calidad que ABN, aunque ambas resultaron mejor que DT. Existen casos en donde ABN funciona mejor que PLC pero, al igual que antes, las aproximaciones resultan ser similares entre si.
- PLC, si bien funcionó mejor, requirió más iteraciones que ABN. No obstante, cabe destacar que, a igual cantidad de iteraciones PLC funciona mejor que ABN.
- Las primeras 3 iteraciones de VBLOP resultaron ser las más importantes, no justificándose realizar las últimas iteraciones ya que las mismas proveen mejoras poco significativas.

En Dyn et al. [19] se presenta un análisis comparativo entre: ABN, JND, DLP y DFP. Las pruebas dieron más satisfactorias para ABN y JND que para las dos últimas y es por esto que se realizaron pruebas más exhaustivas para los primeros criterios. No obstante,

cabe destacar que tanto para DLP como DFP se obtuvieron, en algunos casos, mejores aproximaciones que con DT.

Los experimentos numéricos que se presentan en [19] se centran en funciones matemáticas como funciones subyacentes a las superficies a modelar, una base de 100 puntos con distribución uniforme como puntos de muestra de dicha superficie y se midió el error con MAE. Se presenta un análisis comparativo entre los criterios ABN y JND, utilizando como funciones de costo global las normas \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_∞ . Nos referiremos a estas variantes como: $ABN_{\mathcal{L}_1}$, $ABN_{\mathcal{L}_2}$, ABN_∞ , $JND_{\mathcal{L}_1}$, $JND_{\mathcal{L}_2}$ y JND_∞ . Para algunas funciones matemáticas ninguno de estos criterios funcionó mejor (o considerablemente mejor) que la DT. En otros casos, se observaron mejoras y los que mejor funcionaron fueron $ABN_{\mathcal{L}_2}$ en primer lugar y $JND_{\mathcal{L}_2}$ en segundo lugar.

De toda la literatura consultada el único trabajo que presenta resultados con pruebas sobre terrenos reales es [8]. En este caso se utilizaron dos DEMs:

- El primero cubre un sector del área de *Kinzel Springs, Tennessee*. Esta área se caracteriza por ser geográficamente accidentada. Es una superficie con mucha variación de alturas ya que se vio afectada por el movimiento tectónico de placas y numerosas erosiones fluviales causadas por ríos que desembocan en el valle. Presenta dos cadenas montañosas principales una en el sudoeste y otra en el noreste. Puede verse en la [Figura 5.7](#) la imagen de este terreno.
- El segundo DEM cubre una porción del área de *Moorehead SE, Iowa*. Esta área es más llana que la del primer DEM ya que fue una región que se vio moldeada por la erosión causada por el derretimiento de glaciares. Puede verse en la [Figura 5.8](#) la imagen de este terreno.

En [8], se presenta un análisis comparativo entre los siguientes criterios:

- *SgiDt*: esquema en el que se realiza el proceso de selección de puntos y de triangulación en simultáneo (para su definición ver la [Sección 4.1](#) del capítulo anterior). Como criterio de triangulación se utiliza el de *Delaunay*.
- *MinAbnDdt*: se construye como triangulación inicial la triangulación de *Delaunay* y se procede al proceso de reconstrucción de la misma minimizando el costo de la función ABN.
- *MaxAbnDdt*: cabe destacar que el método anterior funciona bien si se asume que la superficie a modelar es suave, pero por lo general en GIS se trata con superficies a las que se les incorporan puntos específicos que producen grandes cambios de

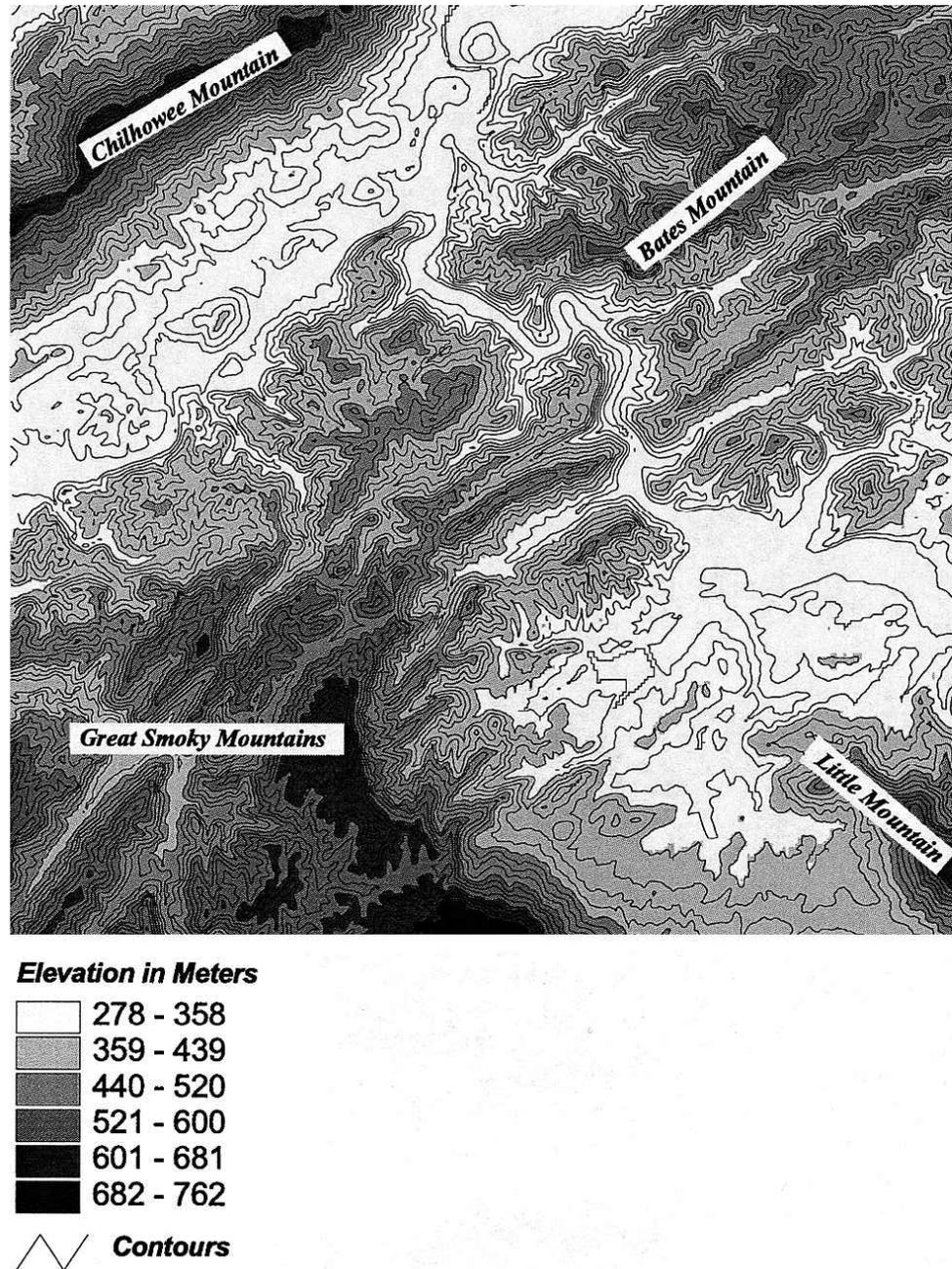
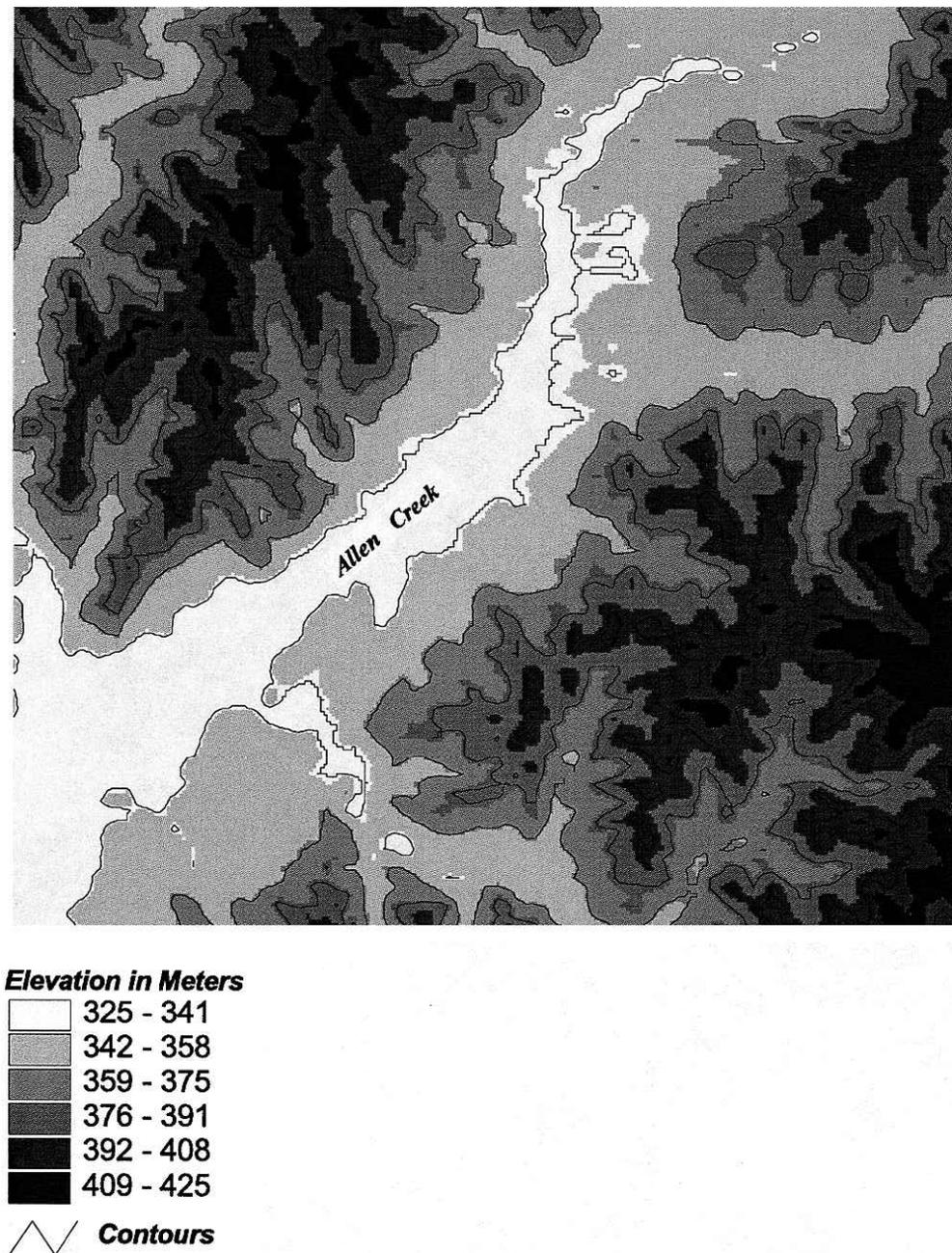


FIGURA 5.7: *Kinzel Springs, Tennessee.* [8]

curvatura. Es por esto que, si se utilizan muchos de estos puntos, el ABN de dos triángulos de la triangulación debería ser maximizado en lugar de minimizado. Este esquema implementa esta idea.

- *Hybrid*: uno de los mayores problemas de las triangulaciones dependientes de datos es que contienen demasiados *slivers*. Como un intento de resolver este problema se plantea un modelo híbrido diseñado para combinar las ventajas de la triangulación de *Delaunay* y las DDTs. En este esquema híbrido existen dos reglas de intercambio de ejes:

FIGURA 5.8: *Moorehead SE, Iowa.* [8]

1. El criterio de generación de DDTs utilizando como función de costo la \mathcal{L}_1 del error.
2. El criterio de *Delaunay* (es decir, verificar que el círculo circunscrito por cada triángulo quede vacío).

El uso de estas dos reglas durante el proceso de triangulación depende del promedio de las proporciones (*aspect ratio*) entre los triángulos adyacentes. Si el promedio

supera un determinado *threshold*, entonces se utiliza la regla número 2. En caso contrario, se utiliza la número 1. Se utiliza como *threshold* predefinido al valor máximo de las proporciones de la TIN generada utilizando el esquema *SgiDt* antes descrito.

Para cada uno de los dos DEMs se construyen TINs en función de un muestreo de 2500, 5000 y 10000 puntos. Se utilizó como *ground truth* un muestreo aleatorio de 900 puntos y las métricas de error utilizadas fueron MAE y RMSE. A continuación se presenta el detalle de la ejecución de cada una de estas pruebas para cada una de las funciones de costo mencionadas:

DEM	Criterio	MAE			RMSE		
		2500 pts	5000 pts	10000 pts	2500 pts	5000 pts	10000 pts
Kinzel Springs	SgiDt	5,765	3,562	2,055	7,455	4,539	2,634
	MinAbnDdt	6,075	3,743	2,242	8,028	4,957	3,155
	MaxAbnDdt	20,220	13,180	9,499	28,950	19,667	14,284
	Hybrid	11,560	6,806	3,633	15,610	9,250	4,976
Moorehead	SgiDt	1,175	0,643	0,326	1,512	0,838	0,430
	MinAbnDdt	1,234	0,677	0,341	1,627	0,912	0,467
	MaxAbnDdt	4,298	2,679	1,691	6,304	4,007	2,690
	Hybrid	2,964	1,587	0,785	3,944	2,122	1,078

CUADRO 5.2: Tabla de resultados. [8]

En función de los resultados mencionados se pudo concluir que:

- A medida que aumenta el tamaño de la muestra con la que se construye cada TIN los valores tanto el MAE como el RMSE decrecen.
- Las magnitudes de los errores para *Moorehead SE* (superficie suave) resultaron mucho más chicas que para *Kinzel Springs* (área geográficamente accidentada).
- Tanto *MinAbnDdt* como *MaxAbnDdt* generaron TINs con errores más grandes que la triangulación original. El proceso de suavización y empinamiento empeoró la situación. Esto produce una contradicción con el resultado obtenido por [19] ya que allí se muestra que utilizar ABN mejora la aproximación de la superficie obtenida. La razón de esta discrepancia puede radicar en que la función utilizada en los experimentos de Dyn et al. [19] para sus pruebas posee primera derivada continua y no oscila mucho entre puntos.

- El éxito tanto de *MinAbnDdt* como de *MaxAbnDdt* se encuentra directamente relacionado con las características del terreno a modelar. *MinAbnDdt* funcionó mejor para terrenos suaves y *MaxAbnDdt* para terrenos geográficamente accidentados.
- Pudo verse que las DDTs tienden a generar triangulaciones cuyos triángulos son finos y largos, lo cual en algunos casos puede ser algo no deseado.
- Si bien el método híbrido funcionó mejor que *MinAbnDdt* y *MaxAbnDdt*, no mejoró los resultados de *SgiDt*.

En [8] también se realizó un análisis comparativo entre las TINs generadas utilizando las métricas: $\mathcal{L}_1 - error$ y $\mathcal{L}_2 - error$. Los resultados favorecieron a la primera ya que la segunda métrica es más sensible a errores mayores.

5.2.8. Conclusiones

En función de la literatura consultada, lo visto y analizado en las secciones anteriores, se puede llegar a las siguientes conclusiones sobre los criterios dependientes de datos:

Pueden generar aproximaciones con triángulos angostos y largos.

No puede decirse que un criterio funcione sistemáticamente mejor o peor que otro.

Dependiendo del caso la triangulación de *Delaunay* puede ser una mejor aproximación.

Criterio	Análisis
ABN	No puede decirse que sea mejor o peor que DT pero hubo varios casos en los que produjo mejores aproximaciones. Busca preservar la suavidad y empinamiento del terreno.
MinAbnDt	Funciona mejor en superficies suaves o planas.
MaxAbnDt	Funciona mejor en superficies geográficamente accidentadas.
WABN	En algunos casos funcionó mejor que ABN pero no por mucho (las aproximaciones son similares).
JND	Al igual que ABN, se encontraron casos donde funcionó mejor y otros donde funcionó peor que el resto de los criterios.
PLC	Produce aproximaciones similares a ABN. Según Brown en [17] funcionó en general mejor que ABN y hasta incluso mejor que otras funciones de costo presentadas en dicho trabajo.
DLP	En varios casos construyó peores aproximaciones que ABN y JND.
DFP	En varios casos construyó peores aproximaciones que ABN y JND.
Modelo híbrido	En algunos casos funcionó mejor que el resto de los criterios pero, en general, construyó peores aproximaciones que <i>SgiDt</i> .

5.3. Selección de criterios

El objetivo de esta sección es presentar el conjunto de criterios seleccionados para ser implementados en el presente trabajo. El detalle de cada uno de estos criterios se presenta en las secciones anteriores y los detalles de implementación concretos se presentan en el Capítulo 6.

Como se mencionó anteriormente, mientras muchos métodos de triangulación convencionales usan sólo la distribución de los puntos en \mathbb{R}^2 , la construcción de triangulaciones dependiente de datos sugiere la inclusión de determinados datos (como son las elevaciones) asociados a cada uno de los puntos que se desea triangular. Esto permite incorporar a la construcción de triangulaciones ciertas características del terreno a modelar. En particular, en el presente trabajo, nos concentramos en la construcción de triangulaciones de alto orden que optimicen los criterios seleccionados utilizando el *método de Lawson* para su construcción.

En la literatura consultada se encontraron casos en donde las DDTs mejoran la calidad de las triangulaciones obtenidas con respecto a la tradicional triangulación de *Delaunay*. Es por esto que, el presente trabajo, se concentra en la implementación de este tipo de criterios como base para la construcción de HODTs.

Varios de los criterios dependientes de datos y sus correspondientes casos de prueba fueron presentados en [19]. Muchas de las pruebas numéricas que se presentan en dicho trabajo evidenciaron ciertas mejoras en las aproximaciones generadas utilizando DDTs respecto de la triangulación de *Delaunay*. Tanto en [19] como en [20] se presentan resultados que favorecen a **ABN** como criterio a seleccionar. Más aún, en la literatura consultada se encuentra como criterio predominante el de **ABN**. Es por esto que el presente trabajo incluye una implementación del mismo.

No obstante, la minimización o maximización del criterio **ABN** puede no funcionar bien en algunos casos. Wang et al. en [8] sugieren que el éxito de estas métricas se encuentra influenciado por las características geométricas de las superficies a modelar. Más allá de que existan casos en donde **ABN** no funcione bien es uno de los criterios más relevantes en la literatura consultada.

El segundo criterio que se seleccionó para ser implementado en el presente trabajo es **JND**. Como vimos, es un criterio muy similar a **ABN** y es otro de los criterios que más aparece en la literatura consultada. Existen pruebas, realizadas en dichos trabajos, en las que funciona mejor que utilizar la triangulación de *Delaunay* y es por esto que, el presente trabajo, incluye una implementación del mismo.

El tercer criterio seleccionado para ser implementado es **WABN**. Es una variación muy simple del criterio ABN que según [18] funciona en algunos casos mejor que ABN ya que tiene en cuenta, además de la curvatura, la forma de los triángulos.

Así mismo, cabe destacar que, para el presente trabajo se asume que el conjunto de vértices es dato, por lo tanto, los criterios utilizados en [8] que se basan en aprovechar la etapa de selección de puntos del terreno no se tendrán en cuenta, aunque consideramos que se debería explorar más ese camino dado que tanto en [8] como [21] se muestra que la mayoría de las mejoras significativas se pueden conseguir al realizar la selección de puntos en paralelo con la triangulación.

Como vimos, en [17] se presentó el criterio llamado PLC. Si bien, según las pruebas realizadas en ese trabajo, PLC funcionó en varios casos mejor que ABN, este criterio no fue implementado y forma parte del trabajo futuro del presente trabajo.

Capítulo 6

Implementación

El presente trabajo incluye la implementación de un software capaz de leer datos de elevación y construir triangulaciones de alto orden que optimicen los criterios previamente seleccionados.

El objetivo de este capítulo es presentar el conjunto de herramientas utilizadas para realizar esta tarea, los detalles relativos a la implementación de los algoritmos para los criterios seleccionados, la forma de obtención y manipulación de datos utilizada y la manera en que realizaron los experimentos con los terrenos seleccionados.

El objetivo final de cada una de las etapas involucradas en el desarrollo realizado es determinar, en base a pruebas sobre terrenos reales (de distintos tipos y características), qué efecto tiene el uso de HODTs en la práctica.

Una de las formas de construcción de triangulaciones de alto orden implementadas consiste en modificar la triangulación de *Delaunay* con el *método de Lawson* como heurística para generar triangulaciones que optimicen localmente el conjunto de criterios seleccionados en el [Capítulo 5](#). Los pseudocódigos completos de estos algoritmos se presentan en la [Sección 6.1](#).

En la [Sección 6.2](#) se presenta una reseña de las herramientas utilizadas para las implementaciones realizadas incluyendo tanto información sobre cada una de ellas como indicaciones de las etapas del desarrollo para las cuales fueron de utilidad.

En la [Sección 6.3](#) se presentan ciertos detalles de implementación concretos. Estos últimos incluyen detalles referentes a la adaptación del software existente para el manejo de triangulaciones de *Delaunay* para que soporte triangulaciones de alto orden, la implementación ciertos algoritmos particulares, las optimizaciones realizadas para el cálculo del error y las manipulaciones de los datos propuestas para mejorar los resultados obtenidos.

6.1. Pseudocódigo de algoritmos implementados

Como vimos, la triangulación de *Delaunay* es única si el conjunto de puntos del cual se parte es no degenerado. Se plantean como extensión de la triangulación de *Delaunay* las triangulaciones de alto orden que, al relajar el criterio de que no haya puntos dentro de las circunferencias circunscritas por cada triángulo, pueden no ser únicas y permitir así la incorporación de ciertos criterios a su construcción con el fin de obtener una mejor aproximación a la superficie que se está modelando.

Una forma de incorporar estos criterios es utilizando el *método de Lawson* que permite obtener triangulaciones localmente óptimas en función del criterio que se desee optimizar.

La idea general de los pseudocódigos propuestos para ser implementados es aplicar el *método de Lawson*, tomando como triangulación inicial la triangulación de *Delaunay*, y en cada paso realizar los intercambios de ejes correspondientes (dependiendo el criterio que se desee optimizar) para así llegar a una triangulación de orden k localmente óptima respecto a dicho criterio.

Como vimos en el [Capítulo 5](#) los criterios seleccionados para ser implementados son: ABN, WABN y JND. Cada uno de estos criterios conlleva a la definición de su correspondiente función de costo local (para más detalles ver [Sección 5.2](#)):

ABN: $\mu_{ABN}(\mathcal{T}, e)$, **WABN:** $\mu_{WABN}(\mathcal{T}, e)$ y **JND:** $\mu_{JND}(\mathcal{T}, e)$, para $e \in \text{ejes}(\mathcal{T})$.

Como funciones de costo global $C_*(\mathcal{T})$ se utilizaron las siguientes:

Máximo: $C_{max_*}(\mathcal{T}) = \max\{\mu_*(\mathcal{T}, e) | e \in \text{ejes}(\mathcal{T})\}$.

Mínimo: $C_{min_*}(\mathcal{T}) = \min\{\mu_*(\mathcal{T}, e) | e \in \text{ejes}(\mathcal{T})\}$.

Norma \mathcal{L}_1 : $C_{sum_*}(\mathcal{T}) = \sum_{e \in \text{ejes}(\mathcal{T})} \mu_*(\mathcal{T}, e)$.

Donde $*$ \in {ABN, JND, WABN}.

Para decidir si intercambiar o no un eje se utilizaron heurísticas golosas que maximizan o minimizan alguna de las funciones de costo global antes mencionadas. En particular, las heurísticas utilizadas fueron:

GreedyMinMax*: heurística golosa que minimiza la función de costo global $C_{max_*}(\mathcal{T})$.

GreedyMaxMin*: heurística golosa que maximiza la función de costo global $C_{min_*}(\mathcal{T})$.

GreedyMinSum*: heurística golosa que minimiza la función de costo global $C_{sum_*}(\mathcal{T})$.

GreedyMaxSum*: heurística golosa que maximiza la función de costo global $C_{sum_*}(\mathcal{T})$.

Así, por ejemplo, al referirnos al algoritmo **GreedyMinMaxABN** con $k = 8$ nos estamos refiriendo a la heurística que, partiendo de la triangulación de *Delaunay*, aplica el *método de Lawson* y realiza el intercambio de un eje si ese *flip* minimiza el valor del ABN del eje que posee el máximo valor de ese criterio y si además la triangulación resultante queda de orden a lo sumo 8. La formulación formal de esta heurística es:

GreedyMinMaxABN: heurística golosa que minimiza la función de costo global

$$C_{ABN}(\mathcal{T}) = \max\{\mu_{ABN}(\mathcal{T}, e) \mid e \in \text{ejes}(\mathcal{T})\}.$$

A continuación se presenta el pseudocódigo general para la heurística golosa de minimización para la función de costo global $C_*(\mathcal{T})$:

Algorithm 6: GreedyMin para $C_*(\mathcal{T})$

Input: Conjunto de vértices \mathcal{S} y el orden máximo de la triangulación k

Output: Triangulación \mathcal{T} de orden k localmente optima

Construir una triangulación inicial \mathcal{T}^0 con los vértices de \mathcal{S} .

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T}^0$

while \mathcal{T} *cambie* **do**

 Elegir un eje e de \mathcal{T} que no haya sido verificado antes.

if $esFlippable(e, \mathcal{T})$ **then**

 Obtener la triangulación \mathcal{T}' intercambiando al eje e por e' en \mathcal{T} .

if $order(\mathcal{T}') \leq k$ **then**

$cT \leftarrow C_*(\mathcal{T})$

$cT' \leftarrow C_*(\mathcal{T}')$

if $cT' < cT$ **then**

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T}'$

 Marcar el nuevo eje e' de la triangulación como verificado.

else

 Marcar e como verificado.

end

else

 Marcar e como verificado.

end

else

 Marcar e como verificado.

end

end

Donde el predicado $esFlippable(\mathcal{T}, e)$ es verdadero cuando el eje e es la diagonal de un cuadrilátero convexo en \mathcal{T} y la función $order(\mathcal{T})$ calcula el *orden* de la triangulación \mathcal{T} .

Notar que el método propuesto es muy similar al *método de Lawson* pero incorpora la noción del orden de la triangulación a construir. Como vimos en el [Capítulo 5](#) el *método de Lawson* original tiene complejidad teórica $O(n * l)$ (siendo l una cota para la cantidad total de iteraciones del ciclo) si se asume que las mediciones y el intercambio de ejes dentro de cada ciclo se pueden realizar en tiempo $O(1)$.

Si bien la implementación propuesta mantiene el tiempo $O(1)$ para el *flip* de cada eje, tanto el ajuste del cálculo del costo de cada triangulación tras el intercambio como el cálculo del orden de un eje se hace en tiempo $O(n)$. Si bien se puede determinar en tiempo constante cuál es la circunferencia que determina el orden de la triangulación (en base a una de las propiedades antes descrita), para descubrir que puntos caen dentro de dicha circunferencia se deben recorrer, en el peor caso, todos los puntos de la misma.

Por lo tanto, la complejidad de la implementación propuesta para el *método de Lawson* aplicado a triangulaciones de orden k es $O(n^2 * l)$ (siendo l una cota para la cantidad total de iteraciones del ciclo). En este capítulo se presentan algunos detalles de implementación que hacen posible mantener esta complejidad algorítmica.

Cabe destacar que, se presentó el pseudocódigo para las heurísticas del tipo *GreedyMin* pero, para las heurísticas del tipo *GreedyMax*, basta con tomar negativos los costos globales.

El método antes presentado asume una pre-selección del criterio (o función de costo) que se desea optimizar. En el presente trabajo se utilizaron las variantes de las heurísticas golosas descritas para cada función de costo local seleccionada.

Así mismo, se cuenta con una implementación del algoritmo exacto de optimización para criterios del tipo MinMax o MaxMin para triangulaciones de orden 1 presentado en la [Sección 4.2.2.1](#).

6.2. Herramientas utilizadas

En esta sección se presentan las herramientas utilizadas para las implementaciones realizadas. Se presenta a continuación una reseña de cada una de las etapas involucradas en el desarrollo y las herramientas utilizadas en cada una de ellas:

- Los algoritmos implementados fueron probados en base a muestras de terrenos reales por lo que fue necesario contar con cierta información geográfica que se obtuvo de los datos provistos por la agencia [United States Geological Survey](#).
- Los datos geográficos fueron pre-procesados para poder ser manipulados en forma digital. Esta tarea fue realizada con la herramienta [Quantum GIS](#).
- La implementación de triangulaciones de alto orden con las heurísticas y criterios seleccionados así como también la manipulación de los datos geográficos en forma digital se realizó utilizando [Computational Geometry Algorithms Library](#).

6.2.1. United States Geological Survey (USGS)

Existen muchas agencias que se encargan de obtener y proveer información geográfica de manera gratuita y sencilla, entre ellas se destaca la *United States Geological Survey* (USGS).¹ En Wang et al. [8] se utilizó este recurso como fuente de datos para la realización de las pruebas presentadas en dicho trabajo y la misma se utilizó para la obtención de los datos geográficos de los terrenos con los cuales se realizaron las pruebas.

La información provista por la USGS puede ser accedida desde el sitio de *GeoCommunity*.² En particular, los datos de los terrenos utilizados para las triangulaciones construidas se pueden obtener a partir de las siguientes referencias:

- *Terreno de Moorhead SE (Iowa):*
<http://data.geocomm.com/catalog/US/61058/569/group4-3.html>
- *Terrenos de Kinzel Springs (Tennessee), Blockhouse y Cades Cove:*
<http://data.geocomm.com/catalog/US/61084/1972/group4-3.html>

Cabe destacar que, en el [Capítulo 7](#), se presenta una descripción detallada (acompañada de las imágenes correspondientes) para cada uno de estos terrenos.

¹<http://www.usgs.gov>

²<http://data.geocomm.com>

Los datos obtenidos de dichas agencias se encuentran en algún formato estándar de los sistemas de información geográfica. Dado que la biblioteca CGAL, utilizada para implementar los algoritmos, cuenta con un formato propio para cargar triangulaciones de *Delaunay* fue necesario realizar cierto pre-procesamiento de los datos geográficos obtenidos de dicha fuente. En la sección siguiente se presenta el pre-proceso realizado y los detalles de la herramienta utilizada.

6.2.2. Quantum GIS (QGIS)

*Quantum GIS*³ (QGIS) es una IDE de sistemas de información geográfica *open source* y múltiple plataforma que permite manipular diferentes tipos de datos (tanto vectoriales como mapa de bits o *raster*), crear, editar, realizar análisis y exportar datos espaciales, realizar cartografía y exploración interactiva de datos espaciales, entre otras.

Se utilizó esta herramienta para poder obtener los puntos de cada terreno con su respectiva elevación (*input* de los algoritmos implementados). El procedimiento que se siguió fue el siguiente:

- Importar el archivo con extensión **.DFF* (obtenido de la USGS) en QGIS.
- Generar en QGIS un *GEOTiff* seleccionando un rectángulo del terreno cargado que sea lo más amplio posible.
- Realizar una selección aleatoria de puntos sobre la superficie generada en el paso anterior. Cabe destacar que, en el presente trabajo, se cuenta con varios conjuntos de puntos de distintos tamaños.
- Utilizar el *plug-in* de QGIS llamado *Point Sampling Tool*⁴ para agregar la elevación a los puntos anteriormente seleccionados.
- Exportar los puntos con elevación a un formato simple de parsear para generar el *input* de los algoritmos implementados. El formato que se utilizó es *GeoJson*.

Finalmente, los archivos en formato *GeoJson* fueron transformados (mediante un *parser* sencillo realizado en *Java*) al formato que utiliza CGAL para generar triangulaciones.

³<http://www.qgis.org>

⁴<http://hub.qgis.org/projects/pointssamplingtool>

6.2.3. Computational Geometry Algorithms Library (CGAL)

Los algoritmos propuestos fueron desarrollados en C++ utilizando la biblioteca CGAL. Esta biblioteca *open source* provee un acceso sencillo, eficiente y confiable a algoritmos geométricos para diferentes áreas de aplicación. Es utilizado en biología molecular, modelos médicos y biofísicos, geología y geofísica, astronomía, métodos numéricos, computación gráfica y sistemas de información geográfica, entre otras.

CGAL contiene una implementación completa para el manejo de triangulaciones de *Delaunay* pero, en el presente trabajo, se realizó una extensión de la misma para uso de triangulaciones de alto orden. Los detalles relativos a esta extensión se encuentran en la siguiente sección. Puede encontrarse la documentación completa de la biblioteca en <http://www.cgal.org>.

6.3. Implementación de algoritmos

Se presentan en esta sección los detalles de implementación concretos sobre triangulaciones de alto orden y detalles relativos al cálculo del error numérico de las triangulaciones obtenidas con los algoritmos antes descritos.

6.3.1. Triangulaciones de alto orden en CGAL

Los algoritmos propuestos fueron desarrollados en C++ utilizando la biblioteca CGAL mencionada anteriormente. CGAL contiene una implementación completa para el manejo de triangulaciones de *Delaunay* pero se realizó una extensión de la misma para poder incorporar el uso de triangulaciones de alto orden. A continuación se presenta un detalle de las clases y las correspondientes adaptaciones que fueron necesarias para la incorporación de HODTs a CGAL.

Una de las estructuras provistas por CGAL para el manejo de triangulaciones es la *Delaunay_triangulation_2*.⁵ Esta estructura fue utilizada en el presente trabajo como base para la implementación de todos los algoritmos propuestos. Esta estructura se encuentra parametrizada por los siguientes atributos:

- Los rasgos geométricos (GT por su nombre en inglés, *Geometric Traits*) que definen diferentes primitivas y operaciones elementales.
- Una estructura de datos que define los vértices y caras de la triangulación.⁶

Para generar la triangulación de *Delaunay* inicial se utilizó esta estructura (*Delaunay_triangulation_2*) la cual fue inicializada con los puntos muestreados de los terrenos. Como primer paso se crea una instancia de dicha clase vacía, y se utiliza la función *insert* para ir agregando los puntos a la misma. Dicha función tiene la siguiente aridad:

```
std::ptrdiff_t CGAL::Delaunay_triangulation_2< Traits, Tds >::insert(PointInputIterator first, PointInputIterator last)
```

Donde los parámetros *first* y *last* son instancias de la clase *CGAL::Istream_iterator< T, Stream >* provista por CGAL la cual lee de un archivo, en el formato antes descrito, los puntos a insertar.

⁵El detalle de esta clase se puede encontrar en http://www.cgal.org/Manual/latest/doc_html/cgal_manual/Triangulation_2_ref/Class_Delaunay_triangulation_2.html.

⁶Para más información ver http://doc.cgal.org/latest/Triangulation_2/index.html#title4.

Cabe destacar que CGAL define una triangulación en base a sus vértices (*vertex*) y sus caras (*face* o *facet*⁷) y no en base a los ejes.

Una cara contiene tres vértices numerados con 0, 1 y 2. Esta numeración define implícitamente un sentido de recorrido de vértices. A su vez, una cara tiene caras *vecinas* o *neighbors* numeradas de igual forma.

Dada f una cara de una triangulación y v un vértice de f , se definen las siguientes funciones en CGAL:

- $f.index(v)$ para obtener el índice de v en f .
- $f.vertex(i)$ ($i \in \{0, 1, 2\}$) para obtener, análogamente, un vértice de f a partir de su índice.
- $f.neighbor(i)$ ($i \in \{0, 1, 2\}$) para obtener la cara vecina a f opuesta al vértice de índice i .
- $cw(i)$ para obtener el índice del vecino del vértice i -ésimo en sentido *horario* (*clockwise*). Se calcula como $(i + 2) \% 3$.
- $ccw(i)$ para obtener el índice del vecino del vértice i -ésimo en sentido *antihorario* (*counterclockwise*). Se calcula como $(i + 1) \% 3$.

En la figura [Figura 6.1](#) se puede ver un ejemplo gráfico de estas funciones.

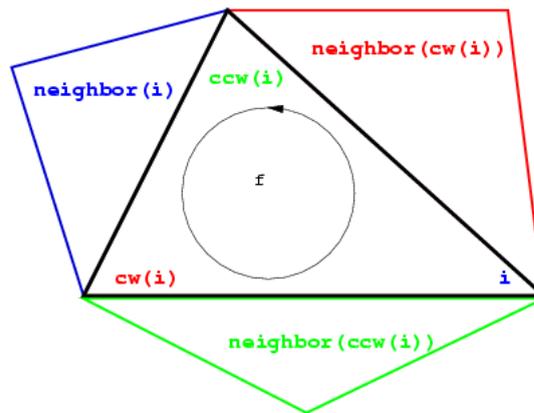


FIGURA 6.1: Representación gráfica de la cara f , su i -ésimo vértice v y su *vecindad*.

http://doc.cgal.org/latest/TDS_2/index.html#fig__TDS_2D_Fig_neighbors1

Un eje e de una triangulación \mathcal{T} en CGAL es representado por una tupla $\langle f, v \rangle$ tal que e es el eje opuesto al vértice v dentro de la cara f . Sea $f' = f.neighbor(i)$ siendo v

⁷Estrictamente hablando, *facet* representa una cara en dos dimensiones mientras que *face* puede ser utilizada para nombrar una cara en cualquier dimensión. Sin embargo, en la documentación de CGAL, se utilizan indistintamente.

el vértice número i de f en \mathcal{T} entonces, el eje $e = \langle f, v \rangle$, es el eje compartido entre f y f' .

Como se mencionó anteriormente, una triangulación en *CGAL* cuenta con una estructura de datos que, además de definir los vértices y caras de una triangulación, provee:

- *iterators*: métodos para iterar todos los vértices, ejes y caras de una triangulación y
- *circulators*: métodos para visitar todos los vértices, ejes y caras incidentes a un vértice en la triangulación.

También se definen ciertos *handles*⁸ (*vertex_handle* y *face_handle*) los cuales permiten acceder a los vértices y caras de una triangulación sin necesidad de realizar un manejo de punteros en C++.

La estructura de datos cuenta adicionalmente con métodos para modificar una triangulación. Entre ellas se cuenta con la función *flip* cuya aridad es la siguiente:

```
void TriangulationDataStructure_2::flip(face_handle fh, int i)
```

Donde *fh* es el *face_handle* de f (definido como antes) y el eje que se intercambia es $e = \langle f, v \rangle$ siendo i el índice de v en f . Cabe destacar que, este método altera el orden de los vértices antes descripto ya que la triangulación es modificada tras su ejecución (cambia la diagonal del cuadrilátero formado por f y f' de e a e').

Este método fue el que se utilizó para realizar el intercambio de ejes en los algoritmos implementados.

Cabe destacar que, es responsabilidad de quien lo llame verificar que el cuadrilátero cuya diagonal se está intentando intercambiar sea convexo, de no ser así, el resultado no está determinado. Es por esto que la función *esFlippable*(\mathcal{T}, e), mencionada en el pseudocódigo antes descripto, verifica que e sea la diagonal de un cuadrilátero convexo.

Es importante destacar que, la clase *Delaunay_triangulation_2*, si bien tiene un método para verificar si se cumple la condición de *Delaunay*, permite ser modificada mediante el método *flip* sin importar si se pierde la condición de *Delaunay* permitiendo así obtener una triangulación de orden k con $k > 0$.

Dado que los puntos utilizados tienen altura, es necesario realizar la proyección sobre el plano (x, y) para obtener una triangulación de *Delaunay* en dos dimensiones. Para ello

⁸Para mayor información ver <http://doc.cgal.org/latest/Circulator/classHandle.html>.

se utilizó el *Projection_traits_xy_3*⁹ como *Geometric Traits*, el cual realiza exactamente dicha proyección sin perder los datos de elevación.

De esta forma, es posible construir una triangulación de *Delaunay* en dos dimensiones sin perder los datos de elevación, los cuales se utilizan posteriormente para realizar los cálculos de costo que determinan los intercambios de ejes que deben realizarse para obtener una triangulación de alto orden localmente óptima según el criterio que se desea optimizar.

CGAL provee métodos para generar y almacenar la triangulaciones en archivos de texto plano. El formato utilizado de los archivos a partir de los cuales se construyen las triangulaciones de *Delaunay* consta de tres columnas, separadas por espacios o *tabs*, donde cada una de ellas representa las coordenadas (x, y, z) de los puntos respectivamente. Como se mencionó anteriormente, fue necesario implementar un programa sencillo para transformar los datos generado por QGIS al formato esperado por CGAL.

Adicionalmente se cuenta con una consola interactiva que permite ejecutar cada uno de los algoritmos propuestos con sus posibles variantes. Esta interfaz interactiva recibe una serie de parámetros los cuales permiten cambiar fácilmente los puntos (tanto de los terrenos como del *ground truth*), el orden máximo permitido y las diferentes heurísticas y criterios implementados. Así mismo se crearon diversos *scripts* para realizar las ejecuciones de las pruebas en forma automática. Para más detalle de los parámetros, el uso del ejecutable y los *scripts* ver el [Apéndice B](#).

Se implementó un programa para visualizar las triangulaciones optimizadas por los algoritmos ejecutados. Para esto se realizó una extensión de un programa que provee la biblioteca CGAL que permite visualizar y modificar triangulaciones de *Delaunay* para que soporte triangulaciones de alto orden. Algunas de las imágenes mostradas en el [Capítulo 7](#) fueron generadas con esta herramienta.

6.3.2. Cálculo del error

Algo deseable es poder comparar la *calidad* de las aproximaciones obtenidas con las triangulaciones de alto orden generadas por los algoritmos propuestos. Tal como se indica en el [Apéndice A](#) existen diversas métricas de error que pueden ser utilizadas para esta tarea.

Una parte fundamental del cálculo del error es tomar las medidas de las distancias entre el terreno real y la representación obtenida. Para esto se toma una muestra de

⁹El detalle de esta clase se puede encontrar en http://www.cgal.org/Manual/latest/doc_html/cgal_manual/Kernel_23_ref/Class_Projection_traits_xy_3.html.

distintos puntos de control que conforman el *ground truth* (puntos del terreno real) y para cada uno de ellos se mide la distancia que los separa del triángulo correspondiente en la representación obtenida. Estas distancias pueden ser utilizadas para obtener las métricas de las distintas funciones de error como ser MAE y RMSE (entre otras presentadas en el [Apéndice A](#)).

Para realizar las mediciones entre los puntos del *ground truth* y la triangulación obtenida en CGAL se utilizaron dos métodos que se detallan a continuación.

Resultó necesario obtener la cara de la triangulación contra la cual se debe medir la distancia al punto del terreno real muestreado. Para esto se utilizó el siguiente método de la clase *Triangulation_2* (la cual es superclase de *Delaunay_Triangulation_2*):

```
Face_handle CGAL :: Triangulation_2 < Traits, Tds > ::  
locate(const Point& p, Face_handle f = Face_handle()) const
```

Éste permite encontrar la cara que contiene al punto *p*. El parámetro *f* es opcional y se utiliza como *hint* para optimizar la búsqueda. Lo que se busca es la cara que contiene a las coordenadas *x* e *y* del punto *p* sin tener en cuenta su altura.

Para medir la distancia entre el punto del terreno real y la cara del triángulo que debería contenerlo se utilizó la función de CGAL *squared_distance(obj1, obj2)*, donde *obj1* y *obj2* son dos objetos geométricos arbitrarios, y retorna la distancia al cuadrado entre ellos. Las combinaciones válidas para utilizar este método son:

- Para objetos geométricos en dos dimensiones *obj1* y *obj2* pueden ser del tipo: *Point_2*, *Line_2*, *Ray_2*, *Segment_2* ó *Triangle_2*.
- Para objetos geométricos en tres dimensiones *obj1* y *obj2* pueden ser del tipo: *Point_3*, *Line_3*, *Ray_3*, *Segment_3* ó *Plane_3*.

Ya que el método antes descrito se utiliza para medir la distancia entre el punto del *ground truth* en 3 dimensiones y las caras de los triángulos de la triangulación. Se utilizan como objetos a comparar *Point_3* y *Plane_3* donde el primero representa al punto del terreno real y el segundo es el plano de la cara de la triangulación que contiene a la proyección del punto *p* en \mathbb{R}^2 .

Capítulo 7

Resultados

En el presente trabajo se implementaron los algoritmos de construcción de triangulaciones de alto orden propuestos en el [Capítulo 6](#) y se realizaron pruebas con terrenos reales. Se presentan en este capítulo el conjunto de resultados obtenidos en las distintas instancias de prueba para cada uno de los algoritmos presentados.

En la [Sección 7.1](#) se presentan los terrenos utilizados y algunos detalles referentes a las instancias de prueba utilizadas así como también algunos estudios y resultados preliminares que fueron de utilidad para definir las instancias de prueba definitivas.

En la [Sección 7.2](#) se presenta el conjunto de resultados necesarios para poder responder a las preguntas planteadas como objetivo del presente trabajo:

- ¿Qué mejoras se obtienen con el uso de HODTs en terrenos reales?
- ¿Cuán complicado es utilizar HODTs en terrenos reales? Es decir, ¿Cuán difícil es implementar los algoritmos necesarios para trabajar con HODTs?
- ¿Cuán útiles son los algoritmos propuestos? ¿Existen algoritmos heurísticos que den resultados similares?
- ¿Cuáles son los criterios que más se benefician con el uso de HODTs?
- Y la pregunta más general: ¿son las HODTs realmente útiles en la práctica?

En la [Sección 7.3](#) se presentan, en base al análisis realizado con los resultados obtenidos, las respuestas a los interrogantes planteados.

7.1. Preliminares

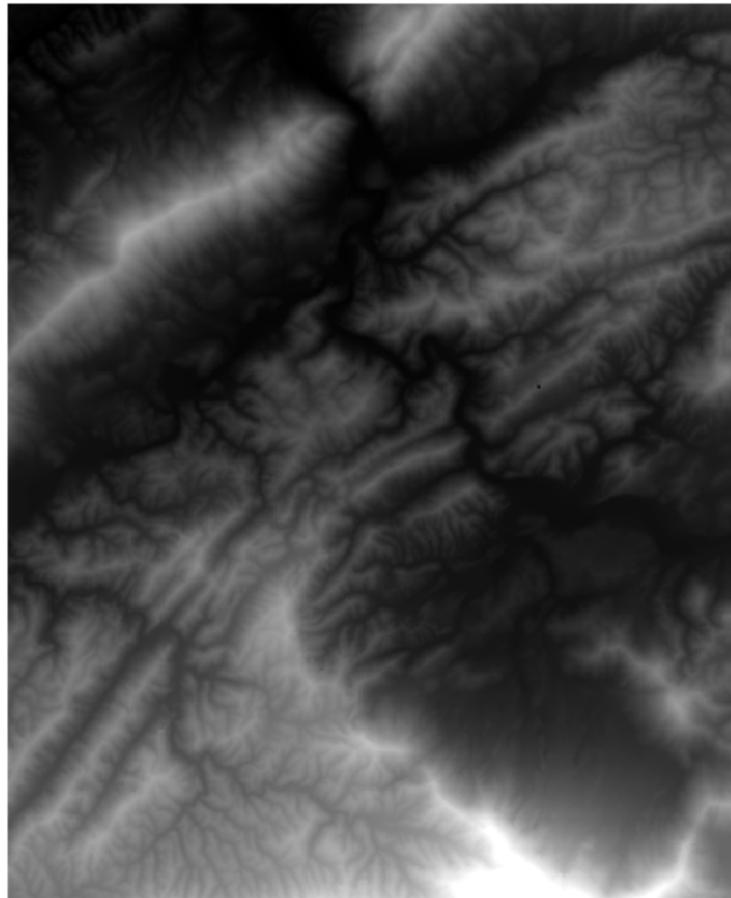
El objetivo de esta sección es presentar la definición de las instancias de prueba utilizadas para poner a prueba los algoritmos implementados. Esto incluye: definir los terrenos que se van a utilizar, definir la manera en que se realiza la selección de puntos y el cálculo de error y plantear las métricas que serán utilizadas para responder a las preguntas previamente especificadas.

7.1.1. Terrenos

Las pruebas fueron realizadas sobre cuatro terrenos reales cuyas características se detallan a continuación:

- ***Kinzel Springs, Tennessee*** (KS): esta área se caracteriza por ser geográficamente accidentada. Es una superficie con mucha variación de alturas ya que se vio afectada por el movimiento tectónico de placas y numerosas erosiones fluviales causadas por ríos que desembocan en el valle. Presenta dos cadenas montañosas principales una en el sudoeste y otra en el noreste. El área muestreada posee una amplitud vertical de aproximadamente 850 metros. La dimensión del sector del terreno muestreado es de 13915 kilómetros de alto y 10361 kilómetros de ancho. Se puede ver la imagen de este terreno en la [Figura 7.1](#).
- ***Moorehead SE, Iowa*** (MH): esta área es más llana que la anterior ya que fue una región que se vio moldeada por la erosión causada por el derretimiento de glaciares. El área muestreada posee una amplitud vertical de aproximadamente 100 metros. La dimensión del sector del terreno muestreado es de 13915 kilómetros de alto y 11293 kilómetros de ancho. Se puede ver la imagen de este terreno en la [Figura 7.2](#).
- ***Blockhouse, Tennessee*** (BH): esta área se encuentra ubicada en la intersección de dos ríos y, en lo que respecta a variación de alturas, es un punto intermedio entre los dos terrenos anteriores. El área muestreada posee una amplitud vertical de aproximadamente 550 metros. La dimensión del sector del terreno muestreado es de 13915 kilómetros de alto y 11311 kilómetros de ancho. Se puede ver la imagen de este terreno en la [Figura 7.3](#).
- ***Cades Cove, Tennessee*** (CC): esta área es un valle formado por la erosión de la cordillera montañosa que lo rodea. El área muestreada posee una amplitud vertical de aproximadamente 1000 metros. La dimensión del sector del terreno muestreado

es de 13915 kilómetros de alto y 11293 kilómetros de ancho. Se puede ver la imagen de este terreno en la [Figura 7.4](#).



Elevación en metros

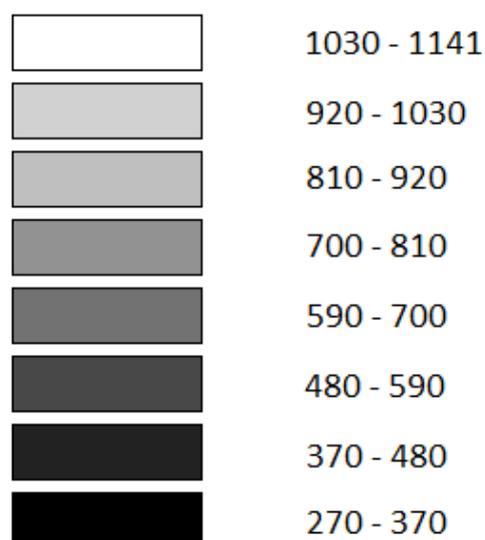


FIGURA 7.1: *Kinzel Springs, Tennessee*: 35.75 N, 35.625 S, -83.875 W y -83.75 E.



Elevación en metros

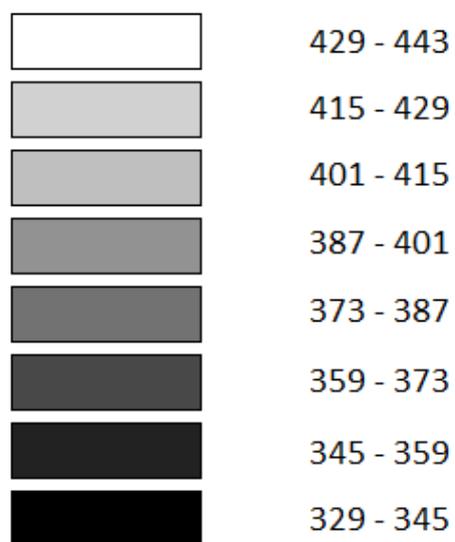
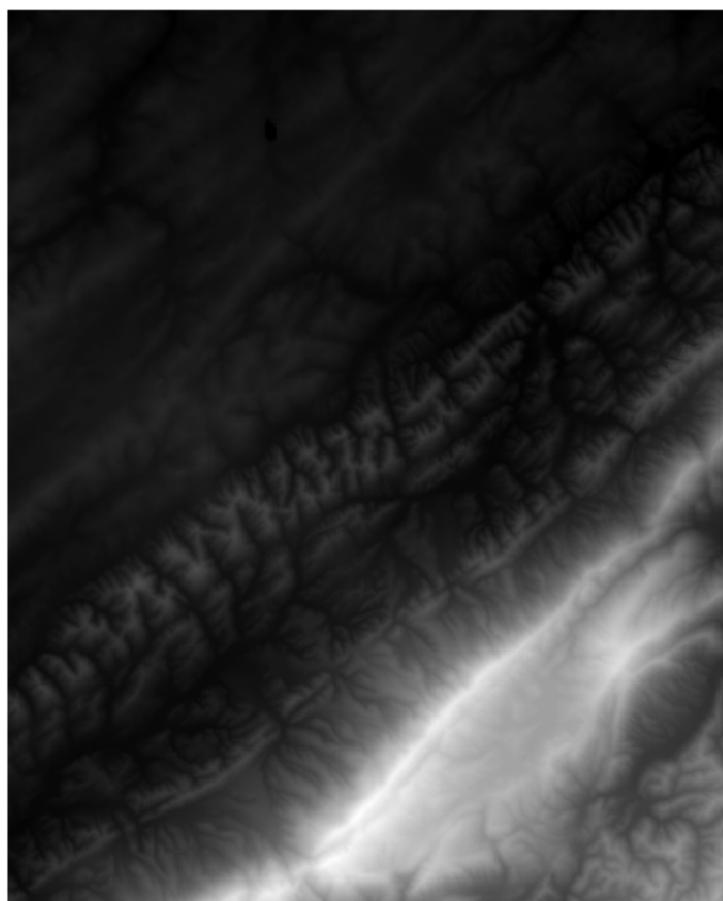


FIGURA 7.2: *Moorehead SE, Iowa*: 41.875 N, 41.75 S, -95.875 W, -95.75 E.



Elevación en metros

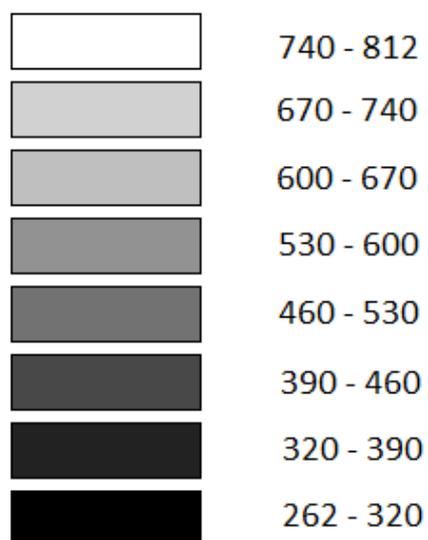
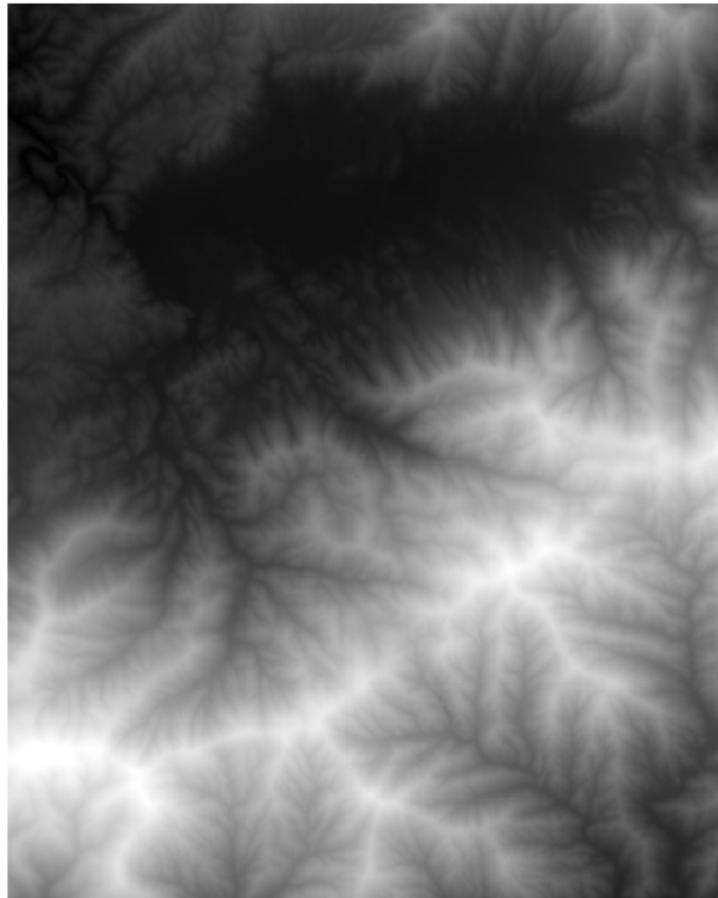


FIGURA 7.3: *Blockhouse, Tennessee*: 35.75 N, 35.625 S, -84 W, -83.875 E.



Elevación en metros

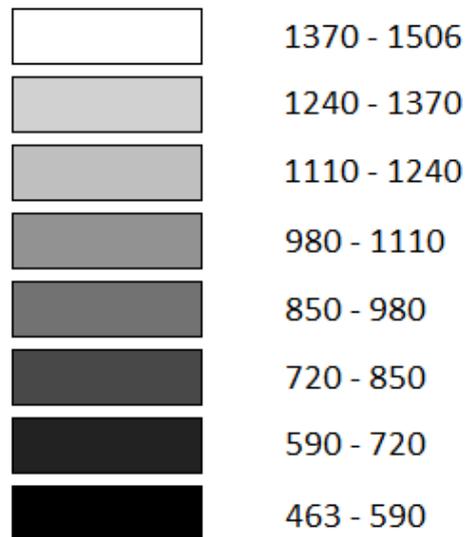


FIGURA 7.4: *Cades Cove, Tennessee*: 35.625 N, 35.50 S, -83.875 W, -83.75 E.

Los dos primeros terrenos son los que en Wang et al. [8] se utilizaron para realizar las pruebas de los criterios presentados. Es por esto que sirvieron como punto de control

para los resultados obtenidos. No obstante, para contar con mayor diversidad de pruebas se buscaron terrenos con amplitudes diferentes con el objetivo de poder realizar una comparación más exhaustiva de los criterios implementados.

7.1.2. Selección de puntos específicos

Para cada uno de los terrenos mencionados se tomaron muestras de puntos seleccionados aleatoriamente. Con este muestreo se generaron 3 conjuntos de 2500 y 3 de 5000 puntos en base a los cuales se construyeron las triangulaciones de *Delaunay* iniciales.

Al realizar las primeras pruebas sobre los terrenos seleccionados se observó que, en ciertos casos, ya en la triangulación de *Delaunay* los valores máximos de todos los criterios eran extremadamente elevados en triángulos cercanos a los bordes. Esto provocó que, tanto las heurísticas *GreedyMinMax** como el algoritmo exacto con objetivo *MinMax*, prácticamente no realizaran cambios a la triangulación inicial ya que resultaba imposible minimizarlo.

Se implementó un programa para visualizar las triangulaciones optimizadas por los algoritmos ejecutados para verificar que la razón de esa limitación radicaba en que los triángulos que maximizaban el criterio se encontraban en el borde. Para esto se realizó una extensión de un programa que provee la biblioteca CGAL que permite visualizar y modificar triangulaciones de *Delaunay* para que soporte triangulaciones de alto orden.

Luego de realizar dicha visualización se pudo observar que, para todos los criterios, los máximos se encontraban en la zona cercana a los bordes y pertenecían a cuadriláteros formados por triángulos extremadamente angostos y largos.

Para evitar que los *slivers* encontrados alteren el resultado final de la heurística se optó por ignorar los puntos específicos que se encuentren próximos a los bordes. Del conjunto de puntos muestreados se utilizan todos para la construcción de la triangulación de *Delaunay* inicial. A partir de esta construcción se ejecuta el *método de Lawson* para el cual los puntos ignorados no son tenidos en cuenta. Es decir, aquellas diagonales que pertenezcan a cuadriláteros que posean al menos un extremo fuera del área seleccionada no se consideran *flippables*. El cálculo del error y los demás cálculos posteriores a la ejecución de este método también se hacen en función de los puntos no ignorados.

Los puntos seleccionados para ser descartados son los que se encuentran a una separación del 5% del borde del cuadrado más pequeño que incluye a todos los puntos del terreno seleccionado. Se probó con varios porcentajes para todos los terrenos utilizados para garantizar un buen balance entre la cantidad de puntos descartados y la ubicación

de los ejes con valor máximo para cada criterio. El objetivo es tener la mayor cantidad de puntos posibles descartando los *slivers* que afectan la eficacia de las heurísticas propuestas.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo del conjunto de puntos seleccionados para ser triangulados:

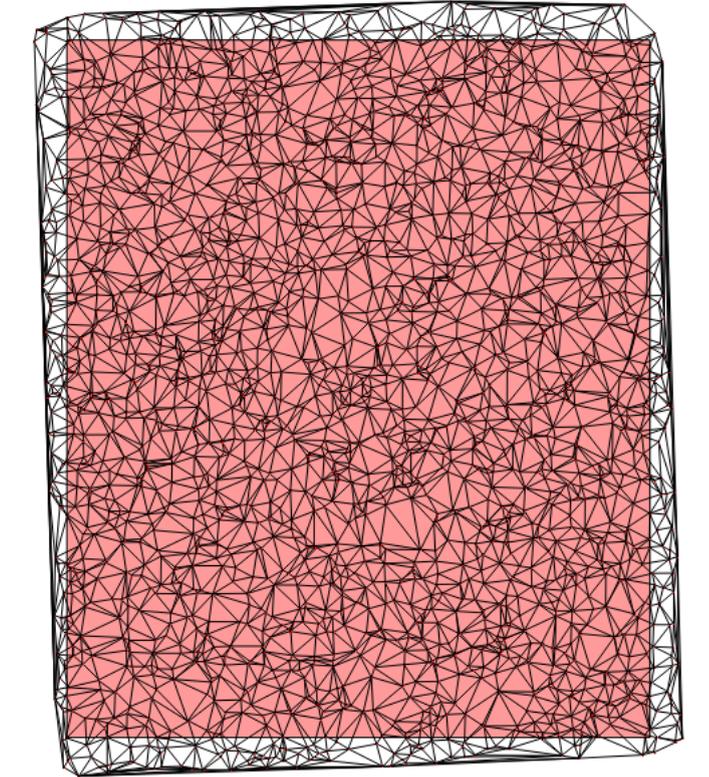


FIGURA 7.5: Triangulación de *Delaunay* en base a un muestreo aleatorio de KS de un tamaño de 2500 puntos. El conjunto de puntos seleccionados se encuentra en el área marcada con rojo. El resto de los puntos (pertenecientes al borde del 5%) son descartados.

A continuación se muestran diferentes visualizaciones de triangulaciones de *Delaunay* tanto considerando el borde como descartando el 5% del mismo. El criterio cuyas métricas se visualizan es ABN y los cuadriláteros resaltados corresponden a los valores máximos y mínimos de dicho criterio.

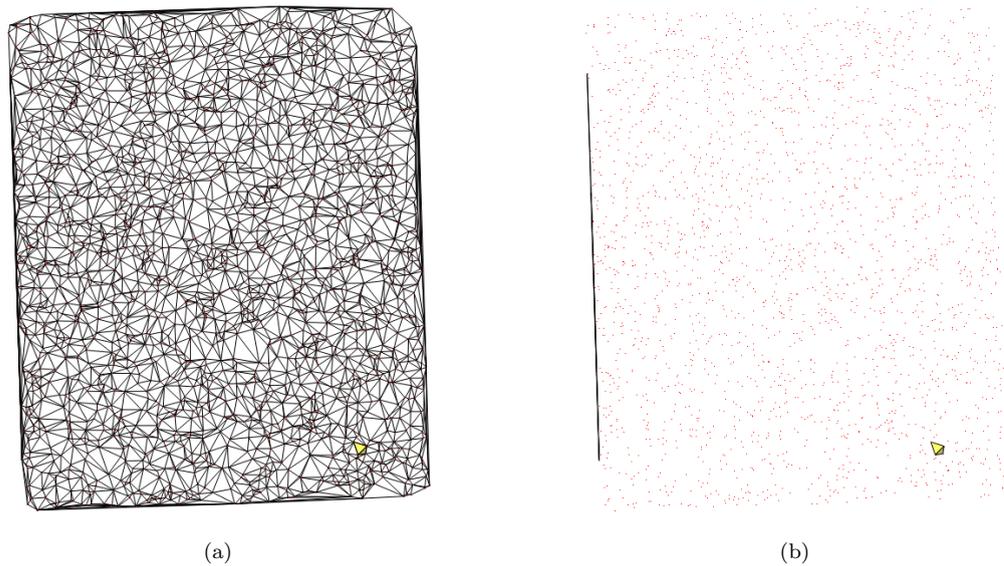


FIGURA 7.6: (a) Triangulación de *Delaunay* en base a un muestreo aleatorio de KS de un tamaño de 2500 puntos sin descartar el borde. El cuadrilátero con máximo valor de ABN se marca en color azul y el mínimo en color amarillo.
 (b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros.

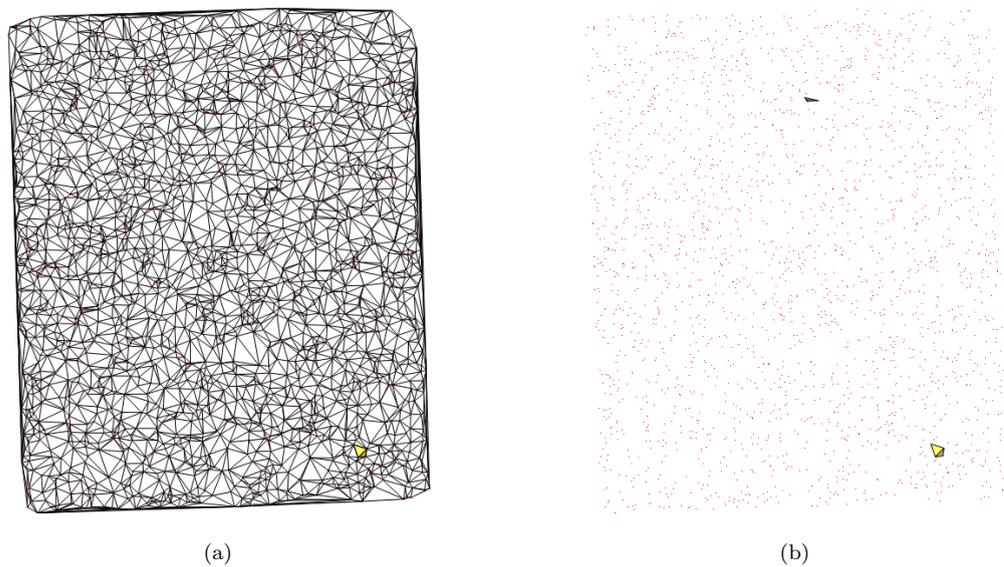


FIGURA 7.7: Triangulación de *Delaunay* en base a un muestreo aleatorio de KS de un tamaño de 2500 puntos descartando los puntos del borde (5%). El cuadrilátero con máximo valor de ABN se marca en color azul y el mínimo en color amarillo.
 (b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros.

Se puede ver en la [Figura 7.6 \(b\)](#) que el cuadrilátero que contiene como diagonal al eje con mayor valor de ABN se ubica en el borde y se compone de triángulos extremadamente largos y angostos (se desplazan verticalmente casi a lo largo de toda el área triangulada).

Esto hace imposible minimizar este valor mediante la realización de *flips* cuando se limita el orden de la triangulación final (e incluso, en varios casos, sin limitarlo). El máximo valor de ABN cuando se considera el borde en la triangulación (Figura 7.6) es de $174,6^\circ$, muy cercano al máximo teórico de 180° y se encuentra ubicado en el borde. Cuando se filtran los puntos específicos y el borde es descartado (Figura 7.7) el máximo valor es de $81,59^\circ$ y el cuadrilátero se ubica en un área interna.

Cabe destacar que, el cuadrilátero cuyo valor de ABN es el mínimo, se encontró dentro del área considerada en ambos casos (por lo que coinciden en ambas figuras).

A continuación se muestra la mejora obtenida en la triangulación de *Delaunay* mediante la ejecución del *método de Lawson*, sin considerar los bordes del conjunto de puntos específicos y sin limitar el orden de la triangulación final.

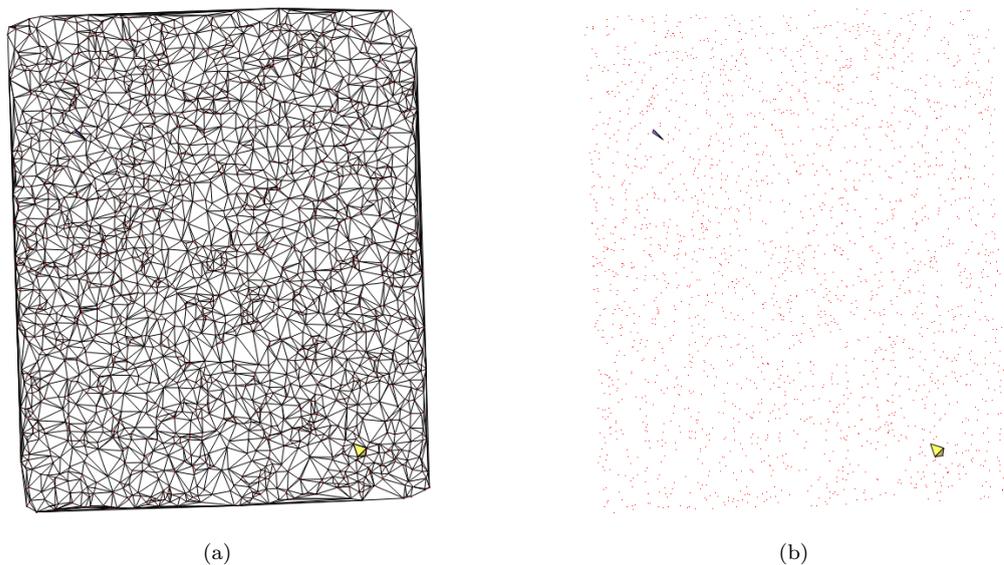


FIGURA 7.8: (a) Triangulación optimizada utilizando el *método de Lawson* la heurística **GreedyMinMaxABN**. La triangulación original fue una DT construida en base a un muestreo aleatorio de KS de un tamaño de 2500 puntos descartando los puntos del borde (5%) (mismo caso que las imágenes anteriores).
(b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros.

En este caso, el valor máximo del área considerada pudo ser disminuído hasta $70,87^\circ$. Es interesante mencionar que, en este caso, la mejora se obtuvo realizando únicamente 3 *flips* por lo cual la triangulación resultante es similar a la DT de la cual se partió para realizar las optimizaciones.

En base a estos resultados se decidió, en todas las pruebas, realizar la exclusión de los puntos que se encuentran a 5% del borde. Es decir, las muestras reales son de un 5% menos del tamaño mencionado.

7.1.3. Métricas de error

Tal como se mencionó en el [Capítulo 6](#), luego de realizar las optimizaciones propuestas, se tomaron diversas métricas de error para determinar el grado de fidelidad con el que cada triangulación generada con los algoritmos implementados representa al terreno que se desea modelar.

Para realizar esta tarea se generaron, para cada terreno, tres conjuntos de 900 puntos (seleccionados aleatoriamente) los cuales fueron utilizados como *ground truth*. Las métricas de error implementados fueron: **RMSE**, **MAE**, \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .¹ Para obtener un único valor para cada una de estas métricas de error se realizó el promedio de las métricas correspondientes de cada uno de los archivos seleccionados como *ground truth*.

7.1.4. Orden máximo

Como vimos en las secciones y capítulos anteriores, a partir de una muestra de puntos determinada se construye una triangulación de *Delaunay* que se toma como triangulación inicial para la ejecución del *método de Lawson*. Tal como se puede observar en los pseudocódigos presentados en el [Capítulo 6](#) se realiza un intercambio de eje si, además de mejorar la métrica propuesta, no se supera un determinado orden (*orden máximo* de la triangulación final). El objetivo final de los algoritmos propuestos es construir una triangulación de orden k localmente óptima respecto a algún criterio.

Se probaron las ejecuciones de las heurísticas propuestas para distintos valores de k . En particular, podemos diferenciar estas instancias de prueba en dos grupos:

- *Orden máximo k prefijado*: se limita el orden de la triangulación resultante a k , para $k = 1, 2, \dots, 50$.
- *Orden máximo ∞* : no se limita el orden de la triangulación final. Es decir, se realizan tantos *flips* como veces se mejore el criterio terminando la ejecución ante la primera iteración en la que la triangulación no presente cambios.

Al final de cada ejecución, cuando la heurística termina y retorna una triangulación localmente óptima respecto al criterio seleccionado, se calcula el orden de la triangulación obtenida. Este valor es útil en cualquiera de las dos instancias antes descritas ya que:

- Si el orden se encuentra *prefijado*, al ser el *orden máximo*, se puede obtener un triangulación final de *orden* menor. Esto implicaría que con un orden máximo menor se puede obtener la misma mejora que con el prefijado.

¹Para más detalle ver [Apéndice A](#).

- Si el orden es ∞ , se necesita saber el *orden* de la triangulación final para tener una idea del punto de estabilización del algoritmo y, de alguna forma, el orden de la triangulación donde se puede obtener la máxima mejora del criterio posible y cual es esa mejora realmente. Con esta información podemos llegar a tener noción de cuan lejos está la mejora de una triangulación de orden relativamente pequeño respecto a la posible mejora total obtenida (con las implicaciones de pérdida de la *buena forma* de los triángulos que las triangulaciones de ordenes más altos poseen).

7.1.5. Valores obtenidos

Al finalizar cada una de las ejecuciones realizadas, en base a la combinación de las instancias y heurísticas previamente presentadas, se tomaron las siguientes mediciones:

- *Orden*: orden final de la triangulación obtenida.
- *Max value*: valor máximo del criterio seleccionado para optimizar.
- *Min value*: valor mínimo del criterio seleccionado para optimizar. En algunos casos, el mínimo valor llegó a ser 0° por lo que fue necesario tomar, adicionalmente, otra métrica: *cantidad de mínimos*.
- *Sum value*: suma de los valor del criterio seleccionado para optimizar.
- *Errores*: valores para cada una de las métricas de los errores tomadas como se indicó en la [Sección 7.1.3](#).
- *Tiempo*: tiempo consumido por el algoritmo (sin tener en cuenta el cálculo del error final).
- *Cantidad de flips*: cantidad de intercambios de ejes realizados cuando se ejecuta el *método de Lawson*.
- *Cantidad de iteraciones*: cantidad de ciclos completos realizados cuando se ejecuta el *método de Lawson*.

7.2. Resultados y análisis comparativo

El objetivo de esta sección es presentar tanto el conjunto de resultados obtenidos en función de los algoritmos ejecutados sobre las instancias de prueba antes descritas como un análisis comparativo entre las distintas métricas tomadas para cada caso.

7.2.1. Tiempo de ejecución

En esta sección se presenta el conjunto de resultados relativos al tiempo de ejecución de los algoritmos ejecutados con su correspondiente análisis.

En la mayoría de los casos se pudo observar una tendencia de incremento del tiempo de ejecución a medida que se incrementa el orden máximo de las ejecuciones. No obstante, si bien esto fue una tendencia casi general, hubo varios casos en que el comportamiento no siguió dicha tendencia. Se pueden observar en el cuadro de la [Figura 7.9](#) los siguientes eventos:

1. Entre los órdenes máximos 5 y 6 si bien se aumenta el orden final de la triangulación (de 1 a 6 respectivamente) y se mantiene la cantidad de *flips* realizados, se puede ver que los tiempos disminuyen en lugar de aumentar: el tiempo de ejecución pasa de ser de 20 segundos a 14 segundos (ver filas resaltadas con celeste en la [Figura 7.9](#)).
2. Hubo casos en donde, si bien el orden máximo aumentó, el tiempo de ejecución se mantuvo constante así como también el orden final de la triangulación y la cantidad de *flips* realizados. Un ejemplo de esto puede verse en las filas resaltadas con violeta en la [Figura 7.9](#). En este último caso los órdenes máximos de ejecución son 13 y 14 y se mantuvo todo constante con tiempos de 17 segundos en ambos casos.
3. En otros casos, si bien aumenta el orden máximo de ejecución y se mantienen constantes los órdenes finales y la cantidad de *flips* se puede observar que el tiempo de ejecución se incrementa. Por ejemplo, es el caso del orden máximo 27 y 28 en donde el orden final de la triangulación fue 6 y la cantidad de *flips* 3 para ambos casos pero los tiempos fueron 18 y 19 segundos respectivamente (ver filas resaltadas con amarillo en la [Figura 7.9](#)).

heurística	orden max	abn-2500		
		orden final	tiempo	cant flips
GreedyMinMax	infinito	(33-ODT)	00:00:52	8
	0	(DT)	00:00:00	0
	1	(1-ODT)	00:00:08	3
	2	(1-ODT)	00:00:13	3
	3	(1-ODT)	00:00:16	3
	4	(1-ODT)	00:00:18	3
	5	(1-ODT)	00:00:20	3
	6	(6-ODT)	00:00:14	3
	7	(6-ODT)	00:00:15	3
	8	(6-ODT)	00:00:15	3
	9	(6-ODT)	00:00:16	3
	10	(6-ODT)	00:00:16	3
	11	(6-ODT)	00:00:16	3
	12	(6-ODT)	00:00:17	3
	13	(6-ODT)	00:00:17	3
	14	(6-ODT)	00:00:17	3
	15	(6-ODT)	00:00:17	3
	16	(6-ODT)	00:00:17	3
	17	(6-ODT)	00:00:17	3
	18	(6-ODT)	00:00:18	3
	19	(6-ODT)	00:00:18	3
	20	(6-ODT)	00:00:18	3
	21	(6-ODT)	00:00:18	3
	22	(6-ODT)	00:00:18	3
	23	(6-ODT)	00:00:18	3
	24	(6-ODT)	00:00:18	3
	25	(6-ODT)	00:00:18	3
	26	(6-ODT)	00:00:18	3
	27	(6-ODT)	00:00:18	3
	28	(6-ODT)	00:00:19	3
	29	(6-ODT)	00:00:19	3
	30	(6-ODT)	00:00:19	3
	31	(6-ODT)	00:00:19	3
	32	(6-ODT)	00:00:19	3
	33	(33-ODT)	00:00:47	8
	34	(33-ODT)	00:00:47	8
	35	(33-ODT)	00:00:47	8
	36	(33-ODT)	00:00:47	8
	37	(33-ODT)	00:00:48	8
	38	(33-ODT)	00:00:47	8
	39	(33-ODT)	00:00:47	8
	40	(33-ODT)	00:00:48	8
	41	(33-ODT)	00:00:48	8
	42	(33-ODT)	00:00:48	8
	43	(33-ODT)	00:00:48	8
	44	(33-ODT)	00:00:48	8
	45	(33-ODT)	00:00:48	8
	46	(33-ODT)	00:00:49	8
	47	(33-ODT)	00:00:48	8
	48	(33-ODT)	00:00:49	8
	49	(33-ODT)	00:00:49	8
50	(33-ODT)	00:00:49	8	

FIGURA 7.9: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos del terreno BH.

Cabe destacar que, si bien para dar una evidencia concreta de estos eventos se tomó como ejemplo la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos del terreno BH, estos eventos se pudieron observar en varios casos más. Esto da una idea de que no hay una monotonía creciente en las curvas de evolución del tiempo en función del orden máximo de ejecución.

Se puede ver en la [Figura 7.10](#) que hubo casos (destacados con color violeta) en donde los tiempos de ejecución se mantuvieron constantes mientras que el orden máximo, el orden final y la cantidad de *flips* aumentaron.

heurística	orden max	abn-2500		
		orden final	tiempo	cant flips
GreedyMin Sum	infinito	(1030-ODT)	00:00:58	1499
	0	(DT)	00:00:00	0
	1	(1-ODT)	00:00:12	490
	2	(2-ODT)	00:00:17	746
	3	(3-ODT)	00:00:25	907
	4	(4-ODT)	00:00:33	995
	5	(5-ODT)	00:00:35	1073
	6	(6-ODT)	00:00:37	1115
	7	(7-ODT)	00:00:39	1143
	8	(8-ODT)	00:00:40	1179
	9	(9-ODT)	00:00:41	1205
	10	(10-ODT)	00:00:42	1222
	11	(11-ODT)	00:00:43	1232
	12	(12-ODT)	00:00:44	1255
	13	(13-ODT)	00:00:44	1269
	14	(14-ODT)	00:00:45	1297
	15	(15-ODT)	00:00:45	1303
	16	(16-ODT)	00:00:46	1310
	17	(17-ODT)	00:00:46	1316
	18	(18-ODT)	00:00:46	1321
	19	(19-ODT)	00:00:47	1329
	20	(20-ODT)	00:00:47	1337
	21	(21-ODT)	00:00:48	1339
	22	(22-ODT)	00:00:48	1345
	23	(23-ODT)	00:00:48	1353
	24	(24-ODT)	00:00:48	1358
	25	(25-ODT)	00:00:48	1369
	26	(26-ODT)	00:00:49	1377
	27	(27-ODT)	00:00:49	1383
	28	(28-ODT)	00:00:49	1384
	29	(29-ODT)	00:00:49	1386
30	(30-ODT)	00:00:49	1391	
.....	
46	(46-ODT)	00:00:52	1436	
47	(46-ODT)	00:00:52	1436	
48	(48-ODT)	00:00:52	1437	
49	(48-ODT)	00:00:53	1437	
50	(48-ODT)	00:00:53	1437	

FIGURA 7.10: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos del terreno BH.

En base a lo anterior y si se observan los resultados del siguiente cuadro se puede ver que el tiempo de ejecución no se encuentra asociado ni orden final de la triangulación ni orden máximo ni a la cantidad de *flips*. No obstante, se puede observar que fijado el orden final de la triangulación, a medida que se aumenta el orden máximo (pero el resultado final sigue siendo el mismo), el tiempo, cantidad de *flips* e iteraciones se comportan de forma creciente.

Se puede ver que existen ejecuciones en que la triangulación final queda de un orden mucho mayor, realizándose más intercambios de ejes, en tiempos más cortos que en otros casos. No obstante, se puede observar que hay una relación entre el tiempo de ejecución y la cantidad de iteraciones.

		abn-2500			
heurística	orden max	orden final	tiempo	cant flips	iteraciones
GreedyMaxMin	infinito	(1548-ODT)	00:54:59	189	66
GreedyMaxSum	infinito	(2436-ODT)	00:00:59	3550	9

		abn-5000			
heurística	orden max	orden final	tiempo	cant flips	iteraciones
GreedyMaxMin	infinito	(3057-ODT)	03:54:04	194	67

FIGURA 7.11: Cuadro correspondiente a la ejecución de las heurísticas GreedyMaxMinABN y GreedyMaxSumABN sobre muestreos aleatorios de 2500 y 5000 puntos del terreno BH.

Se pudo observar también que los tiempos de ejecución, así como también el resto de los parámetros, varían en función de la muestra de puntos de un tamaño determinado para un mismo terreno. Se puede ver en las tablas presentadas en la [Sección 1 del Apéndice C](#) cómo para un mismo terreno y una misma heurística los comportamientos de los parámetros medidos fueron completamente diferentes dependiendo de la muestra aleatoria tomada inicialmente. Se puede ver que los tiempos de ejecución en función del orden máximo de ejecución varían ampliamente así como también la cantidad de *flips*, la cantidad de iteraciones y el orden de las triangulaciones finales en cada caso.

En la [Figura 7.12](#) se puede observar la curva de tiempos de ejecución en función del orden máximo de ejecución para cada uno de los muestreos tomados en las tablas presentadas en la [Sección 1 del Apéndice C](#). Se puede ver, por ejemplo, que para el muestreo de nombre *terreno3* los tiempos de ejecución fueron considerablemente más altos que en el resto. Los comportamientos de las curvas fueron diferentes entre las distintas muestras de un mismo tamaño del mismo terreno pero siempre con una tendencia mayoritariamente creciente a medida que se aumenta el orden máximo y final de ejecución (aunque se observen mesetas y pequeños tramos decrecientes).

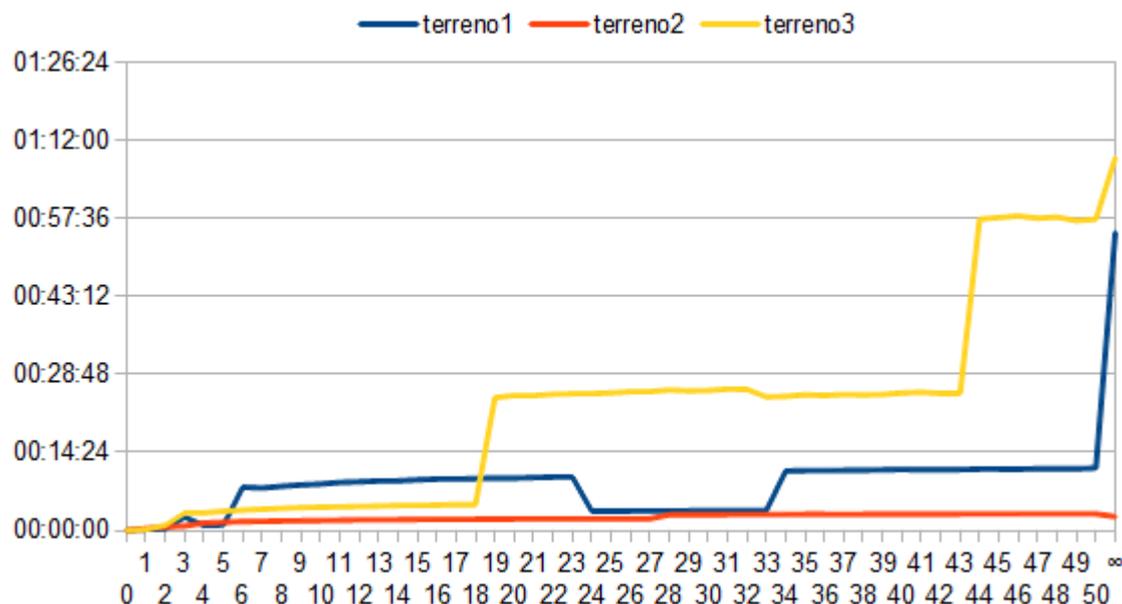


FIGURA 7.12: Gráfico correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. En el eje x se observa el orden máximo de ejecución y en el eje y los tiempos de esa corrida para la heurística y el terreno indicado.

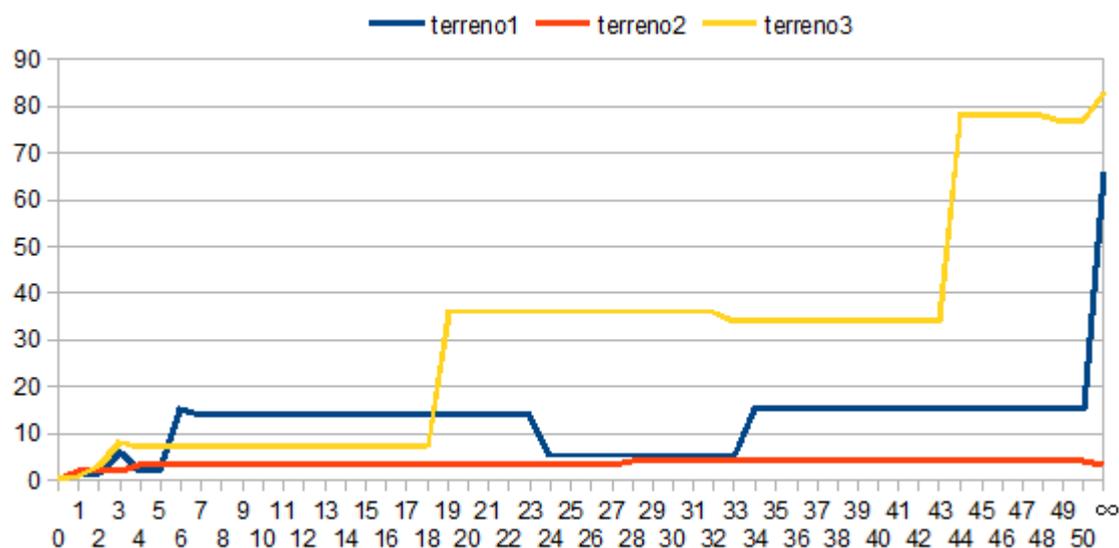


FIGURA 7.13: Gráfico correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. En el eje x se observa el orden máximo de ejecución y en el eje y la cantidad de iteraciones de esa corrida para la heurística y el terreno indicado.

Se puede ver en la [Figura 7.13](#) que los tiempos varían en sintonía con la cantidad de iteraciones ya que el comportamiento de las curvas en este caso es muy similar a las de

la Figura 7.12. Se puede ver que las curvas de ambos gráficos siguen la misma tendencia y dependen de la muestra de puntos original. Como era de esperarse y en función de lo observado se pudo deducir que los tiempos de ejecución se encuentran directamente relacionados con la cantidad de iteraciones.

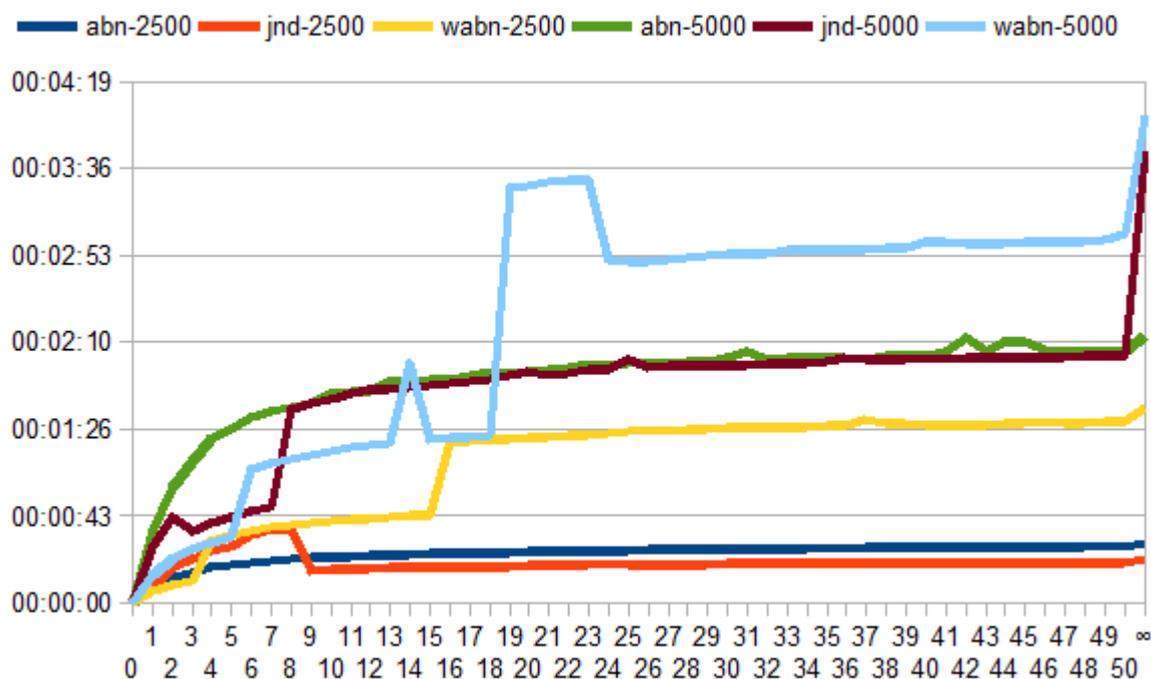


FIGURA 7.14: Cuadro correspondiente a la ejecución de las heurísticas del GreedyMin-Max en base a todos los criterios y sobre muestreos de 2500 y 5000 puntos del terreno CC. En el eje x se observa el orden máximo de ejecución y en el eje y los tiempos de esa corrida para la heurística y el terreno indicado.

Una tendencia que se puede observar en los resultados obtenidos es que para muestras de mayor tamaño los tiempos son mayores siendo las diferencias no tan notorias en los primeros órdenes y no tan así para órdenes máximos más altos. Esto se puede observar en el cuadro de la figura anterior en donde se ve que las heurísticas sobre las muestras de 5000 puntos evidencian tiempos de ejecución mayores para todas las heurísticas respecto a las ejecuciones sobre muestras de 2500 puntos.

En particular, otra tendencia observada es que los tiempos de ejecución (para un mismo muestreo y una misma heurística) del criterio JND fueron menores que los del criterio ABN aunque por lo general no por mucho y que, a su vez, los de ABN fueron menores que WABN caso en que la diferencia fue más notoria. Cabe destacar nuevamente que existen instancias y casos puntuales no específicos donde esto no se cumple.

Por lo general, cuando los órdenes máximos son bajos estas tendencias no se mantienen.

		BH					
		abn-2500	ind-2500	wabn-2500	abn-5000	ind-5000	wabn-5000
heurística	orden max	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo
GreedyMinMax	1	00:00:06	00:00:04	00:00:06	00:00:59	00:00:44	00:00:14
ExactoMinMax	1	00:00:02	00:00:02	00:00:02	00:00:09	00:00:08	00:00:08
GreedyMaxMin	1	00:00:22	00:00:20	00:00:22	00:01:41	00:01:36	00:01:42
ExactoMaxMin	1	00:00:03	00:00:03	00:00:03	00:00:15	00:00:15	00:00:15

		CC					
		abn-2500	ind-2500	wabn-2500	abn-5000	ind-5000	wabn-5000
heurística	orden max	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo
GreedyMinMax	1	00:00:08	00:00:08	00:00:06	00:00:36	00:00:28	00:00:14
ExactoMinMax	1	00:00:02	00:00:02	00:00:02	00:00:08	00:00:11	00:00:08
GreedyMaxMin	1	00:00:21	00:00:20	00:00:21	00:01:34	00:01:36	00:01:44
ExactoMaxMin	1	00:00:03	00:00:03	00:00:03	00:00:15	00:00:15	00:00:15

		KS					
		abn-2500	ind-2500	wabn-2500	abn-5000	ind-5000	wabn-5000
heurística	orden max	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo
GreedyMinMax	1	00:00:07	00:00:05	00:00:03	00:00:23	00:00:10	00:00:14
ExactoMinMax	1	00:00:01	00:00:01	00:00:01	00:00:07	00:00:07	00:00:07
GreedyMaxMin	1	00:00:19	00:00:18	00:00:19	00:01:27	00:01:30	00:01:33
ExactoMaxMin	1	00:00:03	00:00:03	00:00:03	00:00:14	00:00:14	00:00:14

		MH					
		abn-2500	ind-2500	wabn-2500	abn-5000	ind-5000	wabn-5000
heurística	orden max	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo	tiempo
GreedyMinMax	1	00:00:03	00:00:02	00:00:03	00:00:12	00:00:17	00:00:13
ExactoMinMax	1	00:00:01	00:00:01	00:00:01	00:00:07	00:00:07	00:00:07
GreedyMaxMin	1	00:00:19	00:00:19	00:00:10	00:02:46	00:02:07	00:02:12
ExactoMaxMin	1	00:00:03	00:00:03	00:00:03	00:00:13	00:00:13	00:00:13

FIGURA 7.15: Cuadros correspondiente a la ejecución de las heurísticas del GreedyMinMax, GreedyMaxMin, ExactoMinMax, ExactoMaxMin en base a todos los criterios y sobre muestreos de 2500 y 5000 puntos de cada uno de los terrenos.

Como se puede observar en las tablas de la figura anterior los tiempos del algoritmo exacto fueron en todos los casos inferiores a los de las heurísticas asociadas, en algunos casos la diferencia fue insignificante pero en otros no tanto. Cabe destacar que, si bien los resultados de los cuadros son en base a un único muestreo de cada terreno de medidas 2500 y 5000 puntos esto ocurrió en todos los casos.

Es decir que, si bien intuitivamente se tiende a relacionar el tiempo de ejecución con la cantidad de flips, el costo temporal de encontrar un *flip* que mejore la triangulación original varía mucho según el terreno y los puntos muestreados, por lo que no hay una relación directa entre número de *flips* y tiempo de ejecución. Los tiempos de ejecución se relacionan directamente con la cantidad de iteraciones sin importar la cantidad de intercambios que se realice en cada una de ellas. Tampoco se detectó una relación con el tipo de heurísticas, pero sí se encontró una relación entre los distintos criterios para una misma heurística. Más aún para las heurísticas del tipo GreedyMaxSum o GreedyMinSum, en donde se hacen considerablemente más intercambios que para el resto, el tiempo de ejecución no fue siempre considerablemente mayor que en otros casos.

En base a todo lo evidenciado y los resultados obtenidos se puede realizar el siguiente análisis:

- No hay un patrón muy definido en lo que refiere a tiempos de ejecución. En base a los resultados obtenidos se pudo ver que hay una tendencia mayoritariamente creciente a medida que aumenta el orden de la triangulación pero no es determinante ya que se encontraron varias instancias no aisladas en donde esta premisa no es cierta. Por lo general esta tendencia creciente conlleva a que para el caso de orden máximo infinito los tiempos sean mayores (no siempre considerablemente mayores) que en el resto.
- Lo que se observó en la gran mayoría de los casos es que a medida que aumenta el tamaño del terreno y sobre la base de la ejecución de la misma heurística con el mismo criterio los tiempos fueron mayores cuando el tamaño de la muestra aumentó. Cabe destacar que los tiempos de ejecución no sólo dependen del tamaño del terreno sino también del terreno en sí, no habiéndose encontrado patrones definidos para cada terreno muestreado.
- No se encontraron patrones entre los tiempos de ejecución de cada criterio y cada heurística ni se detectaron patrones relacionados con la cantidad de *flips*.
- Cuando el tiempo de ejecución aumenta también lo hace la cantidad de iteraciones.
- En lo que refiere a los tiempos de ejecución del algoritmo exacto respecto a la heurística correspondiente para orden $k = 1$ los primeros fueron siempre menores (a veces considerablemente y a veces no).
- Por lo general los tiempos de ejecución (para un mismo muestreo y una misma heurística) del criterio JND fueron menores que los del criterio ABN aunque no por mucho. A su vez, los tiempos del criterio ABN fueron menores que WABN caso en que la diferencia fue más notoria. Cabe destacar nuevamente que existen

instancias y casos puntuales no específicos donde esto no se cumple (más aún cuando los órdenes máximos son bajos).

7.2.2. Análisis del algoritmo exacto para 1-ODT

En esta sección se presentan los resultados y el correspondiente análisis comparativo entre la ejecución del algoritmo exacto para 1-ODT para criterios del tipo *MinMax* y las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum para orden máximo $k = 1$ e infinito.

El conjunto de resultados completo que se obtuvo en función de las ejecuciones realizadas y que se utilizó como base para la elaboración del presente análisis se encuentra en la [Sección 2](#) del [Apéndice C](#).

En función de las ejecuciones realizadas se pudo observar que, en todos los casos, los *maxValue* tanto de las heurísticas GreedyMinMax como de la ejecución del algoritmo exacto resultaron ser menores o iguales que el *maxValue* de la triangulación de *Delaunay*. Es decir que, como era de esperarse, tanto la heurística como el algoritmo exacto no empeoran el objetivo.

Se pudo observar que existieron únicamente dos casos (de un total de 72) en los que el algoritmo exacto minimizó el *maxValue* más que la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1. Se detallan a continuación los resultados de dichas ejecuciones:

ABN – CC - 2500					
método	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	22,9151	15,8571	90,4108
	0	(DT)	22,9151	15,8571	102,333
	1	(1-ODT)	22,9151	15,8572	74,8107
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	23,0641	16,0223	73,8271
% heurística			0	0,0006306323	-26,8948433057
% exacto			0,65022627	1,0418046175	-27,856019075
% infinito			0	0	-11,6503962554

JND – CC – 2500					
método	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	22,9151	15,8571	71,7969
	0	(DT)	22,9151	15,8571	83,9254
	1	(1-ODT)	22,9151	15,8571	69,3705
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	23,0641	16,0223	66,382
% heurística			0	0	-17,3426638419
% exacto			0,65022627	1,0418046175	-20,903564356
% infinito			0	0	-14,4515248066

FIGURA 7.16: Cuadro correspondiente a la ejecución la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 e infinito y el algoritmo exacto para los criterios ABN y JND sobre un muestreo aleatorio de 2500 (*terreno3*) puntos del terreno CC.

Como se puede observar en el cuadro de la figura anterior, en los casos en los que el algoritmo exacto dio mejores resultados que la heurística GreedyMinMax para orden

máximo 1 la mejora fue del 27,86% para el algoritmo exacto en el primer caso y del 20,90% para el segundo mientras que la heurística produjo una mejora del 26,89% y 17,34% respectivamente. En ambos casos las métricas de error (MAE y RMSE) resultaron peores en las aproximaciones obtenidas por el exacto tanto respecto a la obtenida por la heurística como respecto de la triangulación de *Delaunay* original.

Si se comparan las magnitudes de los errores para el algoritmo exacto con objetivo MinMax y la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 se puede observar que son similares en todos los casos. En las Figuras 7.17 a 7.20 se puede ver que los comportamientos de las magnitudes de error para los distintos algoritmos son similares para muestras de 2500 de un mismo terreno para un mismo criterio y que ocurre lo mismo para las muestras de 5000. Más aún las magnitudes no distan mucho del error medido en la triangulación de *Delaunay*.

Observando las variaciones de las magnitudes de error y comparando el error de la triangulación de *Delaunay* con el de las aproximaciones obtenidas con los dos algoritmos antes mencionados, se pudo ver que entre todos los casos observados:

- El máximo desvío estándar para RMSE fue de 0,24 y para MAE de 0,14.
- El caso en donde el RMSE tuvo mayor desvío estándar fue con el muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de CC y las magnitudes de los errores fueron de:
 - 25,6943 para la triangulación de *Delaunay*,
 - 25,6705 para la aproximación obtenida con la heurística GreedyMinMaxWABN con orden máximo 1 y
 - 26,0921 para la aproximación obtenida con el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMaxWABN.
- Para el caso en donde el MAE tuvo mayor desvío estándar con el muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno2*) de CC y las magnitudes de los errores fueron de:
 - 11,957 para la triangulación de *Delaunay*,
 - 11,9614 para la aproximación obtenida con la heurística GreedyMinMaxJND con orden máximo 1 y
 - 12,2103 para la aproximación obtenida con el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMaxJND.

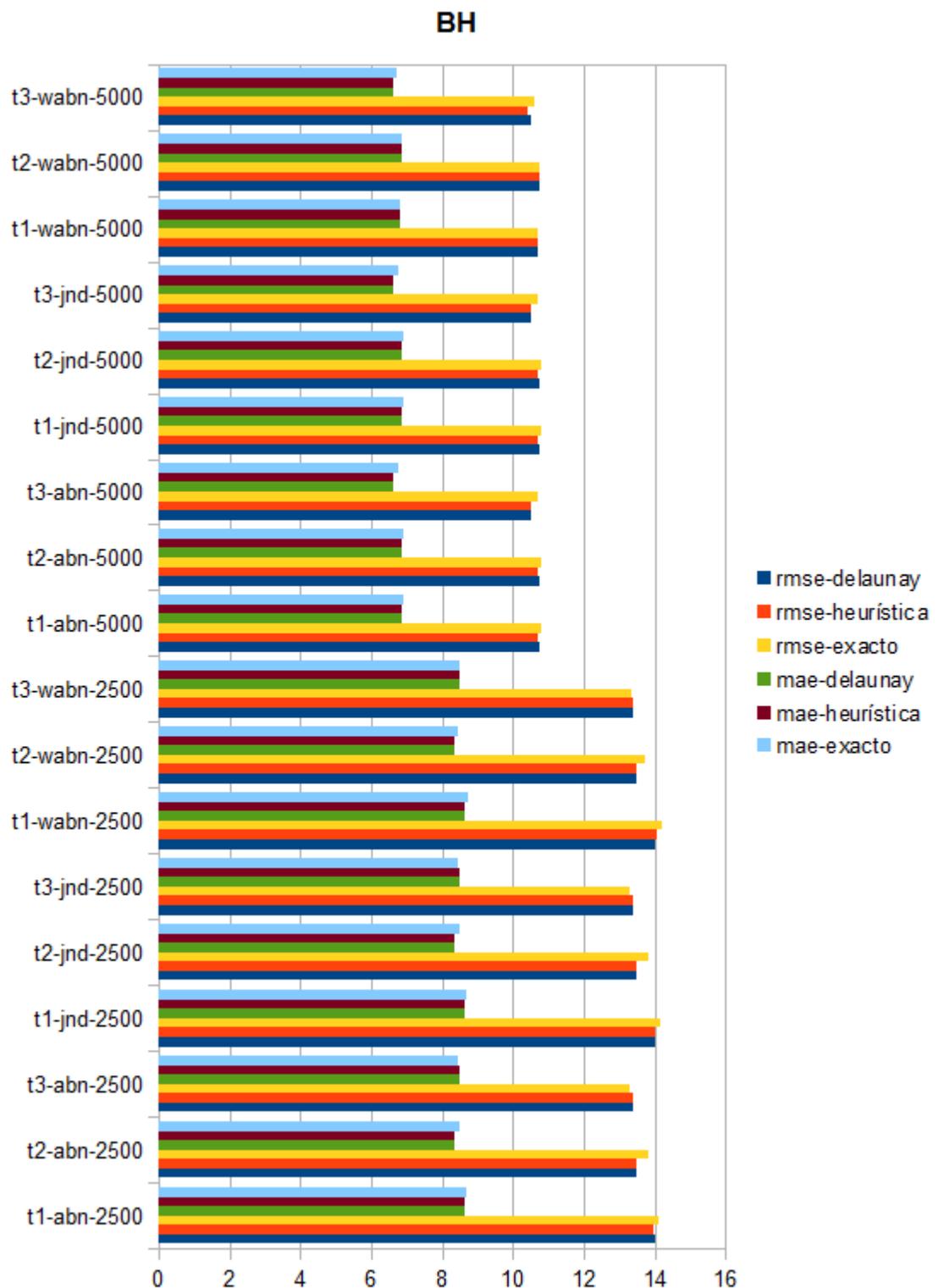


FIGURA 7.17: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno BH. En el eje x se observan las métricas de los errores RMSE y MEA de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje y el error medido para la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

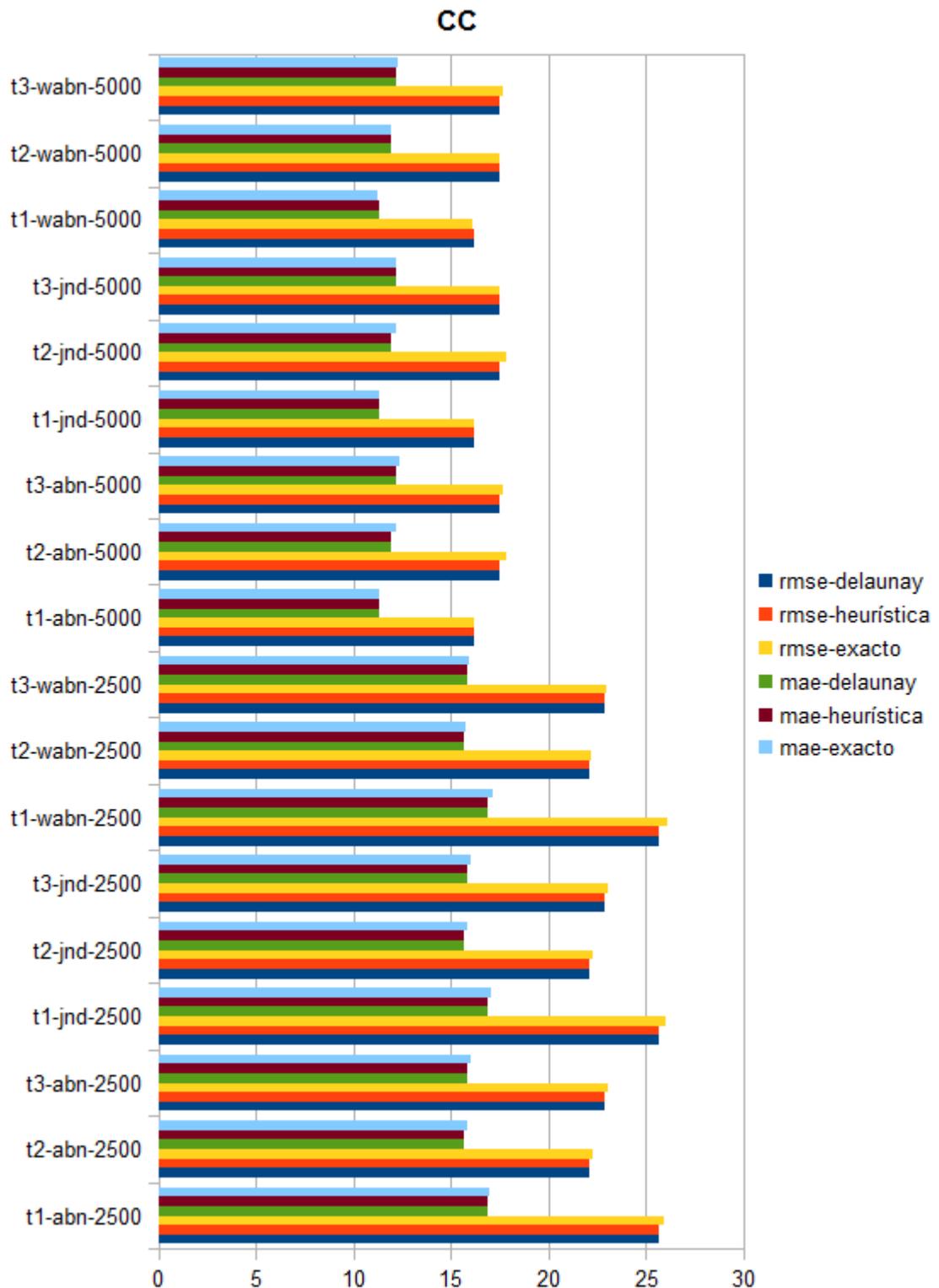


FIGURA 7.18: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno CC. En el eje x se observan las métricas de los errores RMSE y MEA de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje y el error medido para la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

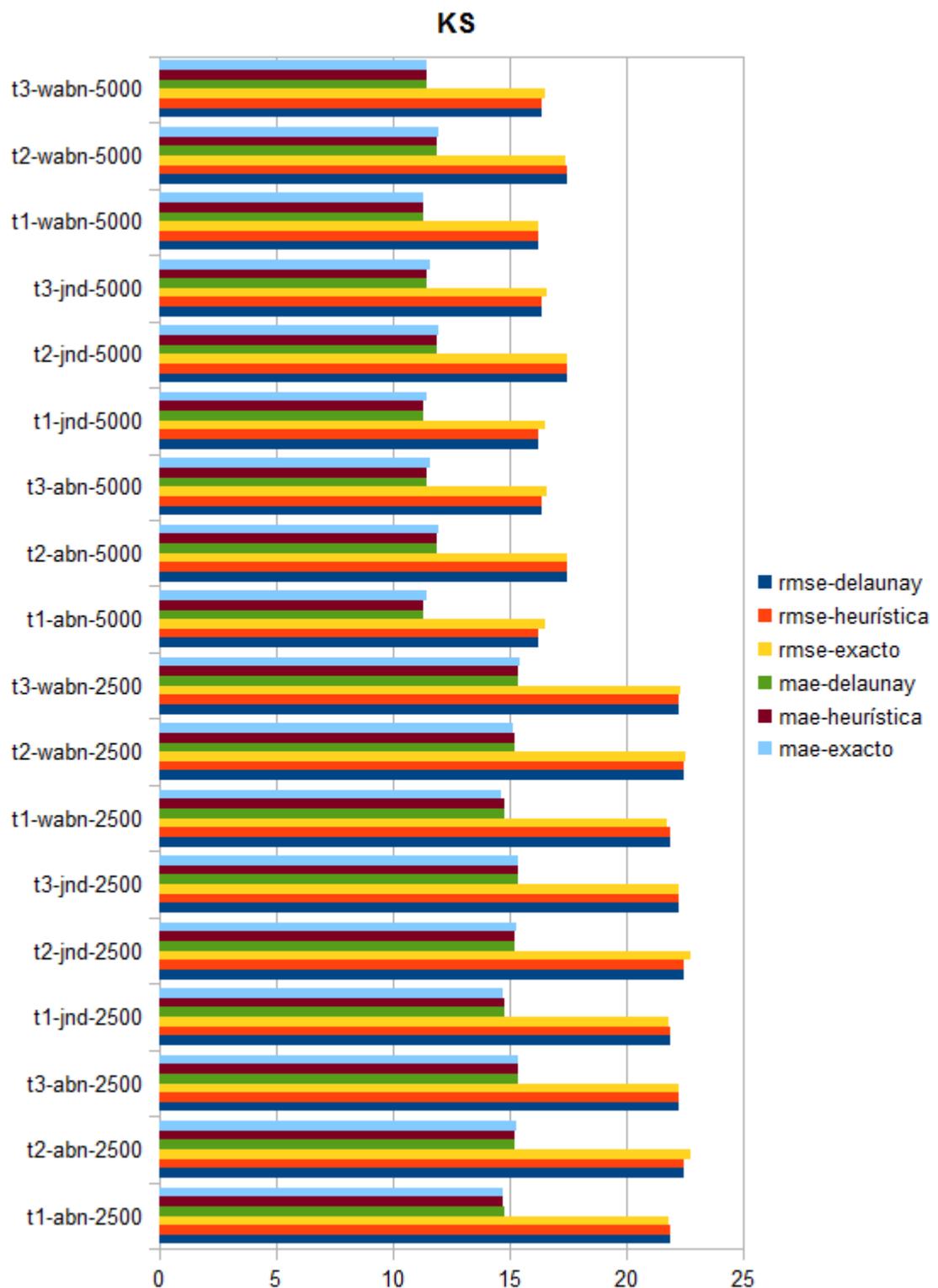


FIGURA 7.19: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno KS. En el eje x se observan las métricas de los errores RMSE y MEA de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje y el error medido para la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

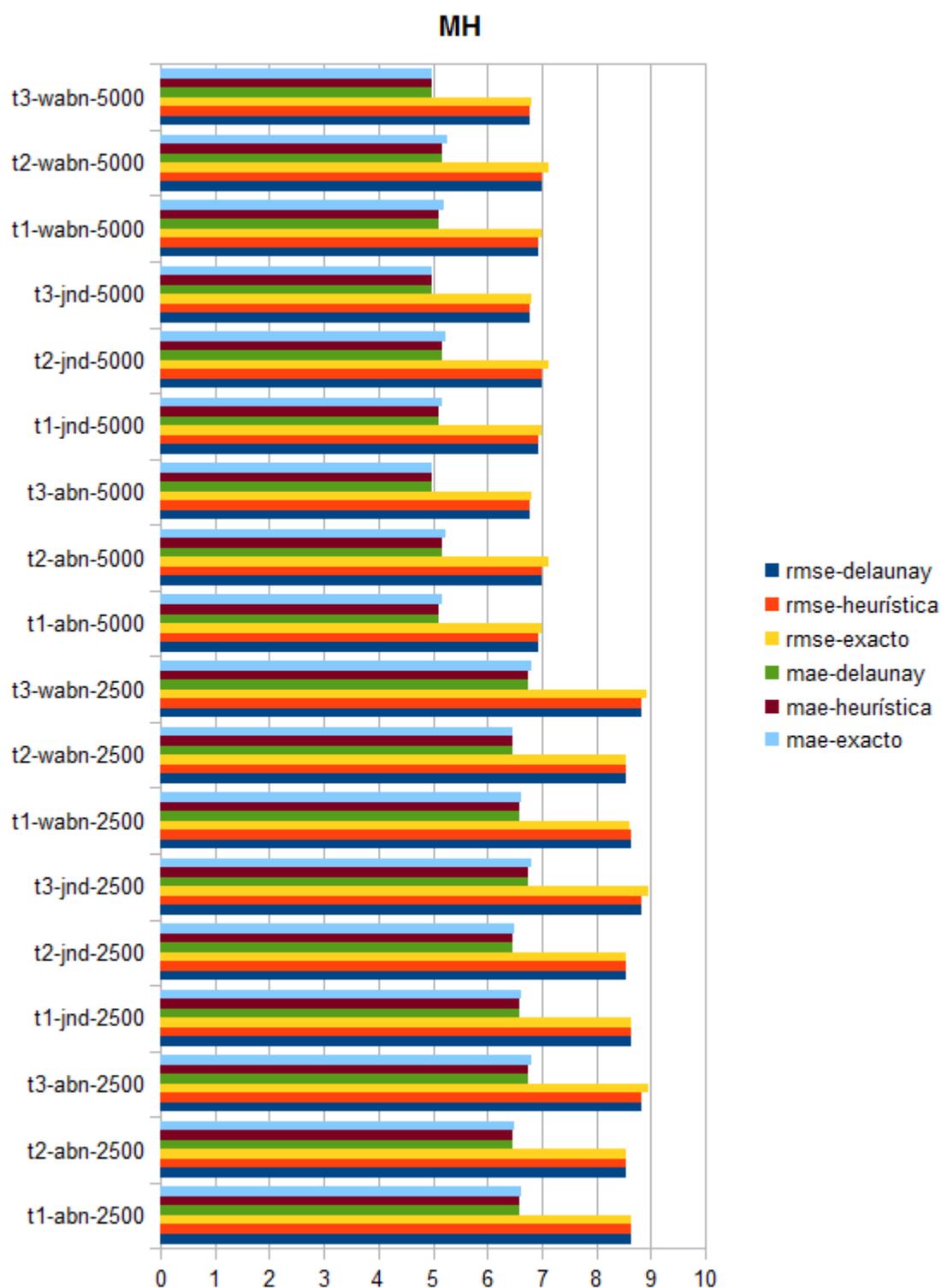


FIGURA 7.20: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno MH. En el eje x se observan las métricas de los errores RMSE y MEA de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje y el error medido para la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

Si bien no es el objetivo de esta sección analizar los comportamientos de los errores en general, es importante destacar que para orden máximo 1 las aproximaciones obtenidas en base a muestras de 5000 puntos poseen un error más pequeño que las obtenidas para muestras de 2500 puntos. Adicionalmente, se puede observar en las imágenes anteriores que las métricas de MAE son inferiores a las de RMSE para todos los casos.

Cabe destacar que, si bien las magnitudes de los errores estuvieron muy cercanas, se pudieron observar los siguientes eventos:

	mejoró DT	empeoró DT	igualó DT
rmse-heurística	43,06%	12,50%	44,44%
rmse-exacto	15,28%	77,78%	6,94%
mae-heurística	44,44%	12,50%	43,06%
mae-exacto	12,50%	80,56%	6,94%

FIGURA 7.21: Cuadro que muestra el porcentaje de veces que el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMax mejoró, igualó o empeoró el error RMSE o MAE respecto de la triangulación de *Delaunay* y lo mismo para la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1.

En el cuadro de la imagen anterior se puede ver que, en el caso de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1, fueron considerablemente más las veces en que ambas métricas de error (MAE y RMSE) se mejoraron o igualaron respecto a la triangulación de *Delaunay*. En el caso del algoritmo exacto fue al revés ya que se puede observar que se empeoraron las métricas mucho más de lo que se mejoraron o igualaron. Esto indica que, si bien las magnitudes de los errores estuvieron muy cercanas en los tres casos, en promedio y en lo que a métricas de error respecta, funcionó mejor la heurística GreedyMinMax.

En 24 de 72 casos (es decir en el 33,33% de las ejecuciones) **no** se encontró una triangulación de orden 1 que minimice el *maxValue* del criterio objetivo de la triangulación de *Delaunay*. Los casos encontrados se detallan a continuación:

- Hubo casos (12) en donde la heurística no aplicó cambios pero el exacto sí **empeorando** las métricas de ambos errores (**RMSE** y **MAE**):
 - MH, *terreno 1*, ABN, 2500.
 - KS, *terreno 2*, ABN, 2500.
 - CC, *terreno 3*, ABN, 5000.
 - MH, *terreno 1*, ABN, 5000.
 - MH, *terreno 1*, JND, 2500.

- KS, *terreno 2*, JND, 2500.
 - KS, *terreno 1*, JND, 5000.
 - KS, *terreno 3*, WABN, 2500.
 - CC, *terreno 3*, WABN, 5000.
 - MH, *terreno 1*, WABN, 5000.
 - MH, *terreno 2*, WABN, 5000.
 - MH, *terreno 3*, WABN, 5000.
- Hubo casos (3) en donde la heurística no aplicó cambios pero el exacto sí **mejorando** las métricas de ambos errores (**RMSE** y **MAE**):
 - BH, *terreno 3*, WABN, 2500.
 - KS, *terreno 1*, WABN, 2500.
 - CC, *terreno 1*, WABN, 5000.
- Hubo casos (2) en donde la heurística no aplicó cambios pero el exacto sí **empeorando MAE** y **mejorando RMSE**:
 - KS, *terreno 3*, ABN, 2500.
 - MH, *terreno 1*, WABN, 2500.
- Hubo casos (2) en donde la heurística no aplicó cambios pero el exacto sí **empeorando RMSE** y **mejorando MAE**:
 - KS, *terreno 3*, JND, 2500.
 - KS, *terreno 2*, WABN, 2500.
- Hubo casos (5) en donde ni la heurística ni el exacto aplicaron cambios:
 - CC, *terreno 3*, JND, 5000.
 - BH, *terreno 1*, WABN, 5000.
 - BH, *terreno 2*, WABN, 5000.
 - CC, *terreno 2*, WABN, 5000.
 - KS, *terreno 1*, WABN, 5000.

Como se puede observar en base a lo expuesto anteriormente hubo pocos casos en donde el algoritmo exacto, no habiendo mejorado el objetivo, realiza *flips* y mejora alguno de los errores. En la mayoría de los casos se pudo observar que las métricas de error empeoraron con los cambios realizados en el exacto a diferencia de la heurística que, al no realizar cambios, deja la triangulación igual a *Delaunay*.

En las imágenes que se presentan en las Figuras 7.22 a 7.25 se pueden observar las métricas de los $maxValue$ de cada una de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución del algoritmo exacto para 1-ODT para criterios del tipo *MinMax* y las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum para orden máximo $k = 1$ e infinito para todos los criterios implementados.

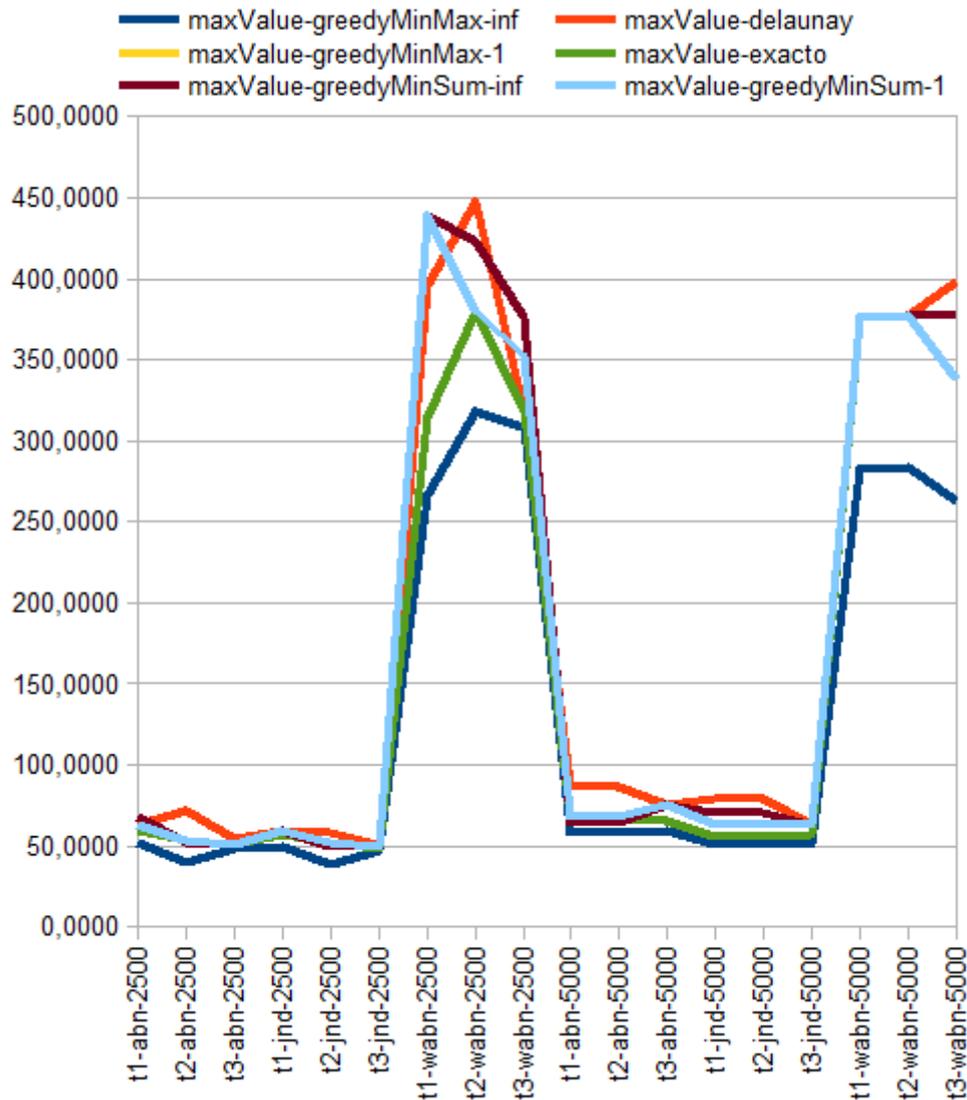


FIGURA 7.22: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum con orden máximo 1 e infinito sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno BH. En el eje y se observan las métricas de los $maxValue$ de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje x la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

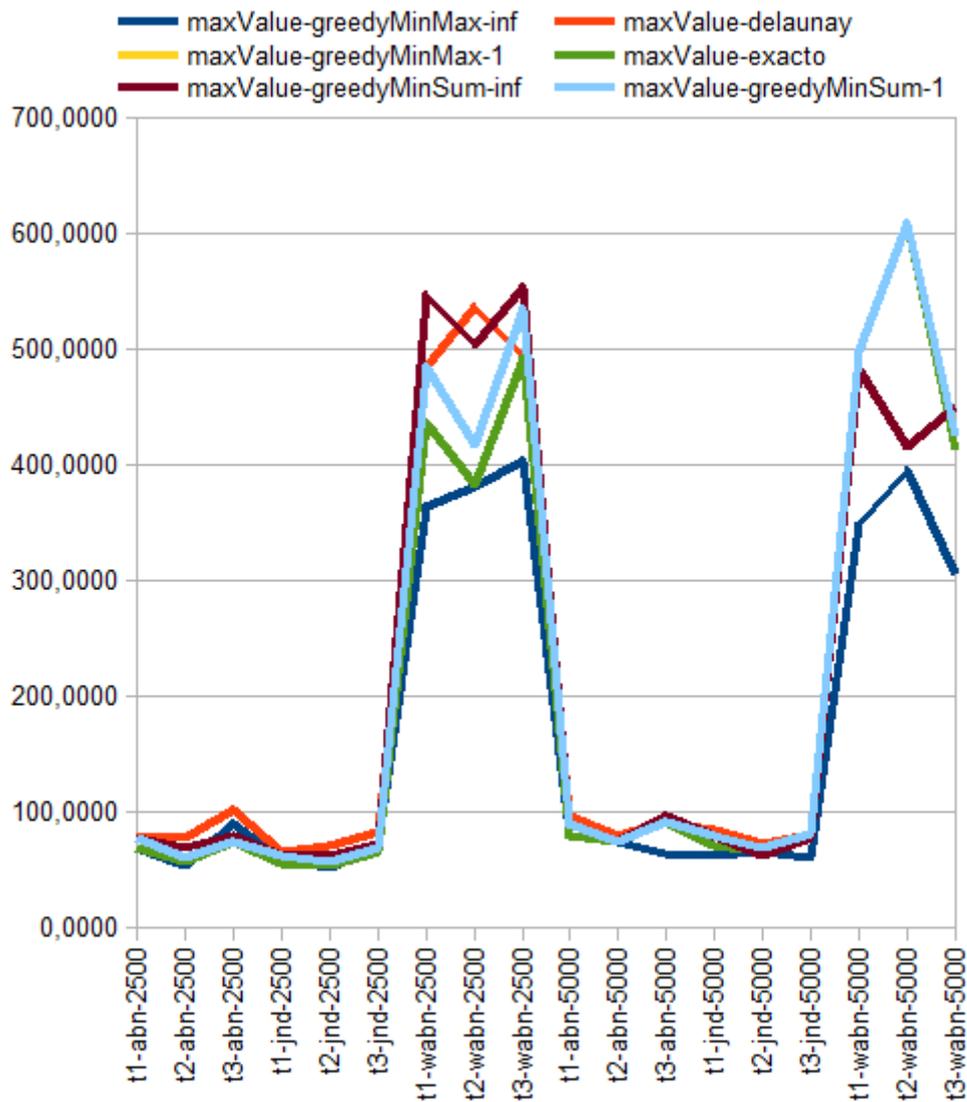


FIGURA 7.23: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum con orden máximo 1 e infinito sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno CC. En el eje *y* se observan las métricas de los *maxValue* de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje *x* la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

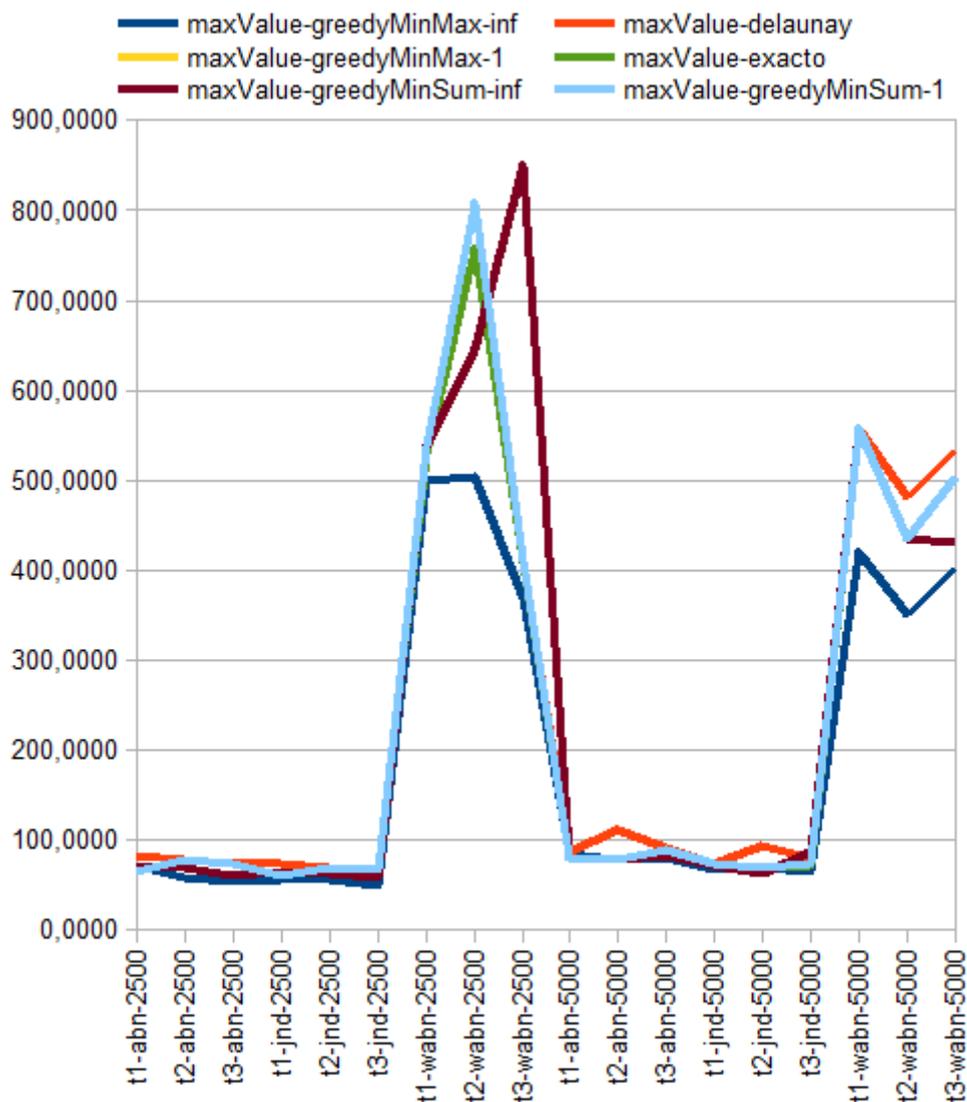


FIGURA 7.24: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum con orden máximo 1 e infinito sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno KS. En el eje y se observan las métricas de los $maxValue$ de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje x la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

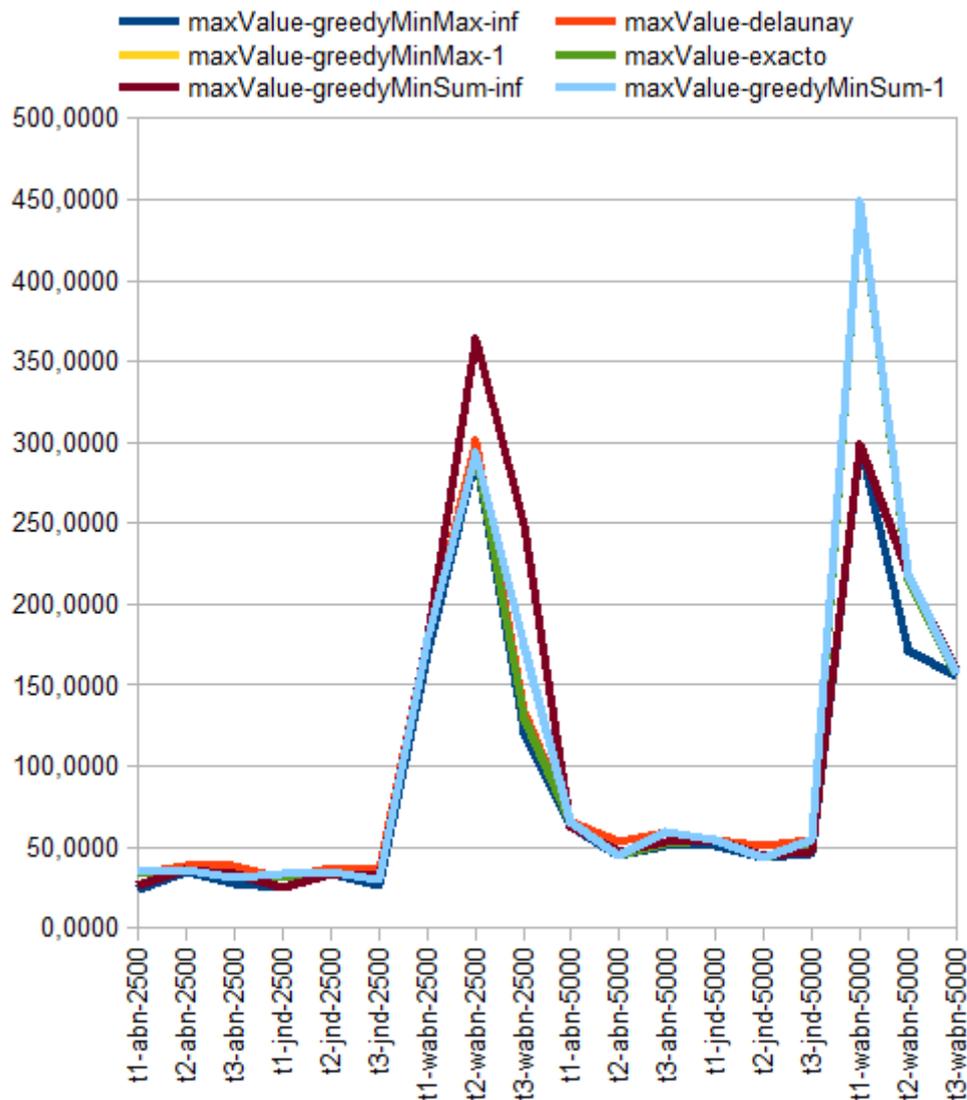


FIGURA 7.25: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum con orden máximo 1 e infinito sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno MH. En el eje y se observan las métricas de los $maxValue$ de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje x la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

Se puede observar que el algoritmo que más minimizó el $maxValue$ para todos los criterios y terrenos fue la heurística GreedyMinMax para orden máximo infinito. Se puede ver en las imágenes anteriores que la línea azul, que es la que corresponde a la ejecución de este algoritmo, se encuentra en la gran mayoría de los casos por debajo del resto.

Los dos algoritmos que siguen, en orden de mejora, son la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 y el algoritmo exacto. Estos últimos funcionaron peor que GreedyMinMax para orden máximo infinito (aunque no por mucho), pero mejor que las

heurísticas GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito. Se puede observar que las líneas verde y amarilla casi no se distinguen entre sí ya que, como se mencionó anteriormente, la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 y el algoritmo exacto se comportan de manera similar.

En las imágenes anteriores se observa que la diferencia entre la línea verde y las líneas celeste y bordó (que corresponden a las heurísticas GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito respectivamente) es un poco más notoria para los terrenos BH y CC que para KS y MH.

En las heurísticas GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito casi no se produjeron mejoras que disten del valor máximo de la triangulación de *Delaunay*. Más aún, no sólo no mejoró la métrica sino que a veces hasta la empeoró. Se puede observar que la línea naranja (que corresponde a la triangulación de *Delaunay*) se encuentra cercana a las líneas celeste y bordó y, a veces, por debajo de estas últimas.

Donde más distantes se encontraron los resultados de los algoritmos fue en las ejecuciones con el criterio WABN. Tanto para ABN como para JND las métricas de los *maxValue* se encuentran cercanas y no así para el criterio WABN donde las líneas de las ejecuciones se encuentran más aisladas entre sí.

Si bien el comportamiento de las heurísticas GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito respecto a la minimización del *maxValue* no fue mejor que otras ejecuciones, las aproximaciones obtenidas por estas ejecuciones mejoran considerablemente las métricas de error respecto a la triangulación de *Delaunay*.

	mejoró DT	empeoró DT	igualó DT
rmse-minSumInf	86,11%	13,89%	0,00%
rmse-minSum1	66,67%	31,94%	1,39%
mae-minSumInf	100,00%	0,00%	0,00%
mae-minSum1	91,67%	8,33%	0,00%

FIGURA 7.26: Cuadro que muestra el porcentaje de veces que las heurísticas Greedy-MinSum para orden máximo $k = 1$ e infinito mejoraron, igualaron o empeoraron el error RMSE o MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Se puede observar en el cuadro anterior que, en todos los casos, el porcentaje de veces que las heurísticas GreedyMinSum mejoraron las métricas de error respecto de la triangulación de *Delaunay* fue considerablemente mayor que las veces que la empeoraron y casi no se registraron casos donde se la igualó. Es decir que, en la mayoría de los casos las heurísticas realizaron cambios que, si bien no contribuyeron a minimizar el *maxValue*, sí mejoraron las métricas de error de la triangulación original.

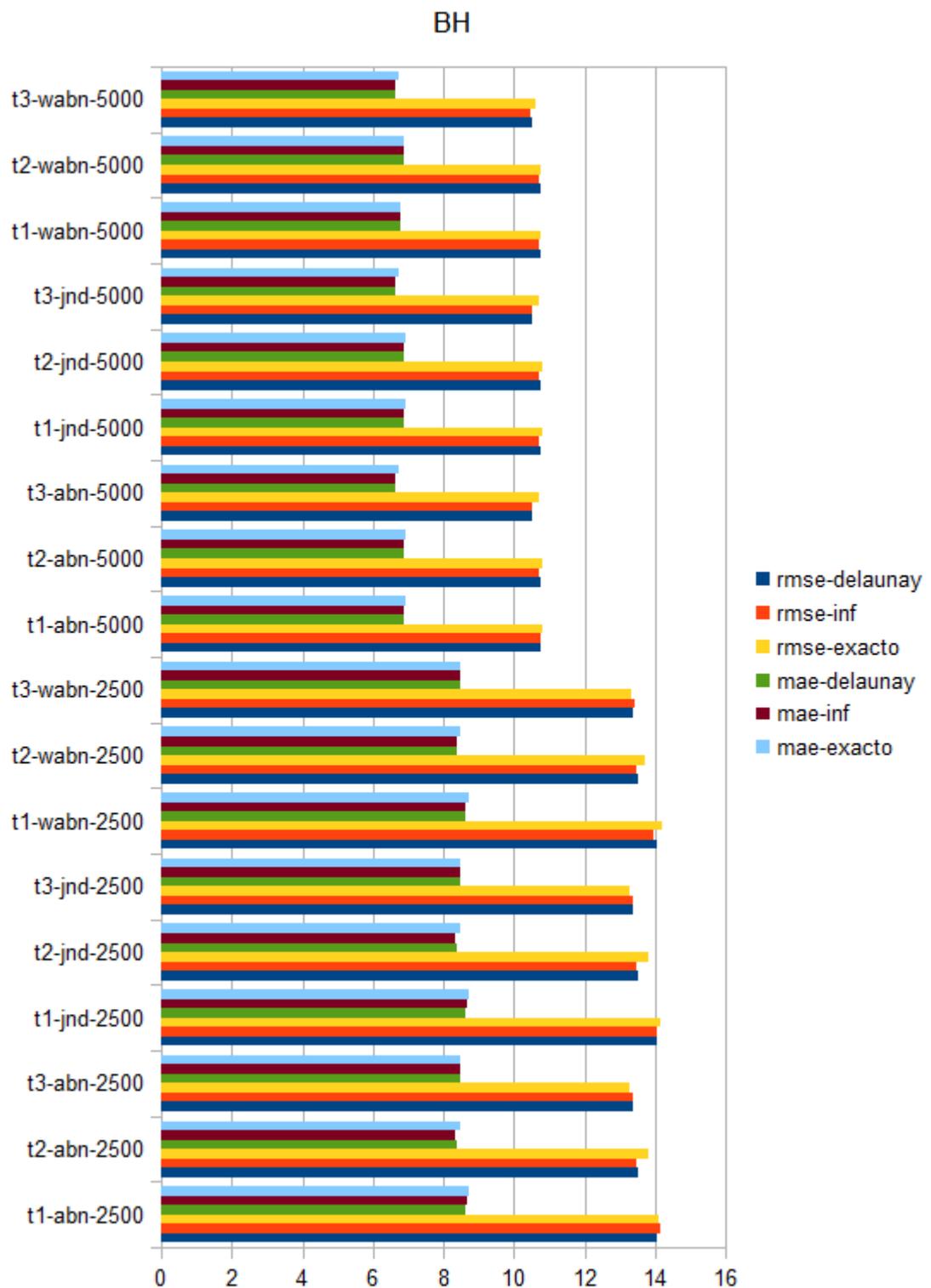


FIGURA 7.27: Gráfico correspondiente a la ejecución del algoritmo exacto con objetivo MinMax para triangulaciones de orden 1 y de la heurística GreedyMinMax con orden máximo infinito sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) puntos del terreno BH. En el eje x se observan las métricas de los errores RMSE y MEA de cada aproximación obtenida (incluida la triangulación de *Delaunay*) y en el eje y el error medido para la instancia a la cual corresponde la métrica observada indicando terreno, criterio y tamaño de la misma.

En lo que respecta al análisis de las métricas de error de las ejecuciones de la heurística GreedyMinMax para orden máximo infinito, el mismo resulta muy similar al presentado para el caso de la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1. Las métricas de error observadas para la heurística no distan mucho que las observadas para las ejecuciones del algoritmo exacto.

Como se puede ver en [Figura 7.27](#), el comportamiento de las métricas de error es muy similar al de la [Figura 7.17](#). Esto se observó tanto en BH como en el resto de los terrenos. Cabe destacar que, dado que los gráficos son muy similares entre sí, se presentó únicamente como ejemplo el que corresponde a las ejecuciones realizadas sobre los muestreos aleatorios tomados de BH.

Al igual que ocurrió con la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1, el máximo desvío estándar observado tanto para MAE como para RMSE en el caso de la heurística GreedyMinMax para orden máximo infinito fue pequeño:

- El máximo desvío estándar para RMSE fue de 0,22 y para MAE de 0,14.
- El caso en donde el RMSE tuvo mayor desvío estándar fue con el muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de CC y las magnitudes de los errores fueron de:
 - 25,6943 para la triangulación de *Delaunay*,
 - 25,2789 para la aproximación obtenida con la heurística GreedyMinMax-WABN con orden máximo infinito y
 - 26,0921 para la aproximación obtenida con el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMaxWABN.
- Para el caso en donde el MAE tuvo mayor desvío estándar con el muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno2*) de CC y las magnitudes de los errores fueron de:
 - 11,957 para la triangulación de *Delaunay*,
 - 11,9672 para la aproximación obtenida con la heurística GreedyMinMaxJND con orden máximo infinito y
 - 12,2103 para la aproximación obtenida con el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMaxJND.

Más aún, las instancias donde se observó el máximo desvío estándar para cada métrica son las mismas en ambas heurísticas.

Al igual que se observó en la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 para el caso infinito, si bien las magnitudes de los errores estuvieron muy cercanas, se pudieron observar los siguientes eventos:

	mejoró DT	empeoró DT	igualó DT
rmse-heurística	58,33%	33,33%	8,33%
rmse-exacto	15,28%	77,78%	6,94%
mae-heurística	55,56%	36,11%	8,33%
mae-exacto	12,50%	80,56%	6,94%

FIGURA 7.28: Cuadro que muestra el porcentaje de veces que el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MinMax mejoró, igualó o empeoró el error RMSE o MAE respecto de la triangulación de *Delaunay* y lo mismo para la heurística GreedyMinMax con orden máximo infinito.

En el cuadro de la imagen anterior se puede ver que, en el caso de la heurística GreedyMinMax con orden máximo infinito, fueron considerablemente más las veces en que ambas métricas de error (MAE y RMSE) se mejoraron o igualaron respecto a la triangulación de *Delaunay*.

En base a todo lo evidenciado y los resultados obtenidos se puede realizar el siguiente análisis:

- Tanto el algoritmo exacto para 1-ODT para criterios del tipo *MinMax* como las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum para orden máximo $k = 1$ e infinito no empeoran el objetivo. Es decir que, en todos los casos se minimizó o igualó el *maxValue* de la triangulación de *Delaunay* original.
- En 2 de 72 casos el algoritmo exacto minimizó el *maxValue* más que la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1, en el resto el *maxValue* de las aproximaciones obtenidas resultó igual. En los dos casos en donde el exacto minimizó más el objetivo empeoró las métricas de error MAE y RMSE respecto tanto de la heurística GreedyMinMax como de la triangulación de *Delaunay* original.
- Si se compara, para una misma muestra de un mismo terrero y evaluando un mismo criterio, las métricas de error (MAE y RMSE) para la triangulación de *Delaunay*, la aproximación obtenida para el algoritmo exacto con objetivo de tipo MinMax y la obtenida para la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 son similares entre sí. Para las aproximaciones obtenidas en base a muestras de 5000 puntos se observó un error (tanto en MAE como RMSE) más pequeño que las obtenidas para muestras de 2500 puntos. Adicionalmente, se puede observar que las métricas de MAE son inferiores a las de RMSE para todos los casos.
- Si bien las magnitudes de los errores estuvieron muy cercanas en los tres casos mencionados en el *item* anterior, se pudo observar que (en promedio y en lo que a métricas de error respecta) funcionó mejor la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1.

- En el 33,33% ni la heurística GreedyMinMax ni el algoritmo exacto encontraron una triangulación de orden 1 que mejore el *maxValue* de la triangulación de *Delaunay*. Dentro de estos casos, la heurística no generó cambios mientras que el exacto sí, habiéndose observado pocos casos en donde el algoritmo exacto, sin mejorar el objetivo, realiza *flips* y mejora alguno de los errores.
- El algoritmo que, en la mayoría de los casos, más minimizó el *maxValue* fue la heurística GreedyMinMax para orden máximo infinito. Los dos algoritmos que siguen, en orden de mejora, son la heurística GreedyMinMax para orden máximo 1 y el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 para criterios del tipo MinMax. Estos últimos funcionaron peor que GreedyMinMax para orden máximo infinito (aunque no por mucho), pero mejor que las heurística GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito. Esta diferencia fue más notoria para los terrenos CC y BH, mientras que para KS y MH el resultado de las ejecuciones fue más similar.
- Las heurísticas GreedyMinSum para orden máximo 1 e infinito casi no produjeron mejoras que disten del valor máximo de la triangulación de *Delaunay* y hasta incluso, en algunos casos empeoraron la métrica. No obstante, produjeron aproximaciones con métricas de error considerablemente más bajas respecto a la triangulación de *Delaunay*.
- Donde más distantes se encontraron los resultados de los algoritmos fue en las ejecuciones con el criterio WABN. Tanto para ABN como para JND las métricas de los *maxValue* para todas las ejecuciones se encuentran cercanas.
- En lo que respecta a las métricas de error de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax para orden máximo infinito, su comportamiento fue similar al observado para la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1. Las métricas de error son similares al algoritmo exacto pero, en promedio, funcionó mejor la heurística.

Cabe destacar que, no se incluyó aquí un análisis similar para el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo MaxMin ya que la heurística GreedyMaxMin incorpora la noción de cantidad de mínimos y, por tanto, no resultan comparables.

7.2.3. Métricas de error

En esta sección se presenta un análisis comparativo entre las distintas métricas de error de las aproximaciones obtenidas en cada una de las distintas instancias de prueba antes definida.

Es importante destacar que, para todas las imágenes de esta sección que posean tablas, se podrá observar una celda sombreada con *verde* si la métrica de dicha celda es mejor a la observada en la triangulación de *Delaunay*, con *naranja* si es peor y con *blanco* si la iguala.

Uno de los factores que se encuentra asociado al comportamiento de las métricas de error es la **heurística** ejecutada. Se puede observar en las imágenes de las Figuras 7.29 a 7.32 que, para un mismo terreno, una misma muestra y un mismo criterio, una métrica de error puede comportarse de manera diferente en función de la heurística ejecutada.

Para una misma instancia se puede observar que hubo casos en donde una heurística dejó las métricas casi sin alterar (como es el caso de la métrica RMSE para la heurística GreedyMinMaxABN de la Figura 7.29) mientras que otras heurísticas las mejoró (como GreedyMinSumABN de la Figura 7.29) o empeoró (como GreedyMaxSumABN de la Figura 7.29).

No obstante es importante destacar que, el comportamiento de las heurísticas antes mencionado no puede generalizarse para todos los terrenos. Si bien para una misma instancia una misma métrica puede variar según la heurística, esta última puede presentar comportamientos diferentes en distintas instancias.

Se pudo observar que el comportamiento de las métricas de error se encuentra asociado no sólo al algoritmo ejecutado sino también a la **muestra** asociada. Para un mismo terreno, una misma heurística y un mismo criterio, dependiendo del muestreo aleatorio seleccionado, las métricas de error pueden comportarse en forma completamente diferente.

En las imágenes de las Figura 7.33 a 7.35 se puede observar que para el método GreedyMinSumABN el comportamiento de la métrica de error RMSE varió entre los muestreos aleatorios de nombre *terreno1* y *terreno2* y el muestreo *terreno3*. Siendo los tres muestreos aleatorios de 2500 puntos del terreno MH se puede ver que, en el último caso, la métrica de error de la aproximación obtenida en algunos casos empeoraron respecto a las de la triangulación de *Delaunay* original, mientras que en los primeros dos siempre se mejoró dicha métrica.

orden max	GreedyMinMax	GreedyMinSum	GreedyMaxMin	GreedyMaxSum
infinito	22,9151	22,3681	22,9141	29,7050
0	22,9151	22,9151	22,9151	22,9151
1	22,9151	22,7297	22,9151	23,1489
2	22,9151	22,6157	22,9166	23,8281
3	22,9151	22,3290	22,9162	24,3760
4	22,9151	22,2741	22,9161	24,3125
5	22,9151	22,0644	22,9155	24,3294
6	22,9151	22,0873	22,9174	24,5574
7	22,9151	21,8767	22,9178	24,6794
8	22,9151	21,8981	22,9178	24,9455
9	22,9151	21,8961	22,9165	24,7868
10	22,9151	21,9268	22,9165	24,9281
11	22,9151	21,9550	22,9165	25,0355
12	22,9151	21,9177	22,9165	25,2391
13	22,9151	21,9187	22,9165	25,2658
14	22,9151	21,9041	22,9165	25,5129
15	22,9151	21,9062	22,9140	25,4958
16	22,9151	21,9119	22,9140	25,6083
17	22,9151	22,0356	22,9140	25,5995
18	22,9151	22,0308	22,9140	25,6583
19	22,9151	22,0914	22,9140	25,6506
20	22,9151	22,0893	22,9140	25,6979
21	22,9151	22,0888	22,9140	25,8168
22	22,9151	22,0899	22,9140	25,8443
23	22,9151	22,0899	22,9140	25,9635
24	22,9151	22,0860	22,9140	26,1174
25	22,9151	22,0876	22,9140	26,1546
26	22,9151	22,0900	22,9140	26,1265
27	22,9151	22,0645	22,9140	26,1572
28	22,9151	22,0938	22,9140	26,2204
29	22,9151	22,0938	22,9140	26,2286
30	22,9151	22,0925	22,9140	26,3775
31	22,9151	22,0973	22,9140	26,3967
32	22,9151	22,0973	22,9140	26,3932
33	22,9151	22,3214	22,9140	26,4904
34	22,9151	22,3228	22,9140	26,4095
35	22,9151	22,3229	22,9140	26,2944
36	22,9151	22,3229	22,9140	26,3760
37	22,9151	22,3230	22,9140	26,3250
38	22,9151	22,3229	22,9140	26,3424
39	22,9151	22,3240	22,9140	26,3863
40	22,9151	22,3256	22,9140	26,4446
41	22,9151	22,3298	22,9140	26,3175
42	22,9151	22,3298	22,9140	26,4351
43	22,9151	22,3148	22,9140	26,5033
44	22,9151	22,3160	22,9140	26,5626
45	22,9151	22,3194	22,9140	26,5531
46	22,9151	22,3142	22,9140	26,5293
47	22,9151	22,3147	22,9140	26,6033
48	22,9151	22,3190	22,9140	26,6157
49	22,9151	22,3265	22,9140	26,6023
50	22,9151	22,3265	22,9140	26,6064

FIGURA 7.29: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de la ejecución de las heurísticas GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 0 a 50 e infinito para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) del terreno CC.

orden max	GreedyMinMax	GreedyMinSum	GreedyMaxMin	GreedyMaxSum
infinito	15,8571	15,4495	15,8586	20,9620
0	15,8571	15,8571	15,8571	15,8571
1	15,8572	15,7125	15,8557	16,0711
2	15,8572	15,6196	15,8576	16,6396
3	15,8536	15,4397	15,8571	16,9714
4	15,8536	15,4045	15,8567	16,9591
5	15,8536	15,2944	15,8563	17,0944
6	15,8536	15,3090	15,8553	17,2161
7	15,8536	15,1834	15,8571	17,2262
8	15,8536	15,1926	15,8571	17,3823
9	15,8571	15,1874	15,8557	17,3529
10	15,8571	15,1852	15,8557	17,4439
11	15,8571	15,2003	15,8557	17,5632
12	15,8571	15,1761	15,8560	17,7255
13	15,8571	15,1767	15,8571	17,7847
14	15,8571	15,1573	15,8571	17,9276
15	15,8571	15,1596	15,8568	17,8884
16	15,8571	15,1428	15,8568	17,9825
17	15,8571	15,2205	15,8568	18,0223
18	15,8571	15,2165	15,8568	18,0234
19	15,8571	15,2479	15,8568	18,0106
20	15,8571	15,2471	15,8568	18,0359
21	15,8571	15,2463	15,8568	18,1311
22	15,8571	15,2482	15,8568	18,1648
23	15,8571	15,2482	15,8568	18,2405
24	15,8571	15,2502	15,8568	18,3400
25	15,8571	15,2517	15,8568	18,3836
26	15,8571	15,2539	15,8568	18,3693
27	15,8571	15,2393	15,8568	18,4236
28	15,8571	15,2671	15,8568	18,4752
29	15,8571	15,2672	15,8568	18,4608
30	15,8571	15,2644	15,8568	18,5730
31	15,8571	15,2712	15,8568	18,5405
32	15,8571	15,2712	15,8568	18,5471
33	15,8571	15,3911	15,8568	18,5854
34	15,8571	15,3929	15,8568	18,5416
35	15,8571	15,3925	15,8568	18,4913
36	15,8571	15,3925	15,8568	18,5432
37	15,8571	15,3926	15,8568	18,5333
38	15,8571	15,3923	15,8568	18,5405
39	15,8571	15,3950	15,8568	18,5931
40	15,8571	15,3985	15,8568	18,6387
41	15,8571	15,4021	15,8568	18,5516
42	15,8571	15,4021	15,8568	18,6226
43	15,8571	15,3778	15,8568	18,6619
44	15,8571	15,3833	15,8568	18,7338
45	15,8571	15,3882	15,8568	18,7328
46	15,8571	15,3859	15,8568	18,7105
47	15,8571	15,3877	15,8568	18,7419
48	15,8571	15,3913	15,8568	18,7515
49	15,8571	15,3988	15,8568	18,7506
50	15,8571	15,3988	15,8568	18,7439

FIGURA 7.30: Cuadro correspondiente a la métrica de error MAE de la ejecución de las heurísticas GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 0 a 50 e infinito para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) del terreno CC.

orden max	GreedyMinMax	GreedyMinSum	GreedyMaxMin	GreedyMaxSum
infinito	14271,4	13904,6	14272,8	18865,8
0	14271,4	14271,4	14271,4	14271,4
1	14271,5	14141,2	14270,2	14464
2	14271,5	14057,6	14271,8	14975,6
3	14268,3	13895,7	14271,4	15274,3
4	14268,3	13864,1	14271	15263,2
5	14268,3	13764,9	14270,7	15384,9
6	14268,3	13778,1	14269,8	15494,5
7	14268,3	13665,1	14271,4	15503,5
8	14268,3	13673,3	14271,4	15644
9	14271,4	13668,6	14270,1	15617,6
10	14271,4	13666,7	14270,1	15699,5
11	14271,4	13680,3	14270,1	15806,9
12	14271,4	13658,5	14270,4	15953
13	14271,4	13659	14271,4	16006,2
14	14271,4	13641,6	14271,4	16134,8
15	14271,4	13643,6	14271,1	16099,6
16	14271,4	13628,5	14271,1	16184,3
17	14271,4	13698,4	14271,1	16220,1
18	14271,4	13694,9	14271,1	16221
19	14271,4	13723,1	14271,1	16209,5
20	14271,4	13722,4	14271,1	16232,3
21	14271,4	13721,6	14271,1	16318
22	14271,4	13723,4	14271,1	16348,3
23	14271,4	13723,4	14271,1	16416,5
24	14271,4	13725,2	14271,1	16506
25	14271,4	13726,5	14271,1	16545,2
26	14271,4	13728,5	14271,1	16532,4
27	14271,4	13715,4	14271,1	16581,2
28	14271,4	13740,4	14271,1	16627,7
29	14271,4	13740,5	14271,1	16614,7
30	14271,4	13738	14271,1	16715,7
31	14271,4	13744,1	14271,1	16686,5
32	14271,4	13744,1	14271,1	16692,4
33	14271,4	13852	14271,1	16726,8
34	14271,4	13853,6	14271,1	16687,5
35	14271,4	13853,2	14271,1	16642,2
36	14271,4	13853,2	14271,1	16688,9
37	14271,4	13853,3	14271,1	16680
38	14271,4	13853,1	14271,1	16686,5
39	14271,4	13855,5	14271,1	16733,8
40	14271,4	13858,6	14271,1	16774,8
41	14271,4	13861,9	14271,1	16696,5
42	14271,4	13861,9	14271,1	16760,3
43	14271,4	13840	14271,1	16795,7
44	14271,4	13845	14271,1	16860,4
45	14271,4	13849,4	14271,1	16859,5
46	14271,4	13847,3	14271,1	16839,5
47	14271,4	13848,9	14271,1	16867,7
48	14271,4	13852,2	14271,1	16876,4
49	14271,4	13858,9	14271,1	16875,5
50	14271,4	13858,9	14271,1	16869,5

FIGURA 7.31: Cuadro correspondiente a la métrica de error \mathcal{L}_1 – error de la ejecución de las heurísticas GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 0 a 50 e infinito para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno β*) del terreno CC.

orden max	GreedyMinMax	GreedyMinSum	GreedyMaxMin	GreedyMaxSum
infinito	687,4530	671,0430	687,4230	891,1490
0	687,4530	687,4530	687,4530	687,4530
1	687,4540	681,8900	687,4530	694,4680
2	687,4540	678,4700	687,4990	714,8420
3	687,4530	669,8690	687,4850	731,2800
4	687,4530	668,2240	687,4820	729,3750
5	687,4530	661,9330	687,4640	729,8830
6	687,4530	662,6180	687,5220	736,7210
7	687,4530	656,3020	687,5340	740,3810
8	687,4530	656,9430	687,5340	748,3640
9	687,4530	656,8830	687,4950	743,6050
10	687,4530	657,8040	687,4950	747,8440
11	687,4530	658,6510	687,4950	751,0650
12	687,4530	657,5320	687,4950	757,1720
13	687,4530	657,5610	687,4960	757,9730
14	687,4530	657,1220	687,4960	765,3880
15	687,4530	657,1850	687,4190	764,8740
16	687,4530	657,3580	687,4190	768,2490
17	687,4530	661,0690	687,4190	767,9850
18	687,4530	660,9240	687,4190	769,7490
19	687,4530	662,7410	687,4190	769,5180
20	687,4530	662,6790	687,4190	770,9360
21	687,4530	662,6650	687,4190	774,5050
22	687,4530	662,6970	687,4190	775,3280
23	687,4530	662,6970	687,4190	778,9050
24	687,4530	662,5800	687,4190	783,5210
25	687,4530	662,6290	687,4190	784,6380
26	687,4530	662,7000	687,4190	783,7940
27	687,4530	661,9360	687,4190	784,7160
28	687,4530	662,8130	687,4190	786,6120
29	687,4530	662,8140	687,4190	786,8590
30	687,4530	662,7760	687,4190	791,3260
31	687,4530	662,9190	687,4190	791,9010
32	687,4530	662,9190	687,4190	791,7970
33	687,4530	669,6410	687,4190	794,7110
34	687,4530	669,6850	687,4190	792,2860
35	687,4530	669,6860	687,4190	788,8310
36	687,4530	669,6860	687,4190	791,2790
37	687,4530	669,6900	687,4190	789,7490
38	687,4530	669,6860	687,4190	790,2730
39	687,4530	669,7210	687,4190	791,5880
40	687,4530	669,7670	687,4190	793,3370
41	687,4530	669,8950	687,4190	789,5250
42	687,4530	669,8950	687,4190	793,0530
43	687,4530	669,4450	687,4190	795,0990
44	687,4530	669,4810	687,4190	796,8780
45	687,4530	669,5820	687,4190	796,5940
46	687,4530	669,4270	687,4190	795,8780
47	687,4530	669,4410	687,4190	798,0980
48	687,4530	669,5700	687,4190	798,4700
49	687,4530	669,7950	687,4190	798,0700
50	687,4530	669,7950	687,4190	798,1920

FIGURA 7.32: Cuadro correspondiente a la métrica de error \mathcal{L}_2 – error de la ejecución de las heurísticas GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 0 a 50 e infinito para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) del terreno CC.

Heurística	orden max	orden final	RMSE	MAE	L1	L2
GreedyMinSumABN	infinito	(1604-ODT)	8,5574	6,4771	5462,1500	248,4960
	0	(DT)	8,6354	6,5977	5564,0000	250,7720
	1	(1-ODT)	8,5361	6,5353	5511,3700	247,8870
	2	(2-ODT)	8,4441	6,4535	5442,7800	245,2210
	3	(3-ODT)	8,4883	6,4662	5453,4800	246,5010
	4	(4-ODT)	8,5400	6,4997	5481,6500	248,0000
	5	(5-ODT)	8,5110	6,4704	5457,0600	247,1580
	6	(6-ODT)	8,4962	6,4571	5445,8700	246,7290
	7	(7-ODT)	8,5136	6,4628	5450,5000	247,2310
	8	(8-ODT)	8,5088	6,4576	5446,1500	247,0920
	9	(9-ODT)	8,5171	6,4620	5449,7800	247,3320
	10	(10-ODT)	8,5210	6,4682	5454,9500	247,4430
	11	(11-ODT)	8,5323	6,4739	5459,8700	247,7720
	12	(12-ODT)	8,5345	6,4757	5461,4400	247,8390
	13	(13-ODT)	8,5379	6,4780	5463,2800	247,9370
	14	(14-ODT)	8,5441	6,4790	5464,0000	248,1130
	15	(15-ODT)	8,5533	6,4889	5472,3000	248,3800
	16	(16-ODT)	8,5572	6,4909	5473,9500	248,4920
	17	(17-ODT)	8,5486	6,4794	5464,2600	248,2440
	18	(18-ODT)	8,5478	6,4769	5462,2700	248,2220
	19	(19-ODT)	8,5480	6,4770	5462,3700	248,2280
	20	(20-ODT)	8,5362	6,4688	5455,5200	247,8870
	21	(21-ODT)	8,5421	6,4718	5458,0300	248,0600
	22	(22-ODT)	8,5440	6,4732	5459,2500	248,1150
	23	(23-ODT)	8,5498	6,4756	5461,3300	248,2850
	24	(24-ODT)	8,5510	6,4780	5463,3500	248,3210
	25	(25-ODT)	8,5502	6,4773	5462,7100	248,2990
	26	(26-ODT)	8,5477	6,4763	5461,8700	248,2240
	27	(27-ODT)	8,5494	6,4781	5463,4200	248,2730
	28	(28-ODT)	8,5606	6,4850	5469,1900	248,5970
	29	(29-ODT)	8,5598	6,4842	5468,4900	248,5760
	30	(30-ODT)	8,5598	6,4842	5468,4900	248,5760
	31	(31-ODT)	8,5596	6,4829	5467,3700	248,5700
	32	(32-ODT)	8,5417	6,4710	5457,2500	248,0440
	33	(33-ODT)	8,5379	6,4709	5457,0700	247,9340
	34	(34-ODT)	8,5378	6,4707	5456,9300	247,9310
	35	(35-ODT)	8,5377	6,4705	5456,7200	247,9300
	36	(36-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7500	247,9140
	37	(37-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7400	247,9140
	38	(37-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7400	247,9140
	39	(39-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7400	247,9140
	40	(40-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7400	247,9150
	41	(41-ODT)	8,5372	6,4693	5455,7100	247,9130
	42	(42-ODT)	8,5410	6,4715	5457,6600	248,0230
	43	(43-ODT)	8,5417	6,4718	5457,8900	248,0440
	44	(44-ODT)	8,5416	6,4714	5457,5700	248,0420
	45	(45-ODT)	8,5404	6,4706	5456,9200	248,0080
	46	(46-ODT)	8,5456	6,4720	5458,0600	248,1600
	47	(47-ODT)	8,5546	6,4745	5460,1000	248,4190
	48	(47-ODT)	8,5546	6,4745	5460,1000	248,4190
49	(49-ODT)	8,5550	6,4753	5460,7300	248,4300	
50	(50-ODT)	8,5550	6,4752	5460,6700	248,4290	

FIGURA 7.33: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) del terreno MH.

Heurística	orden max	orden final	RMSE	MAE	L1	L2
GreedyMinSumABN	infinito	(1523-ODT)	8,4608	6,2809	5296,8700	245,7030
	0	(DT)	8,5593	6,4580	5445,0100	248,5320
	1	(1-ODT)	8,4621	6,3756	5375,7800	245,7130
	2	(2-ODT)	8,4575	6,3491	5353,4900	245,5810
	3	(3-ODT)	8,4963	6,3666	5368,4100	246,7110
	4	(4-ODT)	8,4895	6,3559	5359,6000	246,5190
	5	(5-ODT)	8,4774	6,3477	5352,7400	246,1700
	6	(6-ODT)	8,4907	6,3378	5344,6000	246,5620
	7	(7-ODT)	8,4283	6,2895	5304,0200	244,7530
	8	(8-ODT)	8,4114	6,2756	5292,1800	244,2640
	9	(9-ODT)	8,3680	6,2441	5265,6700	243,0060
	10	(10-ODT)	8,3693	6,2507	5271,3400	243,0450
	11	(11-ODT)	8,3812	6,2623	5281,2500	243,3900
	12	(12-ODT)	8,3723	6,2575	5277,2300	243,1330
	13	(13-ODT)	8,3633	6,2469	5268,3500	242,8760
	14	(14-ODT)	8,3645	6,2489	5270,1200	242,9120
	15	(15-ODT)	8,3764	6,2488	5269,9300	243,2550
	16	(16-ODT)	8,3739	6,2483	5269,5300	243,1820
	17	(17-ODT)	8,3812	6,2560	5276,0100	243,3950
	18	(18-ODT)	8,4142	6,2720	5289,4400	244,3520
	19	(19-ODT)	8,4250	6,2771	5293,7500	244,6640
	20	(20-ODT)	8,4306	6,2777	5294,2300	244,8280
	21	(21-ODT)	8,4341	6,2791	5295,3800	244,9300
	22	(22-ODT)	8,4338	6,2789	5295,1900	244,9190
	23	(23-ODT)	8,4322	6,2726	5289,8600	244,8730
	24	(24-ODT)	8,4347	6,2728	5290,0000	244,9440
	25	(25-ODT)	8,4411	6,2770	5293,5500	245,1310
	26	(26-ODT)	8,4424	6,2786	5294,9000	245,1690
	27	(27-ODT)	8,4424	6,2783	5294,6300	245,1670
	28	(28-ODT)	8,4424	6,2783	5294,6600	245,1670
	29	(29-ODT)	8,4494	6,2829	5298,4800	245,3710
	30	(30-ODT)	8,4495	6,2827	5298,3200	245,3720
	31	(31-ODT)	8,4507	6,2833	5298,8200	245,4090
	32	(32-ODT)	8,4525	6,2843	5299,6900	245,4600
	33	(33-ODT)	8,4527	6,2840	5299,4200	245,4660
	34	(34-ODT)	8,4543	6,2854	5300,6100	245,5130
	35	(35-ODT)	8,4546	6,2862	5301,2700	245,5230
	36	(36-ODT)	8,4548	6,2863	5301,3500	245,5270
	37	(37-ODT)	8,4548	6,2863	5301,3500	245,5270
	38	(38-ODT)	8,4548	6,2863	5301,3500	245,5270
	39	(39-ODT)	8,4548	6,2864	5301,4300	245,5270
	40	(39-ODT)	8,4548	6,2864	5301,4300	245,5270
	41	(41-ODT)	8,4547	6,2861	5301,2100	245,5250
	42	(41-ODT)	8,4547	6,2861	5301,2100	245,5250
	43	(43-ODT)	8,4547	6,2861	5301,2400	245,5260
	44	(44-ODT)	8,4548	6,2843	5299,7100	245,5280
	45	(45-ODT)	8,4578	6,2866	5301,6900	245,6160
	46	(46-ODT)	8,4575	6,2855	5300,7000	245,6070
	47	(47-ODT)	8,4575	6,2855	5300,7000	245,6070
	48	(48-ODT)	8,4568	6,2850	5300,3100	245,5850
49	(49-ODT)	8,4552	6,2824	5298,0800	245,5400	
50	(50-ODT)	8,4552	6,2824	5298,0800	245,5400	

FIGURA 7.34: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) del terreno MH.

Heurística	orden max	orden final	RMSE	MAE	L1	L2
GreedyMinSumABN	infinito	(1477-ODT)	8,8859	6,7336	5680,2600	258,0770
	0	(DT)	8,8274	6,7527	5695,9100	256,3700
	1	(1-ODT)	8,8332	6,7278	5674,5200	256,5230
	2	(2-ODT)	8,8714	6,7392	5684,5700	257,6420
	3	(3-ODT)	8,8969	6,7454	5689,7700	258,3840
	4	(4-ODT)	8,8607	6,7162	5665,1000	257,3340
	5	(5-ODT)	8,8395	6,6947	5646,8100	256,7210
	6	(6-ODT)	8,8640	6,7083	5658,2500	257,4300
	7	(7-ODT)	8,8644	6,7025	5653,5500	257,4450
	8	(8-ODT)	8,8581	6,6988	5650,6600	257,2690
	9	(9-ODT)	8,8612	6,6997	5651,3600	257,3570
	10	(10-ODT)	8,8578	6,6973	5649,3500	257,2590
	11	(11-ODT)	8,8585	6,6955	5648,0100	257,2840
	12	(12-ODT)	8,8707	6,7089	5659,3400	257,6360
	13	(13-ODT)	8,8705	6,7177	5666,8300	257,6310
	14	(14-ODT)	8,8720	6,7216	5670,1300	257,6750
	15	(15-ODT)	8,8664	6,7175	5666,7200	257,5130
	16	(16-ODT)	8,8651	6,7135	5663,3000	257,4750
	17	(17-ODT)	8,8601	6,7074	5658,2300	257,3310
	18	(18-ODT)	8,8631	6,7083	5658,9300	257,4180
	19	(19-ODT)	8,8616	6,7071	5657,8800	257,3730
	20	(20-ODT)	8,8761	6,7166	5665,9100	257,7960
	21	(21-ODT)	8,8778	6,7194	5668,2900	257,8460
	22	(22-ODT)	8,8801	6,7201	5668,8500	257,9110
	23	(23-ODT)	8,8830	6,7236	5671,7700	257,9960
	24	(24-ODT)	8,8833	6,7240	5672,0800	258,0030
	25	(25-ODT)	8,8826	6,7235	5671,7100	257,9830
	26	(26-ODT)	8,8836	6,7249	5672,9100	258,0110
	27	(27-ODT)	8,8881	6,7295	5676,7300	258,1410
	28	(28-ODT)	8,8888	6,7305	5677,5900	258,1630
	29	(29-ODT)	8,8826	6,7280	5675,4300	257,9810
	30	(30-ODT)	8,8825	6,7277	5675,2400	257,9790
	31	(31-ODT)	8,8751	6,7188	5667,7000	257,7630
	32	(32-ODT)	8,8744	6,7179	5666,9500	257,7440
	33	(33-ODT)	8,8683	6,7144	5664,0800	257,5680
	34	(34-ODT)	8,8696	6,7169	5666,1800	257,6050
	35	(35-ODT)	8,8740	6,7207	5669,3800	257,7330
	36	(36-ODT)	8,8827	6,7301	5677,2000	257,9850
	37	(37-ODT)	8,8827	6,7300	5677,1900	257,9850
	38	(38-ODT)	8,8832	6,7304	5677,5300	257,9980
	39	(39-ODT)	8,8832	6,7304	5677,5200	257,9980
	40	(39-ODT)	8,8832	6,7304	5677,5200	257,9980
	41	(41-ODT)	8,8816	6,7291	5676,3600	257,9530
	42	(42-ODT)	8,8812	6,7286	5676,0000	257,9420
	43	(43-ODT)	8,8837	6,7313	5678,2600	258,0130
	44	(44-ODT)	8,8832	6,7305	5677,5600	257,9990
	45	(45-ODT)	8,8832	6,7306	5677,6800	258,0010
	46	(45-ODT)	8,8832	6,7306	5677,6800	258,0010
	47	(47-ODT)	8,8832	6,7306	5677,6700	258,0010
	48	(48-ODT)	8,8832	6,7306	5677,6700	258,0010
	49	(49-ODT)	8,8833	6,7306	5677,6900	258,0010
50	(50-ODT)	8,8815	6,7295	5676,7400	257,9510	

FIGURA 7.35: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) del terreno MH.

Se pudieron observar variaciones en el comportamiento de los errores entre los diferentes **criterios**:

- Hubo casos en los que las métricas de error en las aproximaciones obtenidas con el criterio ABN se comportaron similares a las de la aproximación de JND pero diferente a WABN.

Se puede observar un ejemplo de este caso en la [Figura 7.36](#) en donde en todos los casos las aproximaciones obtenidas con ABN y JND mejoran la métrica respecto a la triangulación de *Delaunay* mientras que con WABN en todos los casos (salvo en uno que se iguala) se empeora dicha métrica .

- Hubo otros casos en donde las aproximaciones de ABN se comportaron (en materia de error) similares a WABN y diferente a las obtenidas con JND.

Se puede observar un ejemplo de este caso en la [Figura 7.37](#) en donde en todos los casos las aproximaciones obtenidas con ABN y WABN mejoran la métrica respecto a la triangulación de *Delaunay* mientras que con JND en algunos casos se mejora dicha métrica pero en otros se empeora.

- Hubo casos en donde, en lo que a métricas de error respecta, las aproximaciones de los distintos criterios se comportaron igual.
- Hubo otros en donde todos los criterios presentaron variaciones entre sí.

heurística	orden max	ABN	JND	WABN
GreedyMinMax	infinito	21,8757	21,8721	21,9085
	0	21,9080	21,9080	21,9080
	1	21,8701	21,8768	21,9080
	2	21,8701	21,8899	21,9087
	3	21,8701	21,8701	21,9085
	4	21,8675	21,8936	21,9085
	5	21,8675	21,8936	21,9085
	6	21,8633	21,8936	21,9085
	7	21,8633	21,8707	21,9085
	8	21,8633	21,8707	21,9085
	9	21,8633	21,8707	21,9085
	10	21,8633	21,8707	21,9085
	11	21,8633	21,8707	21,9085
	12	21,8633	21,8707	21,9085
	13	21,8633	21,8707	21,9085
	14	21,8633	21,8707	21,9085
	15	21,8633	21,8707	21,9085
	16	21,8633	21,8707	21,9085
	17	21,8633	21,8707	21,9085
	18	21,8633	21,8707	21,9085
	19	21,8633	21,8707	21,9085
	20	21,8633	21,8707	21,9085
	21	21,8633	21,8707	21,9085
	22	21,8633	21,8707	21,9085
	23	21,8633	21,8707	21,9085
	24	21,8633	21,8707	21,9085
	25	21,8633	21,8707	21,9085
	26	21,8633	21,8707	21,9085
	27	21,8633	21,8707	21,9085
	28	21,8633	21,8707	21,9085
	29	21,8633	21,8707	21,9085
	30	21,8633	21,8707	21,9085
	31	21,8633	21,8707	21,9085
	32	21,8633	21,8707	21,9085
	33	21,8633	21,8707	21,9085
	34	21,8633	21,8707	21,9085
	35	21,8633	21,8707	21,9085
	36	21,8633	21,8707	21,9085
	37	21,8633	21,8707	21,9085
	38	21,8633	21,8707	21,9085
	39	21,8633	21,8707	21,9085
	40	21,8633	21,8707	21,9085
	41	21,8633	21,8707	21,9085
	42	21,8633	21,8707	21,9085
	43	21,8633	21,8707	21,9085
	44	21,8633	21,8707	21,9085
	45	21,8633	21,8707	21,9085
	46	21,8633	21,8707	21,9085
	47	21,8633	21,8707	21,9085
	48	21,8633	21,8707	21,9085
	49	21,8633	21,8707	21,9085
50	21,8633	21,8707	21,9085	

FIGURA 7.36: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax para los criterios ABN, JND y WABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) del terreno KS.

heurística	orden max	ABN	JND	WABN
GreedyMinSum	infinito	21,7325	21,9057	21,7121
	0	21,9080	21,9080	21,9080
	1	21,7865	21,8116	21,8067
	2	21,6638	21,6745	21,6887
	3	21,6074	21,6157	21,6461
	4	21,7016	21,7276	21,6409
	5	21,6539	21,6807	21,7148
	6	21,6103	21,6369	21,7320
	7	21,5457	21,5728	21,6799
	8	21,5674	21,5912	21,6516
	9	21,5783	21,7425	21,6408
	10	21,5774	21,7490	21,6349
	11	21,5821	21,7540	21,6324
	12	21,5939	21,7812	21,6480
	13	21,6008	21,7880	21,6480
	14	21,5918	21,7828	21,6480
	15	21,6324	21,8173	21,6243
	16	21,6619	21,8464	21,6556
	17	21,7287	21,9127	21,6575
	18	21,7491	21,9328	21,6573
	19	21,7519	21,9333	21,6557
	20	21,7644	21,9456	21,6557
	21	21,7131	21,8940	21,6557
	22	21,7131	21,8940	21,6557
	23	21,7139	21,8904	21,6525
	24	21,7140	21,8903	21,6525
	25	21,7352	21,9113	21,6484
	26	21,7374	21,9157	21,6485
	27	21,7333	21,9116	21,6487
	28	21,7163	21,8809	21,6515
	29	21,7170	21,8815	21,6515
	30	21,7163	21,8807	21,6516
	31	21,7165	21,8812	21,6516
	32	21,7177	21,8824	21,6516
	33	21,7178	21,8825	21,6516
	34	21,7180	21,8827	21,6637
	35	21,7181	21,8828	21,6638
	36	21,7180	21,8826	21,6638
	37	21,7682	21,9501	21,6639
	38	21,7676	21,9495	21,6639
	39	21,7679	21,9498	21,6639
	40	21,7679	21,9498	21,6639
	41	21,7683	21,9503	21,6643
	42	21,7646	21,9466	21,6643
	43	21,7647	21,9398	21,6643
	44	21,7714	21,9464	21,6735
	45	21,7714	21,9464	21,6735
	46	21,7847	21,9546	21,6735
	47	21,7911	21,9610	21,6804
	48	21,7911	21,9609	21,6804
	49	21,7911	21,9609	21,6804
50	21,7912	21,9611	21,6804	

FIGURA 7.37: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSum para los criterios ABN, JND y WABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) del terreno KS.

Si se observan los cuadros de las imágenes que se muestran en la [Sección 3 del Apéndice C](#) se pueden destacar los siguientes eventos:

- **GreedyMinMax:** se pudo observar que, para esta heurística, en la mayoría de los casos las aproximaciones obtenidas con el criterio ABN y JND se comportaron similares, por lo general mejorando o igualando la métrica de error, y WABN distinto a ellos.

Se puede ver en la [Figura 7.38](#) un ejemplo típico del caso citado. Se puede observar allí que en el muestreo de nombre *terreno1* WABN mejora la métrica de error, mientras que las aproximaciones obtenidas con ABN y JND en la mayoría de los casos la empeoran. En los muestreos *terreno2* y *terreno3* ocurre al revés, ABN y JND mejoran la métrica mientras que WABN la empeora.

BH - 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	5	46	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	28	23	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	50	1	0
GreedyMinMaxWABN	0	49	2

FIGURA 7.38: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

No obstante, si bien el comportamiento detectado ocurrió en la mayoría de los casos, hubo instancias en donde no ocurrió. Se puede observar en la [Figura 7.39](#) que en el muestreo de 2500 puntos del terreno CC de nombre *terreno2* los tres criterios se comportaron similar aunque WABN mejoró en menos casos la métrica que ABN y JND. En esta misma imagen se puede observar un caso en donde tanto ABN como JND igualaron mayoritariamente la métrica mientras que WABN la mejoró en todos los casos.

CC – 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	50	1	0
GreedyMinMaxJND	46	5	0
GreedyMinMaxWABN	36	15	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	6	0	45
GreedyMinMaxWABN	51	0	0

FIGURA 7.39: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

En la [Figura 7.40](#) se puede observar un caso (muestreo de nombre *terreno1*) en donde ABN y JND mejoraron en su mayoría la métrica pero WABN la igualó.

MH – 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	48	2	1
GreedyMinMaxJND	49	1	1
GreedyMinMaxWABN	2	0	49

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	49	0	2
GreedyMinMaxWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	49	2	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0

FIGURA 7.40: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

En la [Figura 7.41](#) se puede observar un caso (muestreo de nombre *terreno3*) en donde ABN y JND igualaron en su mayoría la métrica pero WABN la empeoró. Se observa también que en el caso del muestreo de nombre *terreno1* ABN se comportó similar a WABN mejorando en la mayoría de los casos la métrica mientras que JND la empeoró.

KS – 5000			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	6	44	1
GreedyMinMaxWABN	48	0	3

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	2	49	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	0	46	5

FIGURA 7.41: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Cabe destacar que se seleccionó, sin pérdida de generalidad, RMSE como métrica de error en los casos antes mencionados. Así mismo se destaca que, los colores que se utilizaron para resaltar las celdas tienen como objetivo distinguir los comportamientos entre los distintos criterios. Se resaltaron las celdas que dentro de la fila poseen el máximo valor con *verde* si mejoraba la métrica de la triangulación de *Delaunay*, *naranja* si la empeora y *gris* si la iguala.

- **GreedyMinSum:** se pudo observar que, en la gran mayoría de los casos, con los tres criterios se obtuvieron aproximaciones con un mismo comportamiento observado en lo que respecta a métricas de error. Más aún en casi todos los casos se mejoró la métrica respecto de la triangulación de *Delaunay*. Se pudieron observar muy pocos casos en donde el comportamiento no coincide con el citado. En particular, ocurrió para las métricas RMSE y \mathcal{L}_2 en donde se observan casos donde WABN empeoró la métrica mayoritariamente mientras que JND y ABN la mejoraron (se puede ver en la [Figura 7.42](#) que esto ocurre en los muestreos de nombre

terreno1 y *terreno2*). Hubo otros casos en donde los tres criterios empeoraron la métrica (se puede observar un ejemplo en la misma figura de antes pero con el muestreo de nombre *terreno3*).

MH – 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	6	45	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	2	49	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinSumABN	0	51	0
GreedyMinSumJND	0	51	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0

FIGURA 7.42: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

- GreedyMaxMin:** en el caso de esta heurística se vio como tendencia que o bien en los tres criterios se empeoraba mayoritariamente la métrica o bien ABN y JND se comportaban similar y distinto a WABN (comportamiento similar al de la heurística GreedyMinMax).

Se puede observar un ejemplo de esto en la imagen de la [Figura 7.43](#). Adicionalmente, en esta imagen se puede ver que la cantidad de casos en los que se mejora, empeora o iguala la métrica se encuentra más distribuido que en las otras heurísticas. Se puede ver por ejemplo que, en el muestreo de nombre *terreno3*, tanto con las aproximaciones obtenidas con ABN como con JND si bien se mejoró la heurística en 27 casos se empeoró en 22.

BH - 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	45	2	4
GreedyMaxMinJND	45	2	4
GreedyMaxMinWABN	9	38	4

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	13	38	0
GreedyMaxMinJND	13	38	0
GreedyMaxMinWABN	13	38	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	27	22	2
GreedyMaxMinJND	27	22	2
GreedyMaxMinWABN	11	39	1

FIGURA 7.43: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Más allá de la tendencia antes mencionada, se encontraron casos en donde el comportamiento observado fue diferente.

Se encontraron casos en donde, por ejemplo, JND y WABN se comportaron similar y ABN distinto. Se puede observar en el muestreo de nombre *terreno1* de la [Figura 7.44](#) que mientras los dos primeros criterios mayoritariamente empeoraron la métrica ABN la mejoró. Se puede observar también que los casos se encuentran distribuidos ya que hubo 28 casos en que ABN mejoró la métrica y 18 en los que se empeoró.

Hubo otros casos en donde los tres criterios mejoraron mayoritariamente la métrica. Se puede ver un ejemplo de esto en el muestreo de nombre *terreno3* de la [Figura 7.45](#).

Hubo casos en donde los tres criterios mayoritariamente igualaron la métrica. Se puede ver un ejemplo de esto en el muestreo de nombre *terreno2* de la [Figura 7.46](#). Se puede observar nuevamente que los números se encuentran más balanceados que en las otras heurísticas. Para el muestreo de nombre *terreno1* de este ejemplo se ve que si bien mayoritariamente se empeoró la métrica hubo muchos casos en donde se la igualó y en el caso del *terreno3* si bien mayoritariamente se la mejoró hubo muchos casos donde se la empeoró también.

KS - 2500			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	28	18	5
GreedyMaxMinJND	6	40	5
GreedyMaxMinWABN	0	46	5

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	0	43	8
GreedyMaxMinJND	0	43	8
GreedyMaxMinWABN	0	47	4

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	15	36	0
GreedyMaxMinJND	16	35	0
GreedyMaxMinWABN	9	42	0

FIGURA 7.44: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

BH – 5000			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	45	5	1
GreedyMaxMinJND	45	5	1
GreedyMaxMinWABN	45	5	1

FIGURA 7.45: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

CC – 5000			
Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	15	19	17
GreedyMaxMinJND	0	26	25
GreedyMaxMinWABN	0	39	12

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	0	1	50
GreedyMaxMinJND	0	1	50
GreedyMaxMinWABN	0	1	50

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMaxMinABN	26	23	2
GreedyMaxMinJND	26	23	2
GreedyMaxMinWABN	36	12	3

FIGURA 7.46: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

- **GreedyMaxSum:** en todos los casos se observó que para esta heurística todos los criterios empeoraron mayoritariamente las métricas de error respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Así mismo, se pudo observar que el comportamiento de las métricas de error se encuentra asociado al **terreno**.

heurística	orden max	BH	CC	MH	KS
GreedyMinMaxABN	infinito	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	0	10,7314	17,4548	7,0116	16,4048
	1	10,7276	17,4548	7,0110	16,4048
	2	10,7276	17,4532	7,0110	16,4048
	3	10,7271	17,4532	7,0110	16,4048
	4	10,7271	17,4708	7,0110	16,4048
	5	10,7271	17,4708	7,0110	16,4048
	6	10,7271	17,4708	7,0110	16,4048
	7	10,7271	17,4708	7,0110	16,4048
	8	10,7271	17,4708	7,0110	16,4048
	9	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	10	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	11	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	12	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	13	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	14	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	15	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	16	10,7271	17,4595	7,0110	16,4048
	17	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	18	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	19	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	20	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	21	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	22	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	23	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	24	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	25	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	26	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	27	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	28	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	29	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	30	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	31	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	32	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	33	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	34	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	35	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	36	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	37	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	38	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	39	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	40	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	41	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	42	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	43	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	44	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	45	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	46	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	47	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	48	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
	49	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048
50	10,7280	17,4595	7,0110	16,4048	

FIGURA 7.47: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre 1 muestreo aleatorio de 5000 puntos para los terrenos BH, CC, MH y KS.

Se pudieron observar variaciones en una métrica de error para aproximaciones obtenidas tras la ejecución de una misma heurística y un mismo criterio entre los diferentes terrenos con muestras de un mismo tamaño. Se puede ver en la imagen de la [Figura 7.47](#) que sobre muestras aleatoria de 5000 puntos y ejecutándose en todos los casos la heurística GreedyMinMaxABN, cada aproximación mostró comportamientos diferentes según el terreno:

- Para el muestreo del terreno BH (*terreno2*) se puede observar que todas las aproximaciones obtenidas **mejoran** la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.
- Para el muestreo del terreno CC (*terreno3*) se puede observar que algunas aproximaciones obtenidas **mejoran** la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*, otras la **igualan** y mayoritariamente se la **empeora**.
- El muestreo del terreno MH (*terreno2*) se comporta similar a BH.
- Para el muestreo del terreno KS (*terreno3*) se puede observar que todas las aproximaciones obtenidas **igualan** la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

En función de todo lo mencionado anteriormente se puede ver que el comportamiento de las métricas de error depende de muchos factores: de la heurística, de la muestra, del criterio y del terreno. No obstante, si bien se detectaron ciertas variaciones en el comportamiento existen ciertos hechos generalizables dentro de los casos observados.

Para una misma métrica de error, una misma heurística, un mismo criterio y una muestra aleatoria de un mismo tamaño se puede ver que las magnitudes de la métrica de error mantienen un orden según el terreno.

En algunos casos se observó que $MH < BH < KS < CC$. Se puede observar en las imágenes de las [Figuras 7.48](#) a [7.51](#) que la línea de color *amarillo* (que representa las aproximaciones del terreno MH) se encuentra en todos los casos por debajo de la línea *azul* (BH) y que esta última a su vez se encuentra siempre por debajo de la línea *verde* (KS) que está debajo de la línea *naranja* (CC).

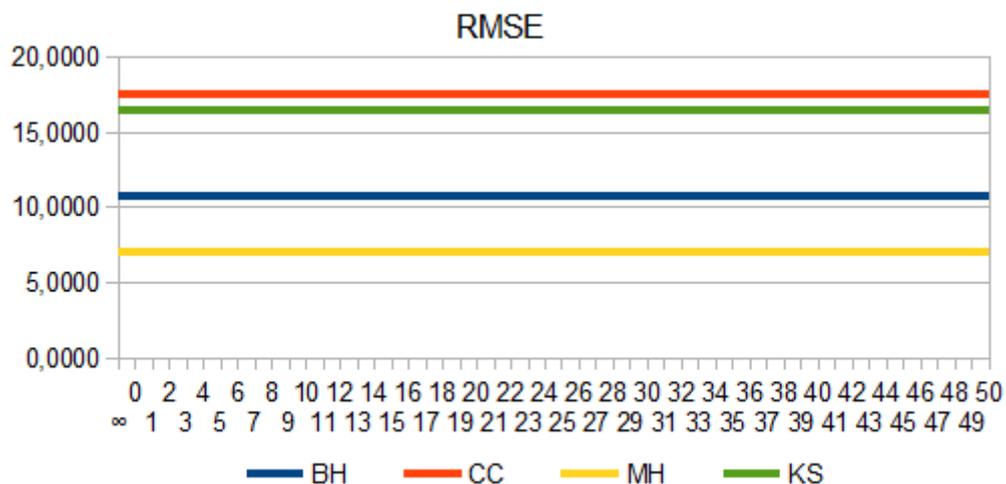


FIGURA 7.48: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre 1 muestreo aleatorio de 5000 puntos para los terrenos BH, CC, MH y KS. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error para cada terreno.

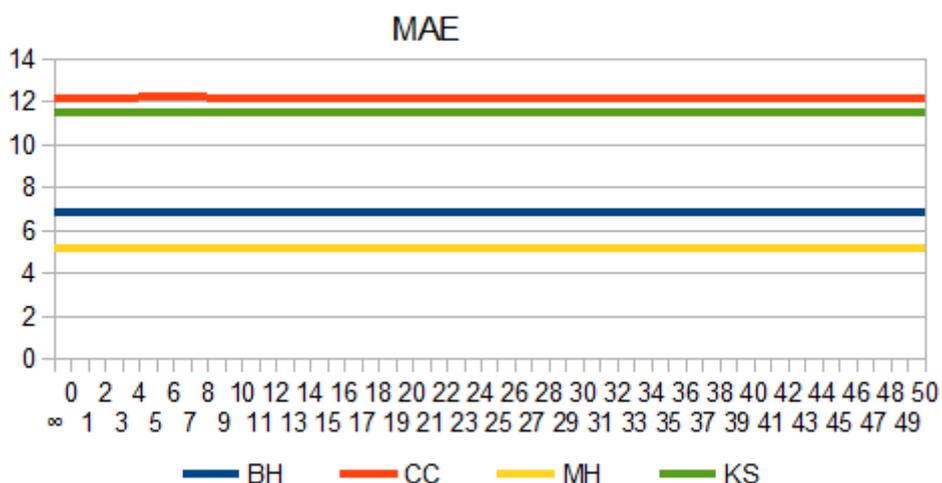


FIGURA 7.49: Cuadro correspondiente a la métrica de error MAE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre 1 muestreo aleatorio de 5000 puntos para los terrenos BH, CC, MH y KS. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error para cada terreno.

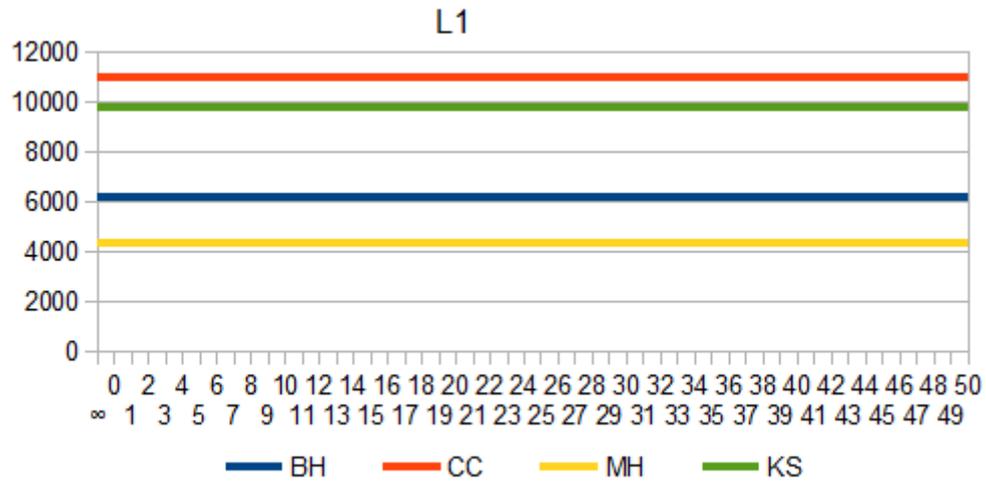


FIGURA 7.50: Cuadro correspondiente a la métrica de error \mathcal{L}_1 de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre 1 muestreo aleatorio de 5000 puntos para los terrenos BH, CC, MH y KS. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error para cada terreno.

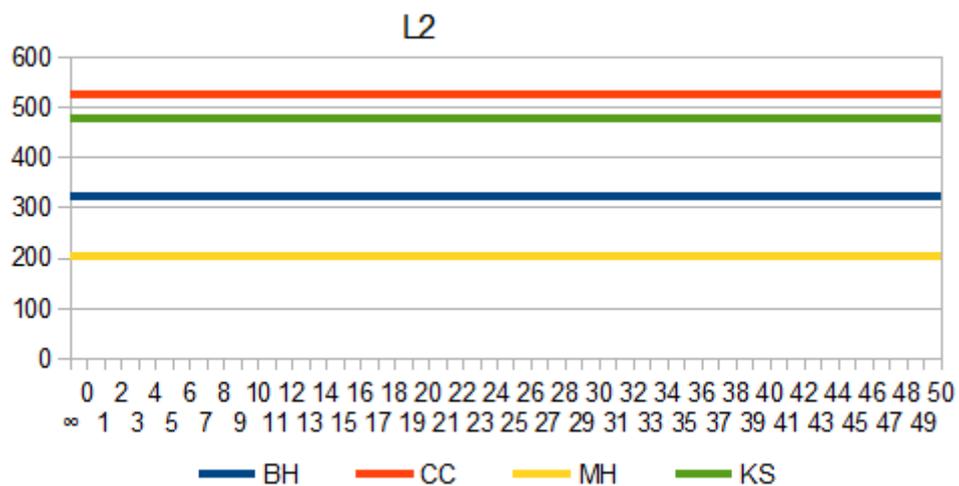


FIGURA 7.51: Cuadro correspondiente a la métrica de error \mathcal{L}_2 de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre 1 muestreo aleatorio de 5000 puntos para los terrenos BH, CC, MH y KS. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error para cada terreno.

En otros se pudo observar que $CC < KS$, como se ve en la [Figura 7.61](#) para los muestreos de tamaño 2500. Incluso en una misma instancia se pueden alternar, como en la [Figura 7.62](#) para los muestreos de 2500 puntos. A veces CC y KS coinciden mucho entre sí, como en la [Figura 7.61](#), en dónde las líneas de ambos casi ni se distinguen en las aproximaciones de las muestras de 5000 puntos. Pero, más allá de estas variantes, se pudo observar que para todos los casos siempre $MH < BH < (CC \text{ y } KS)$.

Se pudo observar en forma general que, para un mismo terreno, una misma muestra, un mismo criterio y una misma heurística, las magnitudes de los errores mantuvieron siempre el siguiente orden: $MAE < RMSE < \mathcal{L}_2 < \mathcal{L}_1$. Se tomó como ejemplo, sin pérdida de generalidad, la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN y sobre el muestreo aleatorio de nombre *terreno1* de 2500 puntos de MH. Los datos completos de esta instancia se pueden ver en la imagen de la [Figura 7.33](#).

Se puede ver en imagen de la [Figura 7.53](#) que $MAE < RMSE$ ya que la línea roja que representa la primer métrica se encuentra siempre por debajo de la azul (que representa la segunda). Lo mismo se observa en la imagen de la [Figura 7.54](#), en donde se puede ver que $\mathcal{L}_2 < \mathcal{L}_1$.

Más aún, se observan en esta instancia los siguientes promedios y desvíos estándar:

	RMSE	MAE	L1	L2
promedio	8,5402	6,4773	5462,5883	248,0033
desvío estándar	0,0244	0,0207	17,4116	0,7090

FIGURA 7.52: Cuadro correspondiente al promedio y desvío estándar de todas las métricas de error de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de MH.

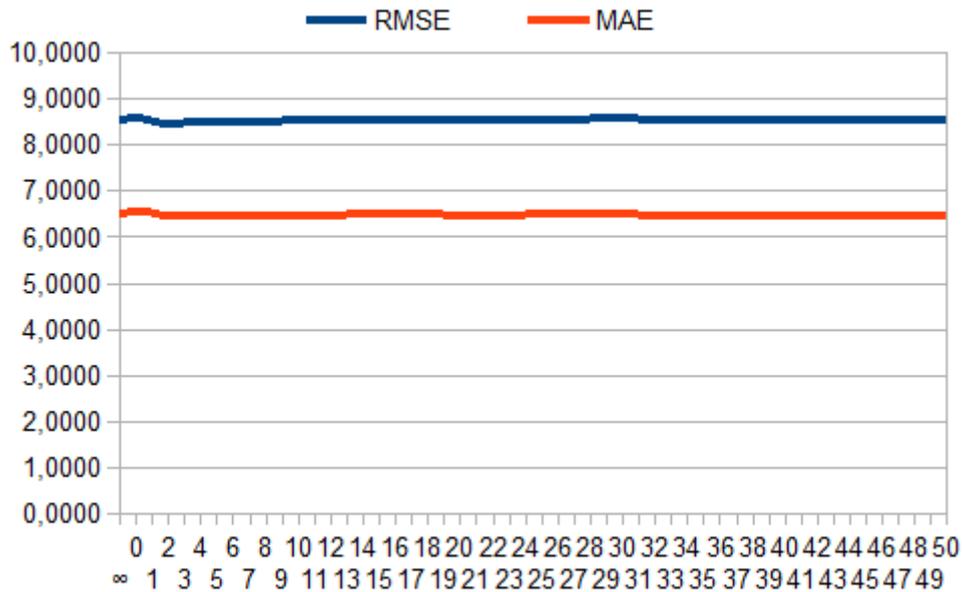


FIGURA 7.53: Cuadro correspondiente a las métricas de error RMSE y MAE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y las magnitudes de las métricas de error observadas para cada terreno.

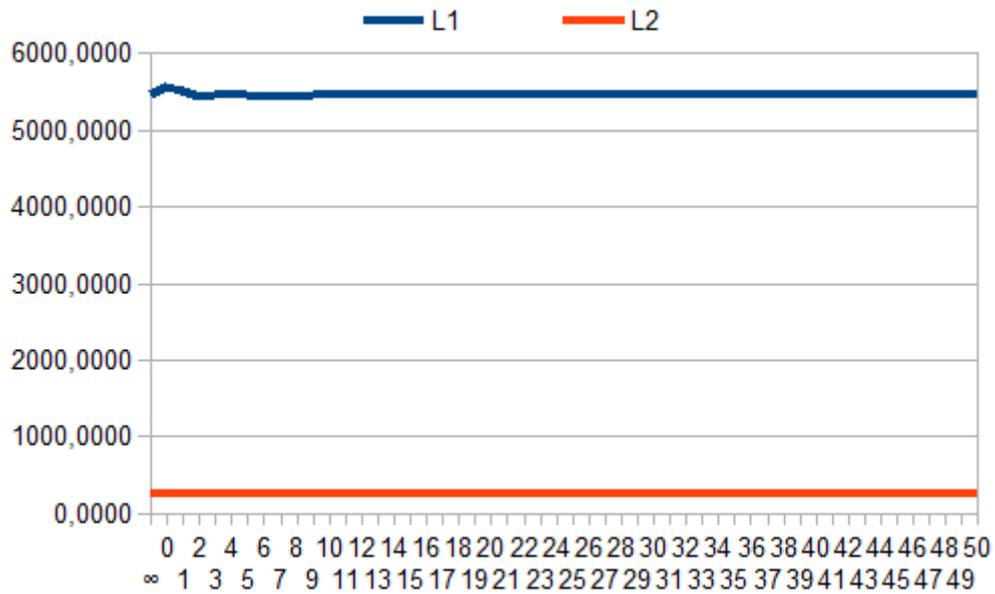


FIGURA 7.54: Cuadro correspondiente a las métricas de error \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y las magnitudes de las métricas de error observadas para cada terreno.

Si se observan los cuadros de la [Sección 3 del Apéndice C](#) se puede ver que, en todos los casos, el comportamiento de RMSE es muy similar a \mathcal{L}_2 y que MAE es muy similar a \mathcal{L}_1 . Estos pares de métricas varían la magnitud pero no el comportamiento.

Si se observa el caso de la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre el muestreo aleatorio de nombre *terreno2* de 2500 puntos de MH (datos presentes en la [Figura 7.34](#)) se puede ver que RMSE y \mathcal{L}_2 presentan un comportamiento muy similar. Si se observan las imágenes de las [Figuras 7.55](#) y [7.56](#) se pueden ver que las curvas de estas métricas en función del orden máximo de la triangulación son casi idénticas. Lo mismo ocurre con MAE y \mathcal{L}_1 en las [Figuras 7.57](#) y [7.58](#).

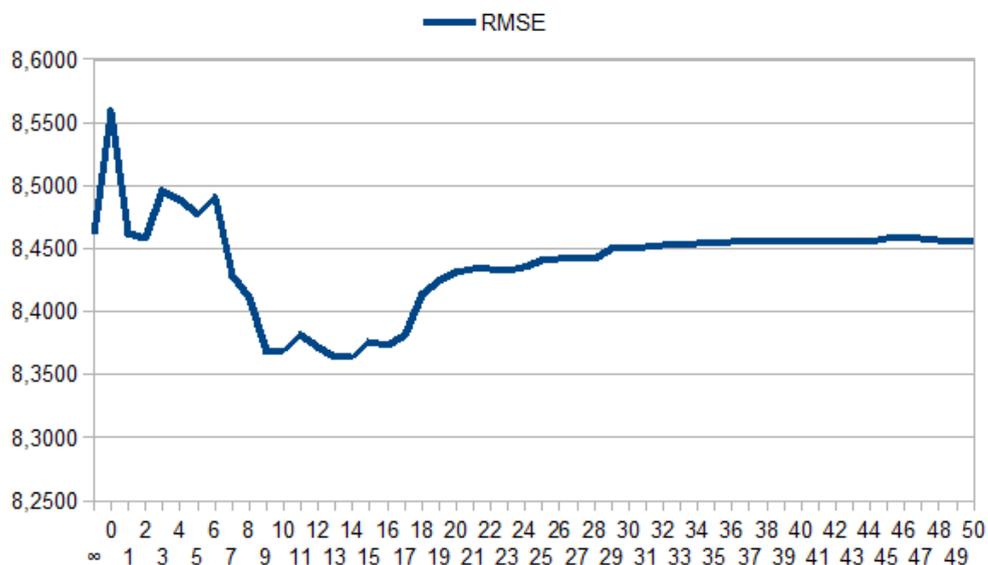


FIGURA 7.55: Cuadro correspondiente a las métricas de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada terreno.

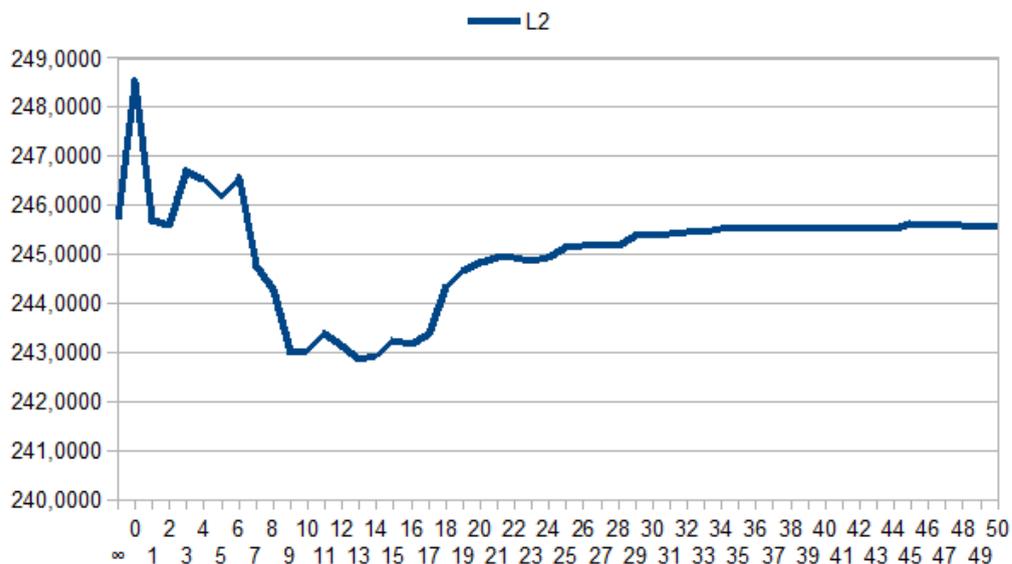


FIGURA 7.56: Cuadro correspondiente a las métricas de error \mathcal{L}_2 de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada terreno.

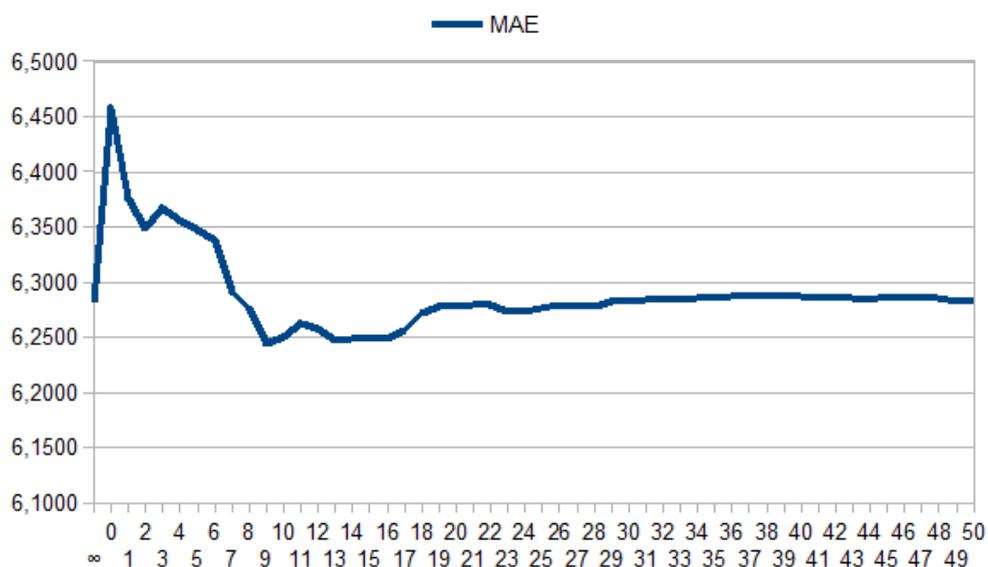


FIGURA 7.57: Cuadro correspondiente a las métricas de error MAE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada terreno.

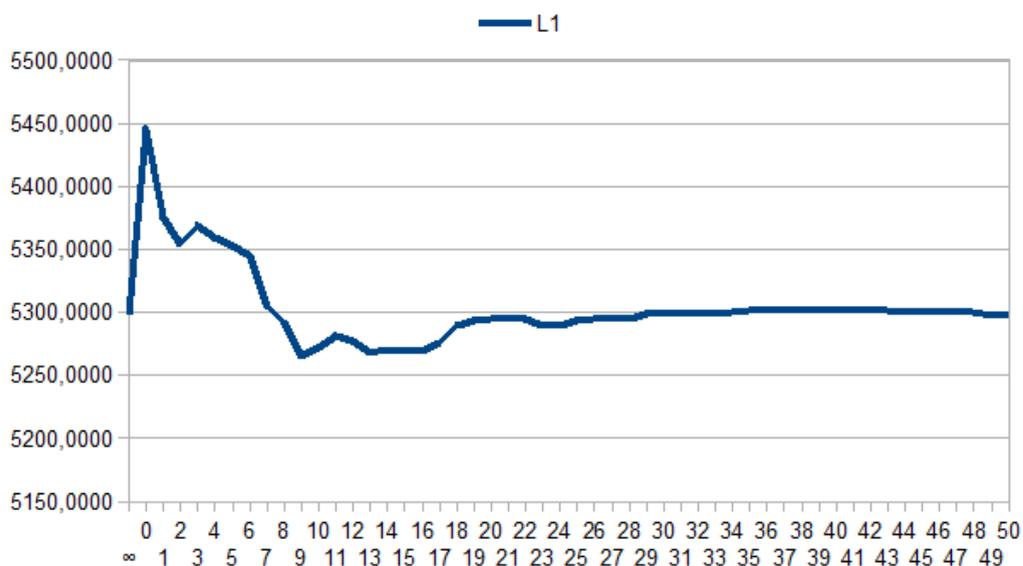


FIGURA 7.58: Cuadro correspondiente a las métricas de error \mathcal{L}_1 de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinSumABN sobre 1 muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de MH. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada terreno.

Cabe destacar que, los dos comportamientos antes mencionados son consistentes con la fórmula indicada de cada métrica de error. En conclusión, y dado que los comportamientos son similares entre los pares de métricas antes mencionado, se puede determinar que basta con utilizar las métricas RMSE y MAE para realizar análisis de datos. Es por esto que, en este informe, utilizamos para el resto de las secciones de análisis y resultados estas dos métricas únicamente.

En función del análisis realizado basado en los porcentajes que se presentan en los cuadros de la [Sección 3](#) del [Apéndice C](#), se pudieron observar los siguientes eventos:

- **ABN**

- *GreedyMinMax*: en todos los casos salvo en 1 se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó. La excepción a esta regla fue el caso del *terreno CC para las muestras de 5000 puntos* en donde, tanto para MAE como para RMSE, se empeoró la métrica en el 91,50 % de los casos.
- *GreedyMinSum*: en todos los casos se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó.
- *GreedyMaxMin*: en todos los casos salvo en 2 se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **empeoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la mejoró o igualó. Las excepciones a esta regla fueron: el caso del *terreno CC para las muestras de 5000 puntos* en donde se igualó la métrica RMSE en un 45,10 % de los casos y el caso del *terreno BH para las muestras de 2500 puntos* en donde se mejoró la métrica de error RMSE en un 55,56 % de los casos y MAE en un 56,86 %.

- **JND**

- *GreedyMinMax*: en la mayoría de los casos se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó. Las excepciones a esta regla fueron: el caso del *terreno KS para las muestras de 2500 puntos* en donde se empeoró la métrica RMSE en un 63,40 % de los casos, el caso del *terreno CC para las muestras de 5000 puntos* en donde ambas métricas se empeoraron en un 96,73 % de los casos

y el caso del *terreno KS para las muestras de 5000 puntos* en donde MAE igualó la métrica en un 33,99 % de los casos.

- *GreedyMinSum*: en todos los casos se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó.
- *GreedyMaxMin*: en todos los casos salvo en 2 se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **empeoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la mejoró o igualó. Las excepciones a esta regla fueron: el caso del *terreno CC para las muestras de 5000 puntos* en donde se igualó la métrica RMSE en un 50,33 % de los casos y el caso del *terreno BH para las muestras de 2500 puntos* en donde se mejoró la métrica de error RMSE en un 55,56 % de los casos y MAE en un 56,86 %.

■ WABN

- *GreedyMinMax*: en 6 de 8 casos se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó. En el resto de los casos se empeoraron dichas métricas.
- *GreedyMinSum*: en todos los casos se observó que para **MAE** el porcentaje de veces que se **mejoró** la métrica respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó. En el caso de la métrica **RMSE** hubo 3 casos de 8 en los que se la empeoró.
- *GreedyMaxMin*: en todos los casos salvo en 2 se observó que para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **empeoró** respecto de la triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la mejoró o igualó. Las excepciones a esta regla fueron: el caso del *terreno MH para las muestras de 5000 puntos* en donde se mejoró la métrica RMSE en un 56,21 % de los casos y MAE en un 64,05 % y el caso del *terreno CC para las muestras de 5000 puntos* en donde se igualó la métrica de error RMSE en un 42,48 % de los casos.

- En **todos** los criterios las aproximaciones obtenidas tras ejecutar la heurística *GreedyMaxSum* empeoraron ambas métricas de error en el 100 % de los casos.

Se pudo observar que la magnitud de las métricas de error dependen del tamaño de la muestra. Como se puede observar en las siguientes imágenes, para un mismo terreno,

una misma heurística, un mismo criterio y una misma métrica, siempre las magnitudes de los errores de las aproximaciones obtenidas para muestras de tamaño 2500 puntos son mayores que las observadas en muestras de 5000 puntos. Es decir que las magnitudes de los errores disminuyen a medida que se aumenta la cantidad de puntos utilizadas para el cálculo de la triangulación.

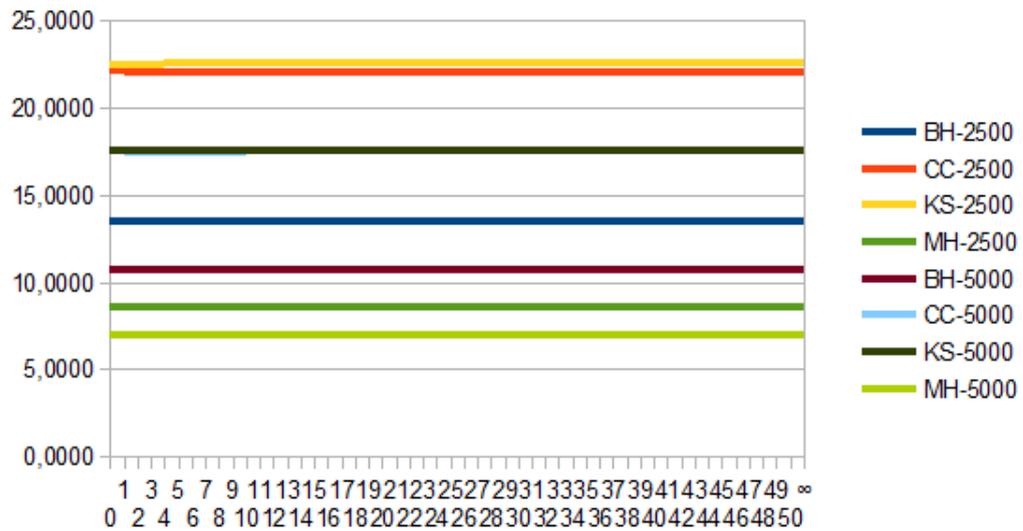


FIGURA 7.59: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre muestreos aleatorios de 2500 puntos y de 5000 puntos de todos los terrenos. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada instancia.

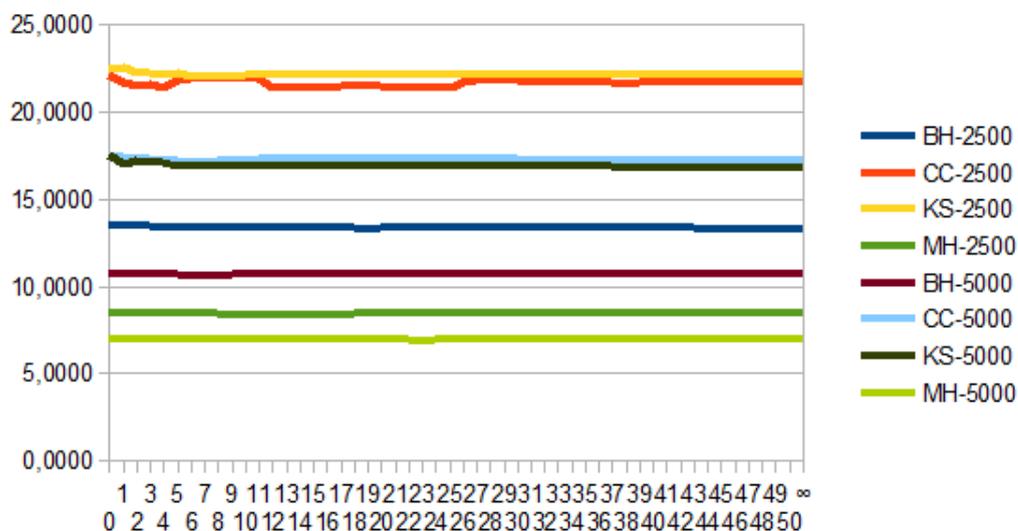


FIGURA 7.60: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMaxABN sobre muestreos aleatorios de 2500 puntos y de 5000 puntos de todos los terrenos. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada instancia.

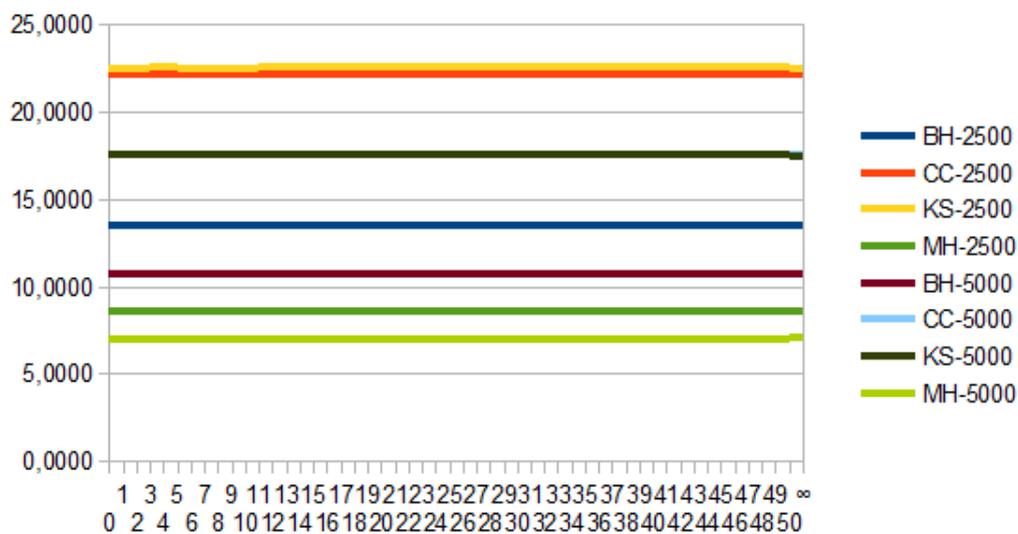


FIGURA 7.61: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre muestreos aleatorios de 2500 puntos y de 5000 puntos de todos los terrenos. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada instancia.

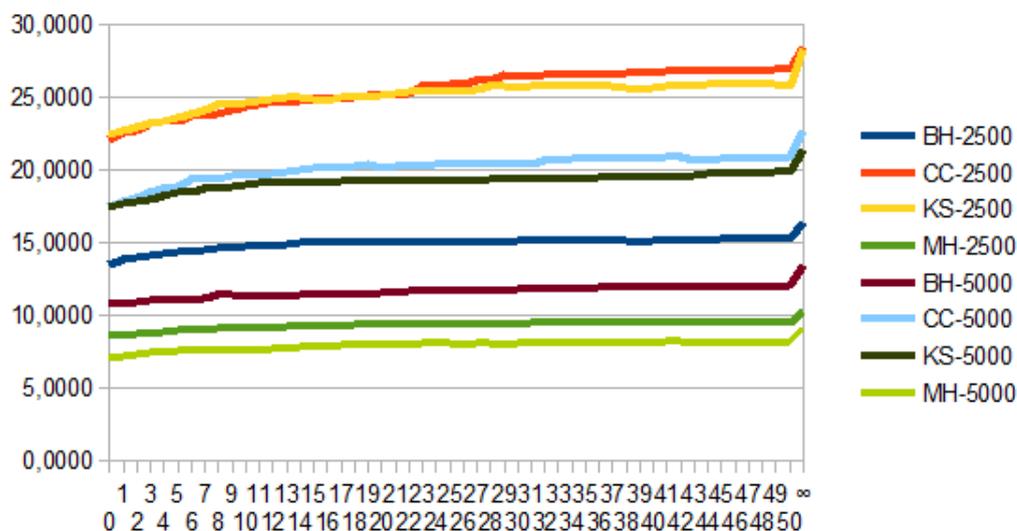


FIGURA 7.62: Cuadro correspondiente a la métrica de error RMSE de las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMaxSumABN sobre muestreos aleatorios de 2500 puntos y de 5000 puntos de todos los terrenos. En el eje x se observa el orden máximo de la aproximación obtenida y en el eje y la magnitud de la métrica de error observada para cada instancia.

De lo anterior se puede deducir que:

- El comportamiento de las métricas de error dependen de la **heurística** y de la **muestra**, esto es:
 - Para un mismo terreno, una misma muestra y un mismo criterio una métrica de error puede comportarse de manera diferente en función de la heurística ejecutada.
 - Para un mismo terreno, una misma heurística y un mismo criterio, dependiendo del muestreo aleatorio seleccionado, las métricas de error pueden comportarse en forma completamente diferente.
- Se pudieron observar variaciones en el comportamiento de los errores entre los diferentes **criterios**, observándose los siguientes eventos:
 - **GreedyMinMax**: se pudo observar que, para esta heurística, en la mayoría de los casos las aproximaciones obtenidas con el criterio ABN y JND se comportaron similares, por lo general mejorando o igualando la métrica de error, y WABN distinto a ellos. No obstante, si bien el comportamiento detectado ocurrió en la mayoría de los casos, hubo instancias en donde no ocurrió.

- **GreedyMinSum**: se pudo observar que, en la gran mayoría de los casos, con los tres criterios se obtuvieron aproximaciones con un mismo comportamiento observado en lo que respecta a métricas de error. Más aún en casi todos los casos se mejoró la métrica respecto de la triangulación de *Delaunay*.
 - **GreedyMaxMin**: en el caso de esta heurística se vio como tendencia que o bien en los tres criterios se empeoraba mayoritariamente la métrica o bien ABN y JND se comportaban similar y distinto a WABN (comportamiento similar al de la heurística GreedyMinMax). Más allá de la tendencia antes mencionada, se encontraron casos en donde el comportamiento observado fue diferente.
 - **GreedyMaxSum**: en todos los casos se observó que para esta heurística todos los criterios empeoraron mayoritariamente las métricas de error respecto de la triangulación de *Delaunay*.
- Así mismo, se pudo observar que el comportamiento de las métricas de error se encuentra asociado al **terreno**. Se pudieron observar variaciones en el comportamiento de una métrica de error para aproximaciones obtenidas tras la ejecución de una misma heurística y un mismo criterio entre los diferentes terrenos con muestras de un mismo tamaño.
 - Para una misma métrica de error, una misma heurística, un mismo criterio y una muestra aleatoria de un mismo tamaño se puede ver que las magnitudes de la métrica de error mantienen el siguiente orden según el terreno: **MH** < **BH** < (**KS** y **CC**).
 - Se pudo observar en forma general que, para un mismo terreno, una misma muestra, un mismo criterio y una misma heurística, las magnitudes de los errores mantuvieron siempre el siguiente orden: **MAE** < **RMSE** < \mathcal{L}_2 < \mathcal{L}_1 .
 - El comportamiento de RMSE es muy similar a \mathcal{L}_2 y que MAE es muy similar a \mathcal{L}_1 , es por esto que basta con utilizar RMSE y MAE como métricas para realizar el análisis de resultados.
 - Para todos los criterios se observó que la heurística **GreedyMinMax** en la mayoría de los casos **mejoró** ambas métricas de error (RMSE y MAE) respecto de la triangulación de *Delaunay* más de lo que la empeoró o igualó. Esta cantidad de casos fue menor en WABN que en ABN y JND.
 - Tanto para ABN como para JND en las aproximaciones obtenidas con la heurística **GreedyMinSum** se observó que en todos los casos y para ambas métricas de error (**RMSE** y **MAE**) el porcentaje de veces que se la **mejoró** respecto de la

triangulación de *Delaunay* fue mayor que el de las veces que se la empeoró o igualó. Para WABN ocurrió lo mismo en MAE pero para RMSE hubo 3 de 8 casos que se empeoró dicha métrica.

- Para todos los criterios se observó que la heurística **GreedyMaxMin** en la mayoría de los casos **empeoró** ambas métricas de error (RMSE y MAE) respecto de la triangulación de *Delaunay* más de lo que la mejoró o igualó.
- Para todos los criterios las aproximaciones obtenidas tras ejecutar la heurística **GreedyMaxSum** empeoraron ambas métricas de error en el 100 % de los casos.
- Para un mismo terreno, una misma heurística, un mismo criterio y una misma métrica siempre las magnitudes de los errores de las aproximaciones obtenidas para muestras de tamaño 2500 puntos son mayores que las observadas en muestras de 5000 puntos.

7.2.4. Valores obtenidos

En esta sección se presenta un análisis comparativo entre los valores máximos y mínimos de los distintos criterios medidos en las aproximaciones obtenidas en cada una de las distintas instancias de prueba antes definida.

En particular, resulta de interés el análisis del *maxValue* del criterio en las heurísticas del tipo GreedyMinMax y GreedyMinSum y del *minValue* del criterio en las heurísticas del tipo GreedyMaxMin y GreedyMaxSum. Es por esto que el análisis presentado en esta sección se divide en dos: una subsección para [maxValue](#) y otra para [minValue](#).

Cabe destacar que no se presenta aquí un análisis de los valores medidos en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución del algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 ya que se realizó un análisis completo del mismo en la [Sección 7.2.2](#).

Análisis del valor máximo (*maxValue*)

Se presenta aquí un análisis comparativo entre los valores máximos de los distintos criterios medidos en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum para orden máximo 1 a 50 e infinito.

GreedyMinMax

Se pudo observar que la magnitud y comportamiento del porcentaje de mejora del *maxValue*, para las aproximaciones obtenidas tras ejecutar esta heurística, para un mismo terreno y un mismo criterio varía dependiendo de la muestra aleatoria sobre la que se ejecutó la heurística.

Se puede ver por ejemplo que para el terreno BH y el criterio ABN, para muestras de un mismo tamaño (en este caso 2500 puntos), el porcentaje de mejora varió considerablemente entre una muestra y otra:

- Para la muestra aleatoria de nombre *terreno1* se observa una mejora del 4,86 % hasta el orden máximo 32 y luego de ese orden se mejora en un 16,29 %, porcentaje correspondiente a la mejora máxima obtenida en todas las ejecuciones realizadas. Ver [Figura 7.63](#).
- Para la muestra aleatoria de nombre *terreno2*, en cambio, el porcentaje de mejora fue mucho más alto y se alcanzó en los primeros órdenes. Se puede ver que para orden máximo 1 y 2 la mejora fue del 25,18 %, para orden máximo 3 la mejora fue de 39,08 %, para orden máximo 4 la mejora fue de 44,22 % y en el orden máximo

16 se alcanza el máximo porcentaje de mejora alcanzada siendo éste de un 44,92%. Ver [Figura 7.64](#).

- Para la muestra aleatoria de nombre *terreno3* el porcentaje de mejora en magnitud se asemeja más al obtenido en el *terreno1*, pero el comportamiento fue similar al observado en el *terreno2* ya que se se alcanzó el máximo porcentaje de mejora (9,60%) en el orden máximo 5. Ver [Figura 7.65](#).

Si bien en la mayoría de los casos se observó una tendencia creciente del porcentaje de mejora en función del orden máximo y final de ejecución, hubo casos en donde se incrementó el orden de la triangulación pero el porcentaje de mejora disminuyó.

Si se observa la imagen de la [Figura 7.66](#) correspondiente a la ejecución del algoritmo GreedyMinMaxABN sobre una muestra aleatoria de 5000 puntos del terreno KS se puede ver que, si bien en el orden máximo 2 se alcanza el máximo de mejora obtenido (9,02%), a partir del orden máximo 8 en adelante se realizaron *flips* pero el porcentaje de mejora obtenido fue menor (2,51%).

Hubo casos en los que para un mismo terreno y un mismo criterio al aumentar el tamaño de la muestra se aumentó el porcentaje de mejora. Un ejemplo de esto es el caso del terreno BH para las ejecuciones de GreedyMinMaxABN. Si se ve el ejemplo de la [Figura 7.65](#) (que corresponde a un muestreo aleatorio de 2500 puntos) se puede ver que el máximo porcentaje de mejora fue de 9,60% mientras que en la [Figura 7.67](#) (que corresponde a un muestreo aleatorio de 5000 puntos) dicho porcentaje fue de (20,23%).

Hubo otros casos en los que para un mismo terreno y un mismo criterio al aumentar el tamaño de la muestra se disminuyó el porcentaje de mejora. Un ejemplo de este caso es la ejecución de GreedyMinMaxABN sobre muestras del terreno KS. En el caso de la muestra de 2500 puntos que se observa en la [Figura 7.68](#) la mejora máxima fue del 21,72% mientras que para la muestra de 5000 puntos ([Figura 7.66](#)) fue de 9,02%. En este mismo ejemplo se pueden ver variaciones no solo en la magnitud de los porcentajes sino en el comportamiento de los mismos en función del orden máximo de ejecución.

Es decir que, al aumentar el tamaño de la muestra se pudieron observar variaciones en la magnitud y comportamiento del porcentaje de mejora del *maxValue* para un mismo terreno y un mismo criterio.

En las imágenes siguientes se observa el orden máximo y final de ejecución, el *maxValue* del criterio observado y el porcentaje de mejora que representa dicho valor respecto al de la triangulación de *Delaunay* original. Se resalta la columna *maxValue* con *verde* si la métrica de error RMSE de la aproximación obtenida iguala la observada en la DT, con *naranja* si la empeora y con *blanco* si la iguala.

RMSE	terreno1		
	orden max	orden final	maxValue
0	(DT)	62,5564	0,00%
1	(1-ODT)	59,5169	4,86%
2	(1-ODT)	59,5169	4,86%
3	(1-ODT)	59,5169	4,86%
4	(1-ODT)	59,5169	4,86%
5	(1-ODT)	59,5169	4,86%
6	(6-ODT)	59,5169	4,86%
7	(6-ODT)	59,5169	4,86%
8	(6-ODT)	59,5169	4,86%
9	(6-ODT)	59,5169	4,86%
10	(6-ODT)	59,5169	4,86%
11	(6-ODT)	59,5169	4,86%
12	(6-ODT)	59,5169	4,86%
13	(6-ODT)	59,5169	4,86%
14	(6-ODT)	59,5169	4,86%
15	(6-ODT)	59,5169	4,86%
16	(6-ODT)	59,5169	4,86%
17	(6-ODT)	59,5169	4,86%
18	(6-ODT)	59,5169	4,86%
19	(6-ODT)	59,5169	4,86%
20	(6-ODT)	59,5169	4,86%
21	(6-ODT)	59,5169	4,86%
22	(6-ODT)	59,5169	4,86%
23	(6-ODT)	59,5169	4,86%
24	(6-ODT)	59,5169	4,86%
25	(6-ODT)	59,5169	4,86%
26	(6-ODT)	59,5169	4,86%
27	(6-ODT)	59,5169	4,86%
28	(6-ODT)	59,5169	4,86%
29	(6-ODT)	59,5169	4,86%
30	(6-ODT)	59,5169	4,86%
31	(6-ODT)	59,5169	4,86%
32	(6-ODT)	59,5169	4,86%
33	(33-ODT)	52,3671	16,29%
34	(33-ODT)	52,3671	16,29%
35	(33-ODT)	52,3671	16,29%
36	(33-ODT)	52,3671	16,29%
37	(33-ODT)	52,3671	16,29%
38	(33-ODT)	52,3671	16,29%
39	(33-ODT)	52,3671	16,29%
40	(33-ODT)	52,3671	16,29%
41	(33-ODT)	52,3671	16,29%
42	(33-ODT)	52,3671	16,29%
43	(33-ODT)	52,3671	16,29%
44	(33-ODT)	52,3671	16,29%
45	(33-ODT)	52,3671	16,29%
46	(33-ODT)	52,3671	16,29%
47	(33-ODT)	52,3671	16,29%
48	(33-ODT)	52,3671	16,29%
49	(33-ODT)	52,3671	16,29%
50	(33-ODT)	52,3671	16,29%
infinito	(33-ODT)	52,3671	16,29%

FIGURA 7.63: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de BH.

RMSE	terreno2		
	orden max	orden final	porcentaje
0	(DT)	71,8395	0,00%
1	(1-ODT)	53,747	25,18%
2	(1-ODT)	53,747	25,18%
3	(3-ODT)	43,7649	39,08%
4	(4-ODT)	40,072	44,22%
5	(5-ODT)	40,072	44,22%
6	(5-ODT)	40,072	44,22%
7	(5-ODT)	40,072	44,22%
8	(5-ODT)	40,072	44,22%
9	(5-ODT)	40,072	44,22%
10	(5-ODT)	40,072	44,22%
11	(5-ODT)	40,072	44,22%
12	(12-ODT)	40,072	44,22%
13	(12-ODT)	40,072	44,22%
14	(12-ODT)	40,072	44,22%
15	(12-ODT)	40,072	44,22%
16	(16-ODT)	39,5724	44,92%
17	(16-ODT)	39,5724	44,92%
18	(16-ODT)	39,5724	44,92%
19	(16-ODT)	39,5724	44,92%
20	(16-ODT)	39,5724	44,92%
21	(16-ODT)	39,5724	44,92%
22	(16-ODT)	39,5724	44,92%
23	(16-ODT)	39,5724	44,92%
24	(16-ODT)	39,5724	44,92%
25	(16-ODT)	39,5724	44,92%
26	(16-ODT)	39,5724	44,92%
27	(16-ODT)	39,5724	44,92%
28	(16-ODT)	39,5724	44,92%
29	(16-ODT)	39,5724	44,92%
30	(16-ODT)	39,5724	44,92%
31	(16-ODT)	39,5724	44,92%
32	(16-ODT)	39,5724	44,92%
33	(16-ODT)	39,5724	44,92%
34	(16-ODT)	39,5724	44,92%
35	(16-ODT)	39,5724	44,92%
36	(16-ODT)	39,5724	44,92%
37	(16-ODT)	39,5724	44,92%
38	(16-ODT)	39,5724	44,92%
39	(16-ODT)	39,5724	44,92%
40	(16-ODT)	39,5724	44,92%
41	(16-ODT)	39,5724	44,92%
42	(16-ODT)	39,5724	44,92%
43	(16-ODT)	39,5724	44,92%
44	(16-ODT)	39,5724	44,92%
45	(16-ODT)	39,5724	44,92%
46	(16-ODT)	39,5724	44,92%
47	(16-ODT)	39,5724	44,92%
48	(16-ODT)	39,5724	44,92%
49	(16-ODT)	39,5724	44,92%
50	(16-ODT)	39,5724	44,92%
infinito	(16-ODT)	39,5724	44,92%

FIGURA 7.64: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de BH.

RMSE	terreno3		
	orden max	orden final	porcentaje
0	(DT)	53,8354	0,00%
1	(1-ODT)	50,1847	6,78%
2	(2-ODT)	49,6788	7,72%
3	(2-ODT)	49,6788	7,72%
4	(2-ODT)	49,6788	7,72%
5	(5-ODT)	48,6684	9,60%
6	(5-ODT)	48,6684	9,60%
7	(5-ODT)	48,6684	9,60%
8	(5-ODT)	48,6684	9,60%
9	(5-ODT)	48,6684	9,60%
10	(5-ODT)	48,6684	9,60%
11	(5-ODT)	48,6684	9,60%
12	(5-ODT)	48,6684	9,60%
13	(5-ODT)	48,6684	9,60%
14	(5-ODT)	48,6684	9,60%
15	(5-ODT)	48,6684	9,60%
16	(5-ODT)	48,6684	9,60%
17	(5-ODT)	48,6684	9,60%
18	(5-ODT)	48,6684	9,60%
19	(5-ODT)	48,6684	9,60%
20	(5-ODT)	48,6684	9,60%
21	(5-ODT)	48,6684	9,60%
22	(5-ODT)	48,6684	9,60%
23	(5-ODT)	48,6684	9,60%
24	(5-ODT)	48,6684	9,60%
25	(5-ODT)	48,6684	9,60%
26	(5-ODT)	48,6684	9,60%
27	(5-ODT)	48,6684	9,60%
28	(5-ODT)	48,6684	9,60%
29	(5-ODT)	48,6684	9,60%
30	(5-ODT)	48,6684	9,60%
31	(5-ODT)	48,6684	9,60%
32	(5-ODT)	48,6684	9,60%
33	(5-ODT)	48,6684	9,60%
34	(5-ODT)	48,6684	9,60%
35	(5-ODT)	48,6684	9,60%
36	(5-ODT)	48,6684	9,60%
37	(5-ODT)	48,6684	9,60%
38	(5-ODT)	48,6684	9,60%
39	(5-ODT)	48,6684	9,60%
40	(5-ODT)	48,6684	9,60%
41	(5-ODT)	48,6684	9,60%
42	(5-ODT)	48,6684	9,60%
43	(5-ODT)	48,6684	9,60%
44	(5-ODT)	48,6684	9,60%
45	(5-ODT)	48,6684	9,60%
46	(5-ODT)	48,6684	9,60%
47	(5-ODT)	48,6684	9,60%
48	(5-ODT)	48,6684	9,60%
49	(5-ODT)	48,6684	9,60%
50	(5-ODT)	48,6684	9,60%
infinito	(113-ODT)	48,6684	9,60%

FIGURA 7.65: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) de BH.

RMSE	terreno1		
	orden max	orden final	maxValue
0	(DT)	87,2495	0,00%
1	(1-ODT)	80,8043	7,39%
2	(2-ODT)	79,3805	9,02%
3	(2-ODT)	79,3805	9,02%
4	(2-ODT)	79,3805	9,02%
5	(2-ODT)	79,3805	9,02%
6	(2-ODT)	79,3805	9,02%
7	(2-ODT)	79,3805	9,02%
8	(8-ODT)	85,0608	2,51%
9	(8-ODT)	85,0608	2,51%
10	(8-ODT)	85,0608	2,51%
11	(8-ODT)	85,0608	2,51%
12	(8-ODT)	85,0608	2,51%
13	(8-ODT)	85,0608	2,51%
14	(8-ODT)	85,0608	2,51%
15	(8-ODT)	85,0608	2,51%
16	(8-ODT)	85,0608	2,51%
17	(8-ODT)	85,0608	2,51%
18	(8-ODT)	85,0608	2,51%
19	(8-ODT)	85,0608	2,51%
20	(8-ODT)	85,0608	2,51%
21	(8-ODT)	85,0608	2,51%
22	(8-ODT)	85,0608	2,51%
23	(8-ODT)	85,0608	2,51%
24	(8-ODT)	85,0608	2,51%
25	(8-ODT)	85,0608	2,51%
26	(8-ODT)	85,0608	2,51%
27	(8-ODT)	85,0608	2,51%
28	(8-ODT)	85,0608	2,51%
29	(8-ODT)	85,0608	2,51%
30	(8-ODT)	85,0608	2,51%
31	(8-ODT)	85,0608	2,51%
32	(8-ODT)	85,0608	2,51%
33	(8-ODT)	85,0608	2,51%
34	(8-ODT)	85,0608	2,51%
35	(8-ODT)	85,0608	2,51%
36	(8-ODT)	85,0608	2,51%
37	(8-ODT)	85,0608	2,51%
38	(8-ODT)	85,0608	2,51%
39	(8-ODT)	85,0608	2,51%
40	(8-ODT)	85,0608	2,51%
41	(8-ODT)	85,0608	2,51%
42	(8-ODT)	85,0608	2,51%
43	(8-ODT)	85,0608	2,51%
44	(8-ODT)	85,0608	2,51%
45	(8-ODT)	85,0608	2,51%
46	(8-ODT)	85,0608	2,51%
47	(8-ODT)	85,0608	2,51%
48	(8-ODT)	85,0608	2,51%
49	(8-ODT)	85,0608	2,51%
50	(8-ODT)	85,0608	2,51%
infinito	(8-ODT)	85,0608	2,51%

FIGURA 7.66: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno1*) de KS.

RMSE	terreno3		
	orden max	orden final	maxValue
0	(DT)	74,8134	0,00%
1	(1-ODT)	66,0535	11,71%
2	(2-ODT)	59,6819	20,23%
3	(3-ODT)	62,7558	16,12%
4	(3-ODT)	62,7558	16,12%
5	(5-ODT)	59,8366	20,02%
6	(5-ODT)	59,8366	20,02%
7	(5-ODT)	59,8366	20,02%
8	(5-ODT)	59,8366	20,02%
9	(5-ODT)	59,8366	20,02%
10	(5-ODT)	59,8366	20,02%
11	(5-ODT)	59,8366	20,02%
12	(5-ODT)	59,8366	20,02%
13	(13-ODT)	59,8366	20,02%
14	(13-ODT)	59,8366	20,02%
15	(13-ODT)	59,8366	20,02%
16	(13-ODT)	59,8366	20,02%
17	(13-ODT)	59,8366	20,02%
18	(13-ODT)	59,8366	20,02%
19	(13-ODT)	59,8366	20,02%
20	(13-ODT)	59,8366	20,02%
21	(13-ODT)	59,8366	20,02%
22	(13-ODT)	59,8366	20,02%
23	(13-ODT)	59,8366	20,02%
24	(13-ODT)	59,8366	20,02%
25	(13-ODT)	59,8366	20,02%
26	(13-ODT)	59,8366	20,02%
27	(13-ODT)	59,8366	20,02%
28	(13-ODT)	59,8366	20,02%
29	(13-ODT)	59,8366	20,02%
30	(13-ODT)	59,8366	20,02%
31	(13-ODT)	59,8366	20,02%
32	(13-ODT)	59,8366	20,02%
33	(13-ODT)	59,8366	20,02%
34	(13-ODT)	59,8366	20,02%
35	(13-ODT)	59,8366	20,02%
36	(13-ODT)	59,8366	20,02%
37	(13-ODT)	59,8366	20,02%
38	(13-ODT)	59,8366	20,02%
39	(13-ODT)	59,8366	20,02%
40	(13-ODT)	59,8366	20,02%
41	(13-ODT)	59,8366	20,02%
42	(13-ODT)	59,8366	20,02%
43	(13-ODT)	59,8366	20,02%
44	(13-ODT)	59,8366	20,02%
45	(13-ODT)	59,8366	20,02%
46	(13-ODT)	59,8366	20,02%
47	(13-ODT)	59,8366	20,02%
48	(13-ODT)	59,8366	20,02%
49	(13-ODT)	59,8366	20,02%
50	(13-ODT)	59,8366	20,02%
infinito	(13-ODT)	59,8366	20,02%

FIGURA 7.67: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno3*) de BH.

RMSE	terreno1		
	orden max	orden final	maxValue
0	(DT)	81,5883	0,00%
1	(1-ODT)	65,2821	19,99%
2	(1-ODT)	65,2821	19,99%
3	(3-ODT)	64,3262	21,16%
4	(4-ODT)	63,8659	21,72%
5	(4-ODT)	63,8659	21,72%
6	(6-ODT)	63,8659	21,72%
7	(6-ODT)	63,8659	21,72%
8	(6-ODT)	63,8659	21,72%
9	(6-ODT)	63,8659	21,72%
10	(6-ODT)	63,8659	21,72%
11	(6-ODT)	63,8659	21,72%
12	(6-ODT)	63,8659	21,72%
13	(6-ODT)	63,8659	21,72%
14	(6-ODT)	63,8659	21,72%
15	(6-ODT)	63,8659	21,72%
16	(6-ODT)	63,8659	21,72%
17	(6-ODT)	63,8659	21,72%
18	(6-ODT)	63,8659	21,72%
19	(6-ODT)	63,8659	21,72%
20	(6-ODT)	63,8659	21,72%
21	(6-ODT)	63,8659	21,72%
22	(6-ODT)	63,8659	21,72%
23	(6-ODT)	63,8659	21,72%
24	(6-ODT)	63,8659	21,72%
25	(6-ODT)	63,8659	21,72%
26	(6-ODT)	63,8659	21,72%
27	(6-ODT)	63,8659	21,72%
28	(6-ODT)	63,8659	21,72%
29	(6-ODT)	63,8659	21,72%
30	(6-ODT)	63,8659	21,72%
31	(6-ODT)	63,8659	21,72%
32	(6-ODT)	63,8659	21,72%
33	(6-ODT)	63,8659	21,72%
34	(6-ODT)	63,8659	21,72%
35	(6-ODT)	63,8659	21,72%
36	(6-ODT)	63,8659	21,72%
37	(6-ODT)	63,8659	21,72%
38	(6-ODT)	63,8659	21,72%
39	(6-ODT)	63,8659	21,72%
40	(6-ODT)	63,8659	21,72%
41	(6-ODT)	63,8659	21,72%
42	(6-ODT)	63,8659	21,72%
43	(6-ODT)	63,8659	21,72%
44	(6-ODT)	63,8659	21,72%
45	(6-ODT)	63,8659	21,72%
46	(6-ODT)	63,8659	21,72%
47	(6-ODT)	63,8659	21,72%
48	(6-ODT)	63,8659	21,72%
49	(6-ODT)	63,8659	21,72%
50	(6-ODT)	63,8659	21,72%
infinito	(194-ODT)	70,8658	13,14%

FIGURA 7.68: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de KS.

En base a los resultados obtenidos (y cuya fuente de datos se encuentra en la [Sección 4](#) del [Apéndice C](#)) se pudieron observar los eventos que se indican a continuación.

- Se presenta aquí una tabla que muestra el porcentaje de casos en los que el porcentaje máximo de mejora se alcanzó en aproximaciones con orden final hasta 3 inclusive, hasta 5 inclusive y hasta 10 inclusive.

instancia	≤ 3	≤ 5	≤ 10
ABN 2500	41,66 %	66,66 %	83,33 %
ABN 5000	50 %	50 %	75 %
JND 2500	41,66 %	66,66 %	83,33 %
JND 5000	50 %	58,33 %	75 %
WABN 2500	25 %	25 %	41,66 %
WABN 5000	25 %	58,33 %	58,33 %

- **ABN 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 1,94 % con un desvío estándar de 3,68.
- **ABN 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 2,64 % con un desvío estándar de 3,54.
- **JND 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 1,98 % con un desvío estándar de 4,00.
- **JND 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 2,55 % con un desvío estándar de 3,37.

De lo anterior se deduce que, para ABN y JND, las máximas mejoras del *maxValue* se pueden obtener en aproximaciones de órdenes bajos. Adicionalmente, se puede observar que, cuando el porcentaje máximo no se consigue hasta el orden máximo 4, el porcentaje de mejora de estas últimas aproximaciones no dista mucho del máximo total obtenido.

Más aún, hubo muy pocos casos en donde relajar el orden máximo a *infinito* generó aproximaciones que posean el porcentaje máximo de mejora observado. Estos casos fueron:

- MH, *terreno 1*, ABN, 5000: en este caso el porcentaje de mejora máximo (4,93 %) se alcanzó en la aproximación de orden final 92. Cabe destacar que, hasta el orden máximo 4 el porcentaje máximo de mejora obtenido fue de 0 %.

- **KS, terreno 1, JND, 2500:** en este caso el porcentaje de mejora máximo (25,08 %) se alcanzó en la aproximación de orden final 194. Cabe destacar que, hasta el orden máximo 4 el porcentaje máximo de mejora obtenido fue de 24,91 %.
- **CC, terreno 1, JND, 5000:** en este caso el porcentaje de mejora máximo (25,71 %) se alcanzó en la aproximación de orden final 54. Cabe destacar que, hasta el orden máximo 4 el porcentaje máximo de mejora obtenido fue de 16,12 %.

Se puede ver incluso que los valores observados (porcentaje máximo medido, orden final de las aproximaciones y diferencia promedio entre los porcentajes máximos y el alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4) en promedio son mejores en las muestras de 2500 puntos que en las de 5000 puntos.

Para el caso del criterio WABN, si bien se observaron mejoras considerables en el *maxValue* de las aproximaciones obtenidas, estas mejoras no se observaron mayoritariamente en órdenes más bajos. En base a los resultados obtenidos (y cuya fuente de datos se encuentra en la [Sección 4 del Apéndice C](#)) se pudieron observar los siguientes eventos:

- **WABN 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 4,31 % con un desvío estándar de 3,97.
- **WABN 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 7,21 % con un desvío estándar de 11,44.

Adicionalmente, en el caso de WABN (a diferencia de ABN y JND) se obtuvieron mejoras en varios casos para orden máximo *infinito* con porcentajes que distan del máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4.

Más allá de las semejanzas antes mencionadas entre ABN y JND, el comportamiento de los porcentajes de mejora para un mismo terreno, un mismo criterio y una misma muestra fue muy parecido en ambos casos. Se pudo observar que:

- **BH:** en los 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos el comportamiento de los porcentajes de mejora fue muy similar para ambos criterios y la magnitud de los porcentajes fueron mayores para ABN que para JND. Se puede observar en la [Figura 7.69](#) que en todos los casos salvo en uno (resaltado con color *rojo*) cuando un criterio mejora el porcentaje al aumentar el orden máximo de ejecución el otro también, lo mismo cuando lo iguala o empeora. Ocurrió algo similar para las

muestras de 5000 puntos a partir del orden máximo 5 pero, en lo que respecta a las magnitudes de los porcentajes, en algunos casos fue mayor el observado para ABN y en otros para JND.

- **CC**: en los muestreos aleatorios de 2500 puntos se observó un comportamiento similar al observado en el terreno BH. Se observan en la [Figura 7.70](#) algunas variaciones en este comportamiento para los primeros órdenes del muestreo de nombre *terreno1* pero luego el comportamiento general fue el observado. En lo que respecta a las magnitudes de los porcentajes, en algunos casos fue mayor el observado para ABN y en otros para JND. Se observó un comportamiento similar para los muestreos de 5000 puntos de este terreno.
- **MH**: se observa un comportamiento similar al caso del terreno CC para muestras de ambos tamaños. Se puede ver un ejemplo de este caso en la [Figura 7.71](#). Ocurrió lo mismo para **KS** (ver [Figura 7.72](#)).

GreedyMinSum

La idea detrás de esta heurística es minimizar la suma de los valores del criterio objetivo como alternativa a la minimización del valor máximo que realiza GreedyMinMax. Es por esta razón que, en esta sección, se analiza el comportamiento de este criterio respecto a la minimización del *maxValue*. El objetivo es comparar, en base a los resultados obtenidos y analizados, el funcionamiento de esta heurística con el observado para GreedyMinMax.

Al igual que en el caso de la heurística GreedyMinMax, se pudo observar que la magnitud y comportamiento del porcentaje de mejora del *maxValue*, para las aproximaciones obtenidas tras ejecutar esta heurística para un mismo terreno y un mismo criterio, varía dependiendo de la muestra aleatoria sobre la que se ejecutó dicha heurística.

Más aún, dado que en este caso el objetivo es **minimizar la suma** de los valores del criterio a optimizar, hubo instancias en las que se empeoró el *maxValue*. Las mismas se detallan a continuación:

- BH, *terreno 1*, ABN, 2500: se empeoró el *maxValue* en un 9,33% para los órdenes máximos 2 a *infinito*.
- MH, *terreno 1*, ABN, 2500: se empeoró el *maxValue* en un 4,08% para orden máximo 1.
- CC, *terreno 2*, ABN, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 2,31% para los órdenes máximos 6 a 50.
- CC, *terreno 3*, ABN, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 6,52% para los órdenes máximos 13 a *infinito*.
- BH, *terreno 3*, JND, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 0,48% para los órdenes máximos 8 a 12.
- CC, *terreno 1*, JND, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 5,97% para orden máximo *infinito*.
- CC, *terreno 2*, JND, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 12,57% para orden máximo 8, 3,64% para orden máximo 10 y 19,72% para orden máximo *infinito*.
- MH, *terreno 1*, JND, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 1,10% para los órdenes máximos 6 a 19.
- KS, *terreno 3*, JND, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 8,04% para orden máximo *infinito*.

- WABN, 2500: en 7 de 12 casos se empeoró mayoritariamente el *maxValue* y en los que no, o bien se igualó o bien se mejoró a veces sí y a veces no.
- CC, *terreno 3*, WABN, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 2,78% para orden máximo 1 y 2 y 9,27% para los órdenes máximos 3 a *infinito*.
- MH, *terreno 2*, WABN, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 0,85% para los órdenes máximos 1 a *infinito*.
- MH, *terreno 3*, WABN, 5000: se empeoró el *maxValue* en un 0,63% para los órdenes máximos 4 a *infinito*.

Se puede observar en el siguiente ejemplo, correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSumWABN para muestreos aleatorios de 5000 puntos de CC, que:

- Para el muestreo de nombre *terreno1* el porcentaje máximo de mejora fue de 6,47% y se alcanzó en el orden máximo 6 (porcentaje que se mantuvo hasta orden máximo 8 inclusive). Para las aproximaciones obtenidas con orden máximo menor a 6 el porcentaje de mejora fue 0% y para las obtenidas con orden máximo mayor a 6 el porcentaje fue de 3,25%. Ver [Figura 7.73](#).
- En cambio, para el muestreo de nombre *terreno2* el porcentaje de mejora fue mucho más alto llegándose a un máximo de 31,62% en el orden máximo 9. No sólo se observa una diferencia en las magnitudes de los porcentajes de mejora sino también en el comportamiento de los mismos ya que se observa una tendencia mayoritariamente creciente de dichos porcentajes en función del orden máximo y final de las aproximaciones obtenidas. Ver [Figura 7.74](#).
- Para el muestreo de nombre *terreno3* la situación fue diferente a las dos instancias antes mencionadas ya que, en este caso, en todas las aproximaciones se maximizó el *maxValue* en lugar de minimizarse dicho valor. Es por esto que se observan en la [Figura 7.75](#) porcentajes de mejora negativos.

Cabe destacar que, el hecho de que minimizar la suma permita aumentar el valor máximo del criterio objetivo, si bien no es intuitivo resulta factible. Se puede dar el caso, por ejemplo, en que se realice un *flip* que disminuya la suma de los valores del criterio de la vecindad del eje intercambiado pero que maximice su valor. Si casualmente ese eje poseía el valor máximo del criterio en la triangulación, si bien se minimiza la suma total de los valores, ese eje maximiza su valor. Consecuentemente, el *maxValue* del criterio objetivo en lugar de minimizarse se maximiza.

RMSE	terreno1		
	orden max	orden final	maxValue
0	(DT)	499.558	0,00%
1	(1-ODT)	499.558	0,00%
2	(2-ODT)	499.558	0,00%
3	(3-ODT)	499.558	0,00%
4	(4-ODT)	499.558	0,00%
5	(5-ODT)	499.558	0,00%
6	(6-ODT)	467.254	6,47%
7	(7-ODT)	467.254	6,47%
8	(8-ODT)	467.254	6,47%
9	(9-ODT)	483.304	3,25%
10	(10-ODT)	483.304	3,25%
11	(11-ODT)	483.304	3,25%
12	(12-ODT)	483.304	3,25%
13	(13-ODT)	483.304	3,25%
14	(14-ODT)	483.304	3,25%
15	(15-ODT)	483.304	3,25%
16	(16-ODT)	483.304	3,25%
17	(17-ODT)	483.304	3,25%
18	(18-ODT)	483.304	3,25%
19	(19-ODT)	483.304	3,25%
20	(20-ODT)	483.304	3,25%
21	(21-ODT)	483.304	3,25%
22	(22-ODT)	483.304	3,25%
23	(23-ODT)	483.304	3,25%
24	(24-ODT)	483.304	3,25%
25	(25-ODT)	483.304	3,25%
26	(26-ODT)	483.304	3,25%
27	(27-ODT)	483.304	3,25%
28	(28-ODT)	483.304	3,25%
29	(29-ODT)	483.304	3,25%
30	(30-ODT)	483.304	3,25%
31	(31-ODT)	483.304	3,25%
32	(32-ODT)	483.304	3,25%
33	(33-ODT)	483.304	3,25%
34	(34-ODT)	483.304	3,25%
35	(35-ODT)	483.304	3,25%
36	(36-ODT)	483.304	3,25%
37	(37-ODT)	483.304	3,25%
38	(37-ODT)	483.304	3,25%
39	(39-ODT)	483.304	3,25%
40	(40-ODT)	483.304	3,25%
41	(40-ODT)	483.304	3,25%
42	(42-ODT)	483.304	3,25%
43	(43-ODT)	483.304	3,25%
44	(44-ODT)	483.304	3,25%
45	(45-ODT)	483.304	3,25%
46	(45-ODT)	483.304	3,25%
47	(45-ODT)	483.304	3,25%
48	(48-ODT)	483.304	3,25%
49	(49-ODT)	483.304	3,25%
50	(50-ODT)	483.304	3,25%
infinito	(1514-ODT)	483.304	3,25%

FIGURA 7.73: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio WABN sobre un muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno1*) de CC.

RMSE	terreno2		
	orden max	orden final	porcentaje
0	(DT)	609.598	0,00%
1	(1-ODT)	609.598	0,00%
2	(2-ODT)	432.591	29,04%
3	(3-ODT)	489.696	19,67%
4	(4-ODT)	489.696	19,67%
5	(5-ODT)	489.696	19,67%
6	(6-ODT)	489.696	19,67%
7	(7-ODT)	489.696	19,67%
8	(8-ODT)	489.696	19,67%
9	(9-ODT)	416.838	31,62%
10	(10-ODT)	416.838	31,62%
11	(11-ODT)	416.838	31,62%
12	(12-ODT)	416.838	31,62%
13	(13-ODT)	416.838	31,62%
14	(14-ODT)	416.838	31,62%
15	(15-ODT)	416.838	31,62%
16	(16-ODT)	416.838	31,62%
17	(17-ODT)	416.838	31,62%
18	(18-ODT)	416.838	31,62%
19	(19-ODT)	416.838	31,62%
20	(20-ODT)	416.838	31,62%
21	(21-ODT)	416.838	31,62%
22	(22-ODT)	416.838	31,62%
23	(23-ODT)	416.838	31,62%
24	(24-ODT)	416.838	31,62%
25	(25-ODT)	416.838	31,62%
26	(26-ODT)	416.838	31,62%
27	(27-ODT)	416.838	31,62%
28	(28-ODT)	416.838	31,62%
29	(28-ODT)	416.838	31,62%
30	(30-ODT)	416.838	31,62%
31	(30-ODT)	416.838	31,62%
32	(32-ODT)	416.838	31,62%
33	(33-ODT)	416.838	31,62%
34	(33-ODT)	416.838	31,62%
35	(35-ODT)	416.838	31,62%
36	(36-ODT)	416.838	31,62%
37	(37-ODT)	416.838	31,62%
38	(37-ODT)	416.838	31,62%
39	(39-ODT)	416.838	31,62%
40	(40-ODT)	416.838	31,62%
41	(41-ODT)	416.838	31,62%
42	(42-ODT)	416.838	31,62%
43	(43-ODT)	416.838	31,62%
44	(43-ODT)	416.838	31,62%
45	(45-ODT)	416.838	31,62%
46	(45-ODT)	416.838	31,62%
47	(45-ODT)	416.838	31,62%
48	(45-ODT)	416.838	31,62%
49	(45-ODT)	416.838	31,62%
50	(45-ODT)	416.838	31,62%
infinito	(570-ODT)	416.838	31,62%

FIGURA 7.74: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio WABN sobre un muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno2*) de CC.

RMSE	terreno3		
	orden max	orden final	porcentaje
0	(DT)	412.531	0,00%
1	(1-ODT)	424.003	-2,78%
2	(2-ODT)	424.003	-2,78%
3	(3-ODT)	450.757	-9,27%
4	(4-ODT)	450.757	-9,27%
5	(5-ODT)	450.757	-9,27%
6	(6-ODT)	450.757	-9,27%
7	(7-ODT)	450.757	-9,27%
8	(8-ODT)	450.757	-9,27%
9	(9-ODT)	450.757	-9,27%
10	(10-ODT)	450.757	-9,27%
11	(11-ODT)	450.757	-9,27%
12	(12-ODT)	450.757	-9,27%
13	(13-ODT)	450.757	-9,27%
14	(14-ODT)	450.757	-9,27%
15	(15-ODT)	450.757	-9,27%
16	(16-ODT)	450.757	-9,27%
17	(17-ODT)	450.757	-9,27%
18	(18-ODT)	450.757	-9,27%
19	(19-ODT)	450.757	-9,27%
20	(20-ODT)	450.757	-9,27%
21	(21-ODT)	450.757	-9,27%
22	(22-ODT)	450.757	-9,27%
23	(23-ODT)	450.757	-9,27%
24	(24-ODT)	450.757	-9,27%
25	(25-ODT)	450.757	-9,27%
26	(26-ODT)	450.757	-9,27%
27	(27-ODT)	450.757	-9,27%
28	(28-ODT)	450.757	-9,27%
29	(29-ODT)	450.757	-9,27%
30	(29-ODT)	450.757	-9,27%
31	(31-ODT)	450.757	-9,27%
32	(32-ODT)	450.757	-9,27%
33	(33-ODT)	450.757	-9,27%
34	(34-ODT)	450.757	-9,27%
35	(35-ODT)	450.757	-9,27%
36	(36-ODT)	450.757	-9,27%
37	(37-ODT)	450.757	-9,27%
38	(38-ODT)	450.757	-9,27%
39	(39-ODT)	450.757	-9,27%
40	(40-ODT)	450.757	-9,27%
41	(41-ODT)	450.757	-9,27%
42	(42-ODT)	450.757	-9,27%
43	(42-ODT)	450.757	-9,27%
44	(44-ODT)	450.757	-9,27%
45	(44-ODT)	450.757	-9,27%
46	(46-ODT)	450.757	-9,27%
47	(46-ODT)	450.757	-9,27%
48	(48-ODT)	450.757	-9,27%
49	(49-ODT)	450.757	-9,27%
50	(49-ODT)	450.757	-9,27%
infinito	(2978-ODT)	450.757	-9,27%

FIGURA 7.75: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio WABN sobre un muestreo aleatorio de 5000 puntos (*terreno3*) de CC.

En base a los resultados obtenidos (y cuya fuente de datos se encuentra en la [Sección 4 del Apéndice C](#)) se pudieron observar los siguientes que se presentan a continuación.

- Se presenta aquí una tabla que muestra el porcentaje de casos en los que el porcentaje máximo de mejora se alcanzó en aproximaciones con orden final hasta 3 inclusive, hasta 5 inclusive y hasta 10 inclusive.

instancia	≤ 3	≤ 5	≤ 10
ABN 2500	66,66 %	83,33 %	91,66 %
ABN 5000	66,66 %	66,66 %	66,66 %
JND 2500	66,66 %	91,66 %	100 %
JND 5000	66,66 %	91,66 %	91,66 %
WABN 2500	91,66 %	91,66 %	91,66 %
WABN 5000	66,66 %	66,66 %	91,66 %

- ABN 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 0,63 % con un desvío estándar de 1,24.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 16,32 % con un desvío estándar de 10,76, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 21,31 % con un desvío estándar de 9,43.

- ABN 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 1,55 % con un desvío estándar de 2,96.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 15,51 % con un desvío estándar de 9,68, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 19,07 % con un desvío estándar de 10,48.

- JND 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 0,30 % con un desvío estándar de 1,04.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 13,04 % con un desvío estándar de 7,71, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 22,42 % con un desvío estándar de 6,92.

- JND 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 0,85 % con un desvío estándar de 2,94.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 14,43% con un desvío estándar de 9,96, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 20,46% con un desvío estándar de 9,97.

- **WABN 2500:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 0,60% con un desvío estándar de 2,06.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 6,52% con un desvío estándar de 8,65, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 16,98% con un desvío estándar de 12,10.

- **WABN 5000:** en este caso, la diferencia promedio entre el porcentaje máximo y el porcentaje máximo alcanzado en las aproximaciones hasta orden máximo 4 fue del 3,83% con un desvío estándar de 7,28.

El promedio de la mejora máxima obtenida fue del 9,79% con un desvío estándar de 12,58, mientras que para el mismo caso en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMinMax el promedio de la mejora máxima obtenida fue del 26,07% con un desvío estándar de 9,05.

Como se puede observar, en función de lo expuesto anteriormente, si bien los porcentajes máximos de mejora del *maxValue* fueron más bajos para la heurística GreedyMinSum que para GreedyMinMax, en la gran mayoría de los casos observados las aproximaciones en donde se alcanzó dicho porcentaje son de órdenes finales bajos.

A diferencia de GreedyMinMax, en este caso se observó que en varias instancias la mejora fue del 0% y hasta incluso que la triangulación en la que se llega al porcentaje máximo de mejora es la triangulación de *Delaunay*. Esto se debe a lo expresado anteriormente: dado que el objetivo de la heurística GreedyMinSum es minimizar la suma puede que no sólo no se minimice el *maxValue* sino que también se empeore.

Análisis del valor mínimo (*min Value*)

Se presenta aquí un análisis comparativo entre los valores máximos de los distintos criterios medidos en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de las heurísticas GreedyMaxMin y GreedyMaxSum para orden máximo 1 a 50 e infinito.

GreedyMaxMin

Al igual que en los casos anteriores, se pudo observar que la magnitud y comportamiento del grado de mejora del *min Value*, en las aproximaciones obtenidas tras ejecutar esta heurística para un mismo terreno y un mismo criterio, varía dependiendo de la muestra aleatoria sobre la que se ejecutó dicha heurística.

Se puede observar en el ejemplo que corresponde a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre muestreos de 2500 del terreno BH que:

- Para el caso del muestreo de nombre *terreno1* se pueden observar 4 instancias en las que las aproximaciones mejoran el valor objetivo de la aproximación de un orden máximo inferior. Estos casos fueron los órdenes finales: 3, 6, 34 y 1548. Así mismo, se observaron dos casos en donde se empeoró la métrica respecto a la ejecución de un orden menor. Estos órdenes fueron el 4 y 24. La mejora máxima en este caso se obtiene en el orden máximo *infinito* (ver [Figura 7.77²](#)).
- Para el caso del muestreo de nombre *terreno2*, en cambio, hubo 7 casos en donde se obtuvieron mejoras. Uno de ellos (el orden final 28) maximiza el mínimo mientras que en el resto (1, 2, 3, 4, 5 y 16) se disminuye cantidad de mínimos y se mantiene el valor mínimo de la triangulación de *Delaunay* original. Más aún, dado que en este caso la cantidad de mínimos es alta (16 en total) se obtuvieron muchas mejoras en los órdenes más bajos, hecho que no se dio en el resto de los muestreos. La mejora máxima en este caso se obtiene en el orden máximo 28 (ver [Figura 7.78](#)). Se pueden ver imágenes visuales de algunas de las triangulaciones intermedias obtenidas durante la eliminación de los mínimos presentes en la triangulación original en la [Sección 4](#) del [Apéndice C](#).
- Para el caso del muestreo de nombre *terreno3* se pueden observar 6 instancias en las que las aproximaciones mejoran el valor objetivo de la aproximación de un orden máximo inferior y ninguna donde se empeore. Estos órdenes fueron el 2, 3, 19, 21, 44 y 1689. La mejora máxima en este caso se obtiene en el orden máximo *infinito* (ver [Figura 7.79](#)).

²Se explica el contenido de esta figura y las siguientes es la [página 173](#) del presente informe

Se pudo observar que son muchos los casos en los que la ejecución con orden máximo *infinito* mejora (o iguala) el objetivo respecto a la ejecución con orden máximo 50. Se detalla a continuación la cantidad de casos (de un total de 12 por fila) en donde se observó que con orden máximo *infinito* se mejora, empeora o iguala la métrica **respecto de la ejecución con orden máximo 50**.

instancia	# mejora (%)	# empeora (%)	# iguala (%)
ABN 2500	5 (41,66%)	2 (16,66%)	5 (41,66%)
ABN 5000	10 (83,33%)	0 (0%)	2 (16,66%)
JND 2500	6 (50%)	1 (8,33%)	5 (41,66%)
JND 5000	10 (83,33%)	0 (0%)	2 (16,66%)
WABN 2500	5 (41,66%)	0 (0%)	7 (58,33%)
WABN 5000	9 (75%)	0 (0%)	3 (25%)

Más aún, en base a los resultados obtenidos (y cuya fuente de datos se encuentra en la [Sección 4](#) del [Apéndice C](#)) se pudieron observar los eventos que se destacan a continuación.

En la siguiente tabla se puede ver que:

- La primera columna representa la cantidad de casos en los que la **máxima mejora se obtiene en el orden máximo *infinito***.
- La segunda columna representa la cantidad de casos en los que habiéndose obtenido la mejor mejora en un orden máximo inferior a *infinito* la mejora de este último fue igual a la mejora máxima obtenida.
- La tercera columna representa la cantidad de casos en los que la mejora obtenida en las aproximaciones de orden máximo *infinito* fue inferior a la máxima obtenida.

instancia	# mejora (%)	# iguala (%)	# empeora (%)
ABN 2500	5 (41,66%)	2 (16,66%)	5 (41,66%)
ABN 5000	10 (83,33%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)
JND 2500	6 (50%)	2 (16,66%)	4 (33,33%)
JND 5000	10 (83,33%)	1 (8,33%)	1 (8,33%)
WABN 2500	5 (41,66%)	7 (58,33%)	0 (0%)
WABN 5000	9 (75%)	2 (16,66%)	1 (8,33%)
Total	45 (62,5%)	15 (20,83%)	12 (16,66%)

Como se puede observar son muchos los casos en donde se observa la máxima mejora en la ejecución de orden máximo infinito. Más aún, los comportamientos antes mencionados son mucho más notorios en las muestras de 5000 puntos que en las de 2500 puntos.

El hecho de que se obtengan mejoras considerables en órdenes de ejecución altos marca una diferencia importante entre GreedyMaxMin y GreedyMinMax. En este último caso se observó que las mejoras se obtienen generalmente en los órdenes de ejecución más bajos mientras que para el primero se consiguen mayoritariamente en las ejecuciones con orden máximo *infinito*.

No obstante, se pudo observar que cuando hay muchos mínimos en la triangulación de *Delaunay* original en las ejecuciones de órdenes más bajos es en donde se producen las máximas disminuciones de cantidad de mínimos.

Si se observa la imagen de la [Figura 7.76](#) se puede ver que tanto en las muestras de 2500 puntos como en las de 5000 puntos se obtienen mejoras considerables en las ejecuciones de orden máximo hasta 4.

2500								
terreno	muestra	cant min DT	cant min h/1	% mejora h/1	cant min h/4	% mejora h/4	cant min h/10	% mejora h/10
BH	terreno2	16	13	20,00%	7	60,00%	5	73,33%
CC	terreno1	3	1	100,00%	1	100,00%	1	100,00%
			promedio	60,00%		80,00%		86,67%
			desvío est	56,57%		28,28%		18,86%

5000								
terreno	muestra	cant min DT	cant min h/1	% mejora h/1	cant min h/4	% mejora h/4	cant min h/10	% mejora h/10
BH	terreno1	17	14	18,75%	3	87,50%	1	100,00%
BH	terreno2	16	13	20,00%	2	93,33%	1	100,00%
BH	terreno3	15	12	21,43%	2	92,86%	1	100,00%
CC	terreno1	13	10	25,00%	2	91,67%	1	100,00%
CC	terreno2	11	7	40,00%	2	90,00%	1	100,00%
CC	terreno3	7	4	50,00%	1	100,00%	1	100,00%
KS	terreno2	7	5	33,33%	1	100,00%	1	100,00%
KS	terreno3	14	11	23,08%	5	69,23%	2	92,31%
			promedio	28,95%		90,57%		99,04%
			desvío est	11,18%		9,69%		2,72%

FIGURA 7.76: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre muestreos aleatorios de 2500 y 5000 puntos de todos los terrenos. Se observan aquí la cantidad de mínimos presentes en la triangulación de *Delaunay* original y en las aproximaciones de orden máximo hasta 1, 4 y 10 con su correspondiente representación en porcentaje de mejora, promedio y desvío estándar de los mismos.

Se pudo observar el mismo comportamiento para todos los criterios y, dado que la cantidad de mínimos presentes en las muestras de 5000 puntos fue mayor que en las de 2500, se observa que este comportamiento es mucho más notorio en las muestras de mayor tamaño.

Adicionalmente, si se observan los datos presentados en la [Sección 4](#) del [Apéndice C](#) se puede ver que los porcentajes de mejora máximos no son tan altos como los observados

en las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum. Es decir que, no se logra maximizar tanto el mínimo valor del criterio como lo que se logra minimizar el máximo.

Si se observan los cocientes de las tablas de la sección indicada se puede ver que en la mayoría de los casos se encuentran muy cercanos a 1, lo que indica que el valor mínimo de la aproximación que más maximiza el mínimo valor del criterio tras ejecutar la heurística es muy cercano al observado en la triangulación de *Delaunay* original.

En las imágenes que se presentan a continuación se pueden observar tablas con las siguientes columnas:

- *orden max*: orden máximo de ejecución de la heurística.
- *orden final*: orden final de la aproximación obtenida en donde se la máxima mejora del valor objetivo.
- *minValue*: valor mínimo del criterio medido en la aproximación en donde se observó el máximo de mejora del valor objetivo.
- *cant min*: cantidad de mínimos observados en la aproximación antes mencionada.
- *cociente*: entre el valor mínimo del criterio medido en la aproximación antes mencionada y el mínimo observado en la triangulación de *Delaunay*. Cabe destacar que, dado que existen muchos valores mínimos iguales a *cero*, para realizar estos cálculos, se invirtió el intervalo de $[0.,180)$ a $[180.,0)$. Es por esto que, en este caso, cuando nos referimos al valor mínimo observado en una determinada triangulación en verdad nos estamos refiriendo a 180 menos dicho valor. Es decir que, cuanto más chico es el cociente mejor es la aproximación obtenida tras la ejecución de esta heurística.

Se destaca con:

- Color *verde*: el cociente medido en la aproximación resaltada cuando éste es menor que el de la aproximación obtenida tras ejecutar la misma heurística con orden máximo inferior. Es decir, cuando el valor mínimo de la aproximación actual es mayor que el de la aproximación de la fila anterior.
- Color *naranja*: el cociente medido en la aproximación resaltada cuando éste es mayor que el de la aproximación obtenida tras ejecutar la misma heurística con orden máximo inferior. Es decir, cuando se empeora la métrica objetivo respecto de la ejecución anterior.
- *Negrita*: aproximación en donde se observó el máximo de mejora del valor objetivo.

terreno1				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0	1	1
1	(0-ODT)	0	1	1
2	(0-ODT)	0	1	1
3	(3-ODT)	0,0126858	0,9999295233	1
4	(4-ODT)	0,00216074	0,9999879959	1
5	(4-ODT)	0,00216074	0,9999879959	1
6	(6-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
7	(7-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
8	(7-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
9	(9-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
10	(9-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
11	(11-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
12	(11-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
13	(11-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
14	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
15	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
16	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
17	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
18	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
19	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
20	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
21	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
22	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
23	(14-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
24	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
25	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
26	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
27	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
28	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
29	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
30	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
31	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
32	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
33	(24-ODT)	0,00977709	0,9999456828	1
34	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
35	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
36	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
37	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
38	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
39	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
40	(34-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
41	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
42	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
43	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
44	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
45	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
46	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
47	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
48	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
49	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
50	(41-ODT)	0,0285335	0,9998414806	1
infinito	(1548-ODT)	0,191034	0,9989387	1

FIGURA 7.77: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de BH.

terreno2				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0	1	16
1	(1-ODT)	0	1	13
2	(2-ODT)	0	1	10
3	(3-ODT)	0	1	8
4	(4-ODT)	0	1	7
5	(5-ODT)	0	1	5
6	(5-ODT)	0	1	5
7	(5-ODT)	0	1	5
8	(5-ODT)	0	1	5
9	(5-ODT)	0	1	5
10	(5-ODT)	0	1	5
11	(5-ODT)	0	1	5
12	(5-ODT)	0	1	5
13	(5-ODT)	0	1	5
14	(5-ODT)	0	1	5
15	(5-ODT)	0	1	5
16	(16-ODT)	0	1	2
17	(16-ODT)	0	1	2
18	(16-ODT)	0	1	2
19	(16-ODT)	0	1	2
20	(16-ODT)	0	1	2
21	(16-ODT)	0	1	2
22	(16-ODT)	0	1	2
23	(16-ODT)	0	1	2
24	(16-ODT)	0	1	2
25	(16-ODT)	0	1	2
26	(16-ODT)	0	1	2
27	(16-ODT)	0	1	2
28	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
29	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
30	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
31	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
32	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
33	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
34	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
35	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
36	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
37	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
38	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
39	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
40	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
41	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
42	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
43	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
44	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
45	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
46	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
47	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
48	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
49	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
50	(28-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1
infinito	(356-ODT)	0,00611017	0,9999660546	1

FIGURA 7.78: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de BH.

terreno3				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0,000886438	1	1
1	(0-ODT)	0,000886438	1	1
2	(2-ODT)	0,00254604	0,9999907799	1
3	(3-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
4	(4-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
5	(5-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
6	(5-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
7	(5-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
8	(5-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
9	(5-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
10	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
11	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
12	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
13	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
14	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
15	(10-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
16	(16-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
17	(16-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
18	(16-ODT)	0,0172975	0,999908827	1
19	(19-ODT)	0,0839991	0,9995382607	1
20	(19-ODT)	0,0839991	0,9995382607	1
21	(21-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
22	(21-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
23	(21-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
24	(21-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
25	(25-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
26	(25-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
27	(25-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
28	(25-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
29	(29-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
30	(30-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
31	(30-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
32	(30-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
33	(33-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
34	(33-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
35	(33-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
36	(36-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
37	(36-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
38	(36-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
39	(36-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
40	(40-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
41	(40-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
42	(40-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
43	(40-ODT)	0,085714	0,9995287334	1
44	(44-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
45	(44-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
46	(46-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
47	(46-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
48	(48-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
49	(49-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
50	(50-ODT)	0,209608	0,9988404301	1
infinito	(1689-ODT)	0,228725	0,998734224	1

FIGURA 7.79: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) de BH.

GreedyMaxSum

Al igual que en los casos anteriores se detectan variaciones en las magnitudes y comportamiento de las mejoras del valor objetivo dependiendo de la muestra tomada. Al igual que ocurría con la heurística GreedyMinSum, como el objetivo en el caso de GreedyMaxSum es la **maximización de la suma**, se pueden detectar casos en donde el *minValue* se minimice en lugar de maximizarse.

En la instancia de la ejecución de la heurística GreedyMaxSumABN sobre muestreos de 2500 puntos del terreno BH se pueden ver ejemplos de los comportamientos antes mencionados:

- Para el muestreo de nombre *terreno1* se puede observar en la [Figura 7.80](#) que hubo 4 instancias en las que la aproximación obtenida mejora el objetivo respecto a la aproximación de un orden máximo inferior. Estos casos fueron los órdenes finales 6, 11, 12 y 50. Así mismo, se puede ver que hubo 5 instancias en donde se empeoró el objetivo respecto al valor del criterio medido en la aproximación anterior. En 3 de ellas (7, 27 y 2436) si bien se hicieron cambios se igualó el *minValue* al de la triangulación de *Delaunay* original en lugar de maximizarse. En este caso en particular la máxima mejora del *minValue* se obtiene en la aproximación de orden máximo y final 12.
- Para el muestreo de nombre *terreno2* se puede observar en la [Figura 7.81](#) que, a diferencia del caso anterior, se producen muchos cambios (algunos mejorando y otros empeorando) en la cantidad mínimos, pero nunca logra alterarse el *minValue* respecto a la triangulación de *Delaunay*. En este caso se obtiene la aproximación que más maximizó el mínimo (bajó la cantidad de mínimos de 16 a 1) en el orden máximo y final 46.
- Para el muestreo de nombre *terreno3* se puede observar en la [Figura 7.82](#) que hubo 3 instancias en las que la aproximación obtenida mejora el objetivo respecto a la aproximación de un orden máximo inferior y 2 instancias en las que se empeoró. En una de estas últimas (la que corresponde a la ejecución con orden máximo 15) se puede ver que no sólo se empeora la métrica respecto a la ejecución de orden máximo 14 sino que además el cociente resultante es mayor que 1, lo que implica que el *minValue* se minimizó respecto al observado en la triangulación de *Delaunay* original.

terreno1				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0	1	1
1	(1-ODT)	0	1	1
2	(2-ODT)	0	1	1
3	(3-ODT)	0	1	1
4	(4-ODT)	0	1	1
5	(5-ODT)	0	1	1
6	(6-ODT)	0,00568785	0,999968401	1
7	(7-ODT)	0	1	1
8	(8-ODT)	0	1	1
9	(9-ODT)	0	1	1
10	(10-ODT)	0	1	1
11	(11-ODT)	0,00568785	0,999968401	1
12	(12-ODT)	0,0062405	0,999965331	1
13	(13-ODT)	0,0062405	0,999965331	1
14	(14-ODT)	0,0062405	0,999965331	1
15	(15-ODT)	0,0062405	0,999965331	1
16	(16-ODT)	0,00538549	0,999970081	1
17	(17-ODT)	0,00538549	0,999970081	1
18	(18-ODT)	0,00538549	0,999970081	1
19	(19-ODT)	0,00538549	0,999970081	1
20	(20-ODT)	0,00538549	0,999970081	1
21	(21-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
22	(22-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
23	(23-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
24	(24-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
25	(25-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
26	(26-ODT)	0,00289614	0,99998391	1
27	(27-ODT)	0	1	1
28	(28-ODT)	0	1	1
29	(29-ODT)	0	1	1
30	(30-ODT)	0	1	1
31	(31-ODT)	0	1	1
32	(32-ODT)	0	1	1
33	(33-ODT)	0	1	1
34	(34-ODT)	0	1	1
35	(35-ODT)	0	1	1
36	(36-ODT)	0	1	1
37	(37-ODT)	0	1	1
38	(38-ODT)	0	1	1
39	(39-ODT)	0	1	1
40	(40-ODT)	0	1	1
41	(41-ODT)	0	1	1
42	(42-ODT)	0	1	1
43	(43-ODT)	0	1	1
44	(44-ODT)	0	1	1
45	(45-ODT)	0	1	1
46	(46-ODT)	0	1	1
47	(47-ODT)	0	1	1
48	(48-ODT)	0	1	1
49	(49-ODT)	0	1	1
50	(50-ODT)	0,00464457	0,999974197	1
infinito	(2436-ODT)	0	1	1

FIGURA 7.80: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) de BH.

terreno2				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0	1	16
1	(1-ODT)	0	1	14
2	(2-ODT)	0	1	16
3	(3-ODT)	0	1	16
4	(4-ODT)	0	1	16
5	(5-ODT)	0	1	10
6	(6-ODT)	0	1	10
7	(7-ODT)	0	1	8
8	(8-ODT)	0	1	8
9	(9-ODT)	0	1	8
10	(10-ODT)	0	1	7
11	(11-ODT)	0	1	5
12	(12-ODT)	0	1	6
13	(13-ODT)	0	1	7
14	(14-ODT)	0	1	11
15	(15-ODT)	0	1	9
16	(16-ODT)	0	1	6
17	(17-ODT)	0	1	6
18	(18-ODT)	0	1	4
19	(19-ODT)	0	1	5
20	(20-ODT)	0	1	8
21	(21-ODT)	0	1	8
22	(22-ODT)	0	1	4
23	(23-ODT)	0	1	7
24	(24-ODT)	0	1	7
25	(25-ODT)	0	1	3
26	(26-ODT)	0	1	3
27	(27-ODT)	0	1	3
28	(28-ODT)	0	1	2
29	(29-ODT)	0	1	3
30	(30-ODT)	0	1	3
31	(31-ODT)	0	1	2
32	(32-ODT)	0	1	2
33	(33-ODT)	0	1	3
34	(34-ODT)	0	1	2
35	(35-ODT)	0	1	3
36	(36-ODT)	0	1	4
37	(37-ODT)	0	1	4
38	(38-ODT)	0	1	3
39	(39-ODT)	0	1	3
40	(40-ODT)	0	1	3
41	(41-ODT)	0	1	3
42	(42-ODT)	0	1	3
43	(43-ODT)	0	1	3
44	(44-ODT)	0	1	3
45	(45-ODT)	0	1	2
46	(46-ODT)	0	1	1
47	(47-ODT)	0	1	1
48	(48-ODT)	0	1	1
49	(49-ODT)	0	1	1
50	(50-ODT)	0	1	1
infinito	(2435-ODT)	0	1	1

FIGURA 7.81: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) de BH.

terreno3				
orden max	orden final	minValue	cociente	cantMin
0	(DT)	0,000886438	1	1
1	(1-ODT)	0,000886438	1	1
2	(2-ODT)	0,000886438	1	1
3	(3-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
4	(4-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
5	(5-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
6	(6-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
7	(7-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
8	(8-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
9	(9-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
10	(10-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
11	(11-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
12	(12-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
13	(13-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
14	(14-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
15	(15-ODT)	0,000394435	1,000002733	1
16	(16-ODT)	0,000394435	1,000002733	1
17	(17-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
18	(18-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
19	(19-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
20	(20-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
21	(21-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
22	(22-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
23	(23-ODT)	0,000955286	0,999999618	1
24	(24-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
25	(25-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
26	(26-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
27	(27-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
28	(28-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
29	(29-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
30	(30-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
31	(31-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
32	(32-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
33	(33-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
34	(34-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
35	(35-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
36	(36-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
37	(37-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
38	(38-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
39	(39-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
40	(40-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
41	(41-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
42	(42-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
43	(43-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
44	(44-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
45	(45-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
46	(46-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
47	(47-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
48	(48-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
49	(49-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
50	(50-ODT)	0,00119586	0,999998281	1
infinito	(2444-ODT)	0,00119586	0,999998281	1

FIGURA 7.82: Cuadro correspondiente la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio ABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) de BH.

Se puede ver además que los cocientes de las mejores aproximaciones dieron aún más altos que en el caso de la heurística GreedyMaxMin, lo que indica que el *min Value* no se maximizó tanto en esta heurística. Es decir que, el porcentaje de mejora fue más bajo para GreedyMaxSum que para GreedyMaxMin.

No obstante, si se observan los datos presentados en la [Sección 4](#) del [Apéndice C](#) se puede ver que las mejores mejoras del *min Value* se obtienen en aproximaciones de orden máximo más bajos que para el caso de la heurística GreedyMaxMin. Más aún, se puede ver que sólo en un 36,11% de los casos fue necesario llegar al orden máximo *infinito* para obtener la aproximación que más maximice el *min Value* respecto a la triangulación de *Delaunay* original. Este porcentaje es más bajo que el observado para la heurística GreedyMaxMin que, en base a lo analizado en la sección anterior, fue de 62,5%.

Análisis y resultados generales

En base a todo lo evidenciado y los resultados obtenidos tras la ejecución de todas las heurísticas antes mencionadas se puede realizar el siguiente análisis:

▪ GreedyMinMax

- Se pudo observar que la magnitud y comportamiento del porcentaje de mejora del *maxValue* para un mismo terreno y un mismo criterio varía dependiendo de la muestra aleatoria sobre la que se ejecutó la heurística (tanto variando el tamaño de la misma como dentro de muestras de un mismo).
- Si bien en la mayoría de los casos se observó una tendencia creciente del porcentaje de mejora en función del orden máximo y final de ejecución, hubo casos en donde se incrementó el orden de la triangulación pero el porcentaje de mejora disminuyó.
- Tanto para ABN como para JND los porcentajes máximos de mejora se observaron dentro de los órdenes máximos más bajos. Para WABN si bien en algunos casos se observaron mejoras considerables en órdenes bajos se requirieron ejecuciones de órdenes más altos (incluso *infinito*) para obtener los porcentajes máximos de mejora.
- Se observó que en general el comportamiento (no así las magnitudes) del criterio ABN fue similar al del JND.

▪ GreedyMinSum

- Presentó un comportamiento muy similar a GreedyMinMax en lo que respecta a las variaciones de la magnitud y comportamiento del porcentaje de mejora del *maxValue* en función de la muestra seleccionada.
- A diferencia de GreedyMinMax, en algunos casos empeoró el *maxValue*, lo cual puede ocurrir ya que el objetivo de esta heurística es minimizar la suma y no el valor máximo del criterio.
- Se observaron porcentajes de mejora del *maxValue* más pequeños que en GreedyMinMax, lo cual se relaciona con lo mencionado en el *item* anterior. No obstante, en la gran mayoría de los casos los porcentajes de mejora se encontraron en aproximaciones con orden final pequeño para todos los criterios.

▪ GreedyMaxMin

- Al igual que en los casos anteriores, se pudo observar que la magnitud y comportamiento del grado de mejora del *minValue*, en las aproximaciones obtenidas tras ejecutar esta heurística para un mismo terreno y un mismo

criterio, varía dependiendo de la muestra aleatoria sobre la que se ejecutó dicha heurística.

- La mayoría de los casos en los que se obtienen las mejoras máximas corresponden a ejecuciones de orden máximo *infinito*. No obstante, la reducción de la cantidad de mínimos ocurre mayoritariamente en los órdenes más bajos.
- Los porcentajes de mejora máximos no son tan altos como los observados en las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum.

▪ GreedyMaxSum

- Al igual que en los casos anteriores se detectan variaciones en las magnitudes y comportamiento de las mejoras del valor objetivo dependiendo de la muestra tomada.
- Al igual que ocurría con la heurística GreedyMinSum, como el objetivo en el caso de GreedyMaxSum es la maximización de la suma, se pueden detectar casos en donde el *min Value* se minimice en lugar de maximizarse.
- El porcentaje de mejora fue más bajo para GreedyMaxSum que para GreedyMaxMin, pero se alcanzó en órdenes máximos más bajos.

Como conclusión más general, se puede decir que las heurísticas del tipo GreedyMax* requieren orden altos para obtener mejoras, y por ende las HODTs no sirven para ellas, ya que fueron diseñadas para dar triángulos con *buena forma*, que son por lo general se opone a lo que buscan las heurísticas de tipo GreedyMax*.

7.2.5. Slivers

En esta sección se presentan algunos resultados (con su correspondiente análisis) sobre la presencia de triángulos angostos y largos (denominados *slivers*) en las aproximaciones obtenidas tras ejecutar los algoritmos sobre los terrenos antes especificados.

Un resultado que se pudo obtener en base a las observaciones realizadas es que la presencia de *slivers* en las aproximaciones obtenidas no depende del orden de la triangulación sino de los *flips* que se realizan.

Se puede ver por ejemplo que, en la ejecución con orden máximo *infinito* de la heurística GreedyMinMax con el criterio WABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH, si bien la aproximación obtenida posee un orden final alto (518) como se realizan únicamente 2 *flips* la triangulación queda muy similar a la triangulación de *Delaunay* original, por lo que la mayoría de sus triángulos poseen *buena forma*. Es decir que, este es un ejemplo de un caso en el que teniendo una triangulación de orden alto no se detecta presencia de muchos *slivers* en la misma. Se puede ver la imagen de la triangulación obtenida en la [Figura 7.83](#).

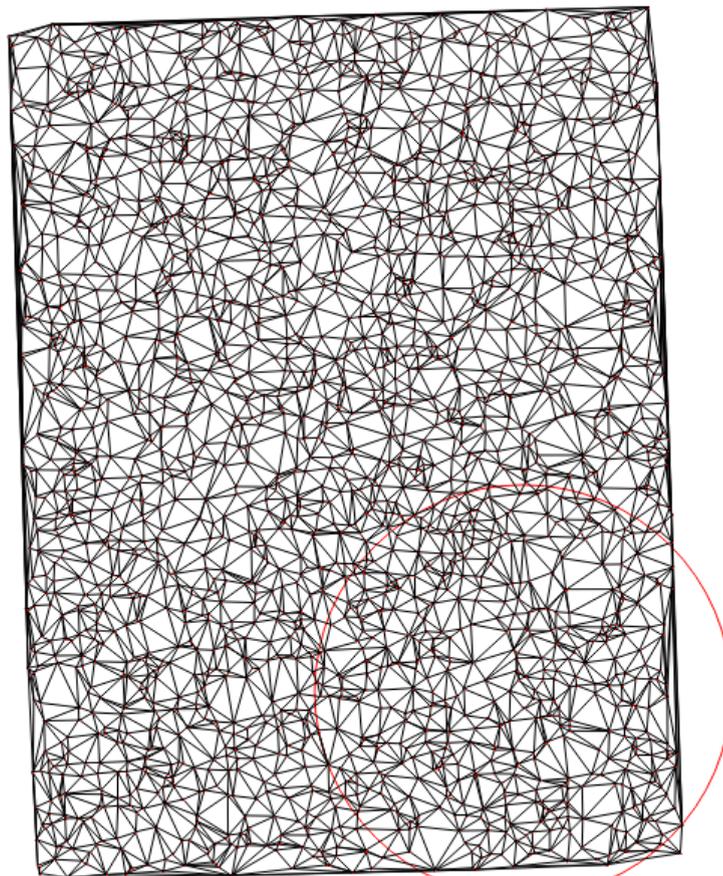


FIGURA 7.83: Imagen correspondiente a la triangulación de orden 518 obtenida tras la ejecución con orden máximo *infinito* de la heurística GreedyMinMax con el criterio WABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH. Se destaca con rojo el círculo circunscrito por los 3 puntos del triángulo que determina el orden final de la triangulación.

Se encontraron casos (sobre todo en las heurísticas GreedyMinSum y GreedyMaxSum) en donde, al realizarse muchos *flips*, las triangulaciones obtenidas contienen triángulos que no preservan la *buena forma* de los mismos característica de la triangulación de *Delaunay* original. Se puede ver un ejemplo de esto en la ejecución con orden máximo *infinito* de la heurística GreedyMaxSum con el criterio ABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de BH. En la imagen de la [Figura 7.84 \(a\)](#) se puede observar la triangulación de *Delaunay* original de este caso y en la imagen de la [Figura 7.84 \(b\)](#) la de la aproximación obtenida tras realizarse 3550 *flips*. En estas imágenes se puede observar la diferencia en la forma de los triángulos de las respectivas triangulaciones.

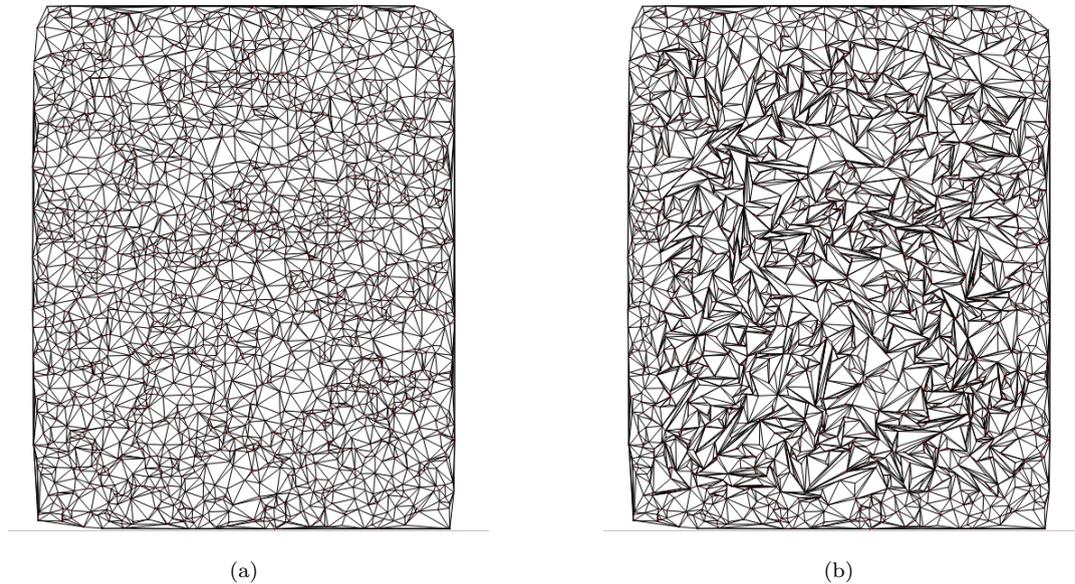


FIGURA 7.84: (a) Triangulación de *Delaunay* del muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de BH.
 (b) Triangulación de orden 2436 obtenida tras la ejecución con orden máximo *infinito* de la heurística GreedyMaxSum con el criterio ABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de BH.

No obstante, más allá de que existan casos en donde al realizarse muchos *flips* las aproximaciones obtenidas contengan *slivers*, hay casos en donde incrementar la cantidad de intercambios de ejes no altera tanto la forma de los triángulos. Se puede observar un ejemplo de este caso en la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH en donde:

- Para la instancia de ejecución de orden máximo *infinito* se realizan 28 *flips* y se obtiene una triangulación de orden final 71 cuya imagen se encuentra en la [Figura 7.87](#).
- Para la instancia de ejecución de orden máximo 9 se realizan 65 *flips* (más que en el caso anterior) y se obtiene una triangulación de orden final 9 cuya imagen se encuentra en la [Figura 7.86](#).

En ambos casos se observa que, más allá de la cantidad de *flips* realizados y del orden final de la triangulación obtenida, la forma de los triángulos de las aproximaciones finales no distan mucho de la observada en la triangulación de *Delaunay* original (ver [Figura 7.85](#)).

En base a todo lo evidenciado y los resultados obtenidos se puede realizar el siguiente análisis:

- La presencia de *slivers* en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de los algoritmos mencionados no depende del orden de la triangulación sino de los *flips* que se realizan. No obstante, la cantidad de *flips* no es un factor determinante de la presencia de *slivers*. Hubo casos en donde se realizaron muchos *flips* y se encontraron *slivers* y casos en donde no.
- Por lo general, la presencia de *slivers* se vio más notoria en las aproximaciones obtenidas tras la ejecución de las heurísticas GreedyMinSum y GreedyMaxSum ya que en estos casos se realizan muchos más *flips* que en los casos de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMaxMin.

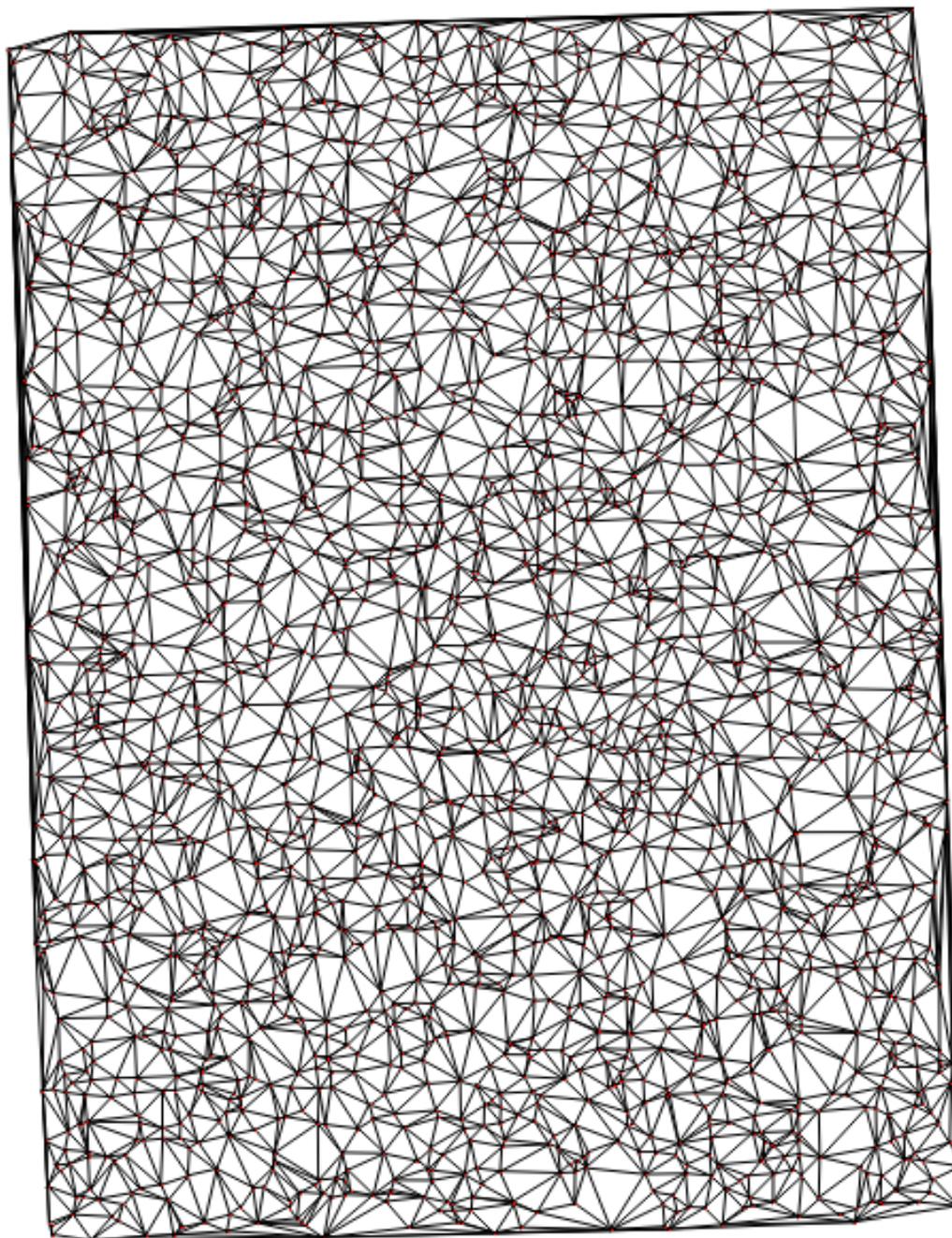


FIGURA 7.85: Imagen correspondiente a la triangulación de *Delaunay* del muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH.

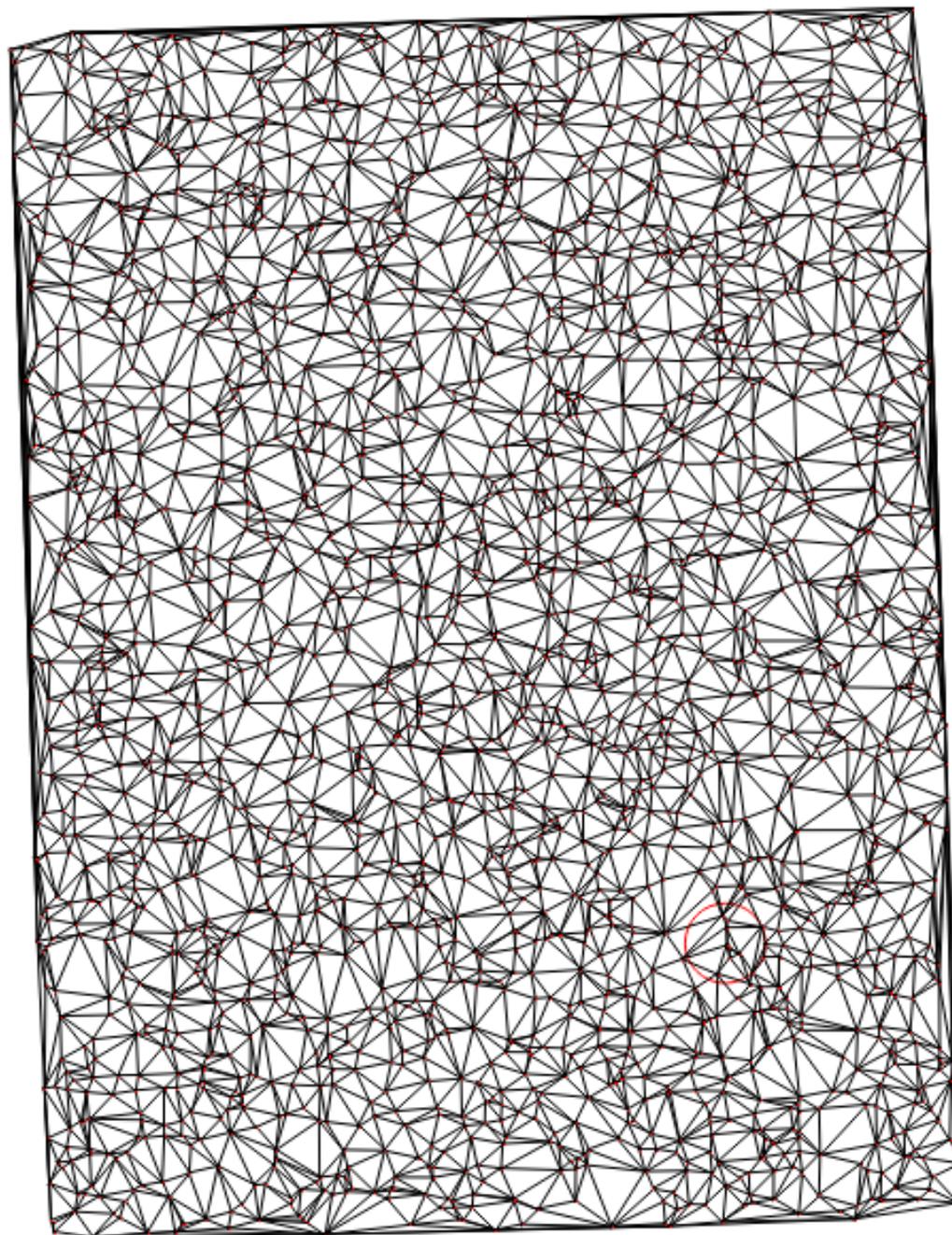


FIGURA 7.86: Imagen correspondiente a la triangulación de alto orden obtenida tras la ejecución con orden máximo 9 de la heurística GreedyMaxMin con el criterio ABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH.

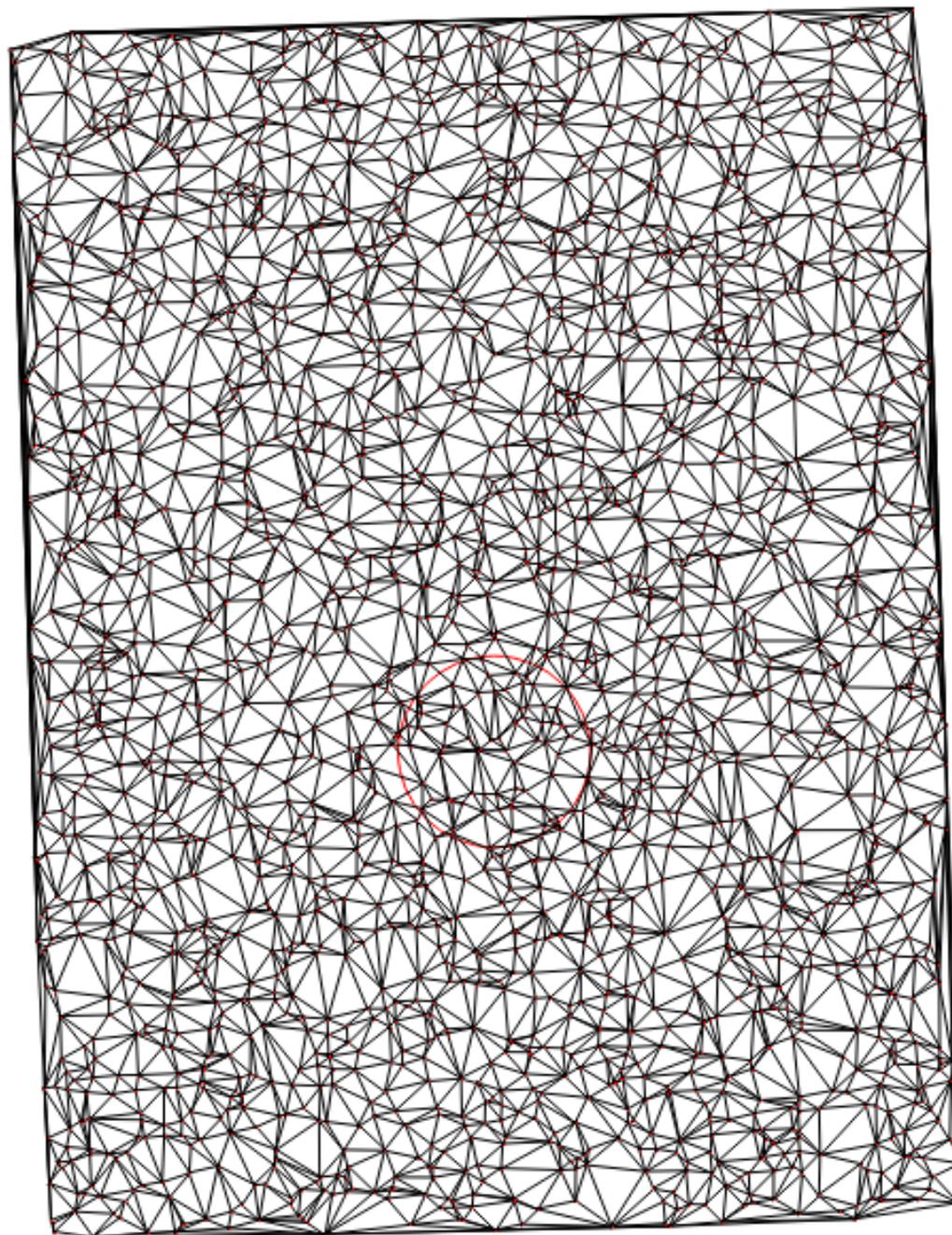


FIGURA 7.87: Imagen correspondiente a la triangulación de alto orden obtenida tras la ejecución con orden máximo *infinito* de la heurística GreedyMaxMin con el criterio ABN sobre el muestreo de 2500 puntos (*terreno1*) de MH.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta sección se presentan las conclusiones del trabajo experimental realizado así como también las conclusiones generales del trabajo realizado y el trabajo futuro que surge de esta tesis.

8.1. Conclusiones sobre el trabajo experimental

Como ya se ha mencionado con anterioridad, las triangulaciones de alto orden brindan una solución de compromiso entre la calidad de los triángulos, la cantidad de triangulaciones posibles y el costo computacional para generarlas. Son precisamente estos conceptos algunos de los que se analizan en esta sección.

Así mismo, se presentan aquí las respuestas a los interrogantes planteados como objetivo del presente trabajo elaboradas en base al análisis de resultados presentado en la sección anterior.

Como vimos en los experimentos realizados sobre terrenos reales en este trabajo, a medida que el orden (k) de la triangulación aumenta la aproximación obtenida difiere más de la triangulación de *Delaunay* que le dio origen, pero hay más triangulaciones posibles. Más aún, si bien para órdenes relativamente pequeños la forma de los triángulos se mantiene más o menos *buena*, la cantidad de triangulaciones posibles no es mucha, por lo que las limitaciones para conseguir triangulaciones más fieles son más altas. No obstante, en base a los resultados obtenidos se pudo observar que en ciertos casos, para valores de k pequeños, se obtiene la mejor relación beneficio calidad ya que el porcentaje de mejora del valor objetivo es alto pero el costo computacional de generarlas es bajo, la deformación de la forma de los triángulos no es mucha y las métricas de error son mejores que las observadas en la triangulación de *Delaunay* original.

Se pudo ver que, por lo general, la calidad de los resultados obtenidos depende del muestreo de puntos del terreno seleccionado para triangular. Sobre este punto, es importante tener en cuenta que no es el objetivo encontrar una heurística o un criterio que sea óptimo para todas las triangulaciones, sino identificar cuáles son útiles en función de las características del terreno a modelar, pudiendo así elegir uno u otro para conseguir una representación más fiel que la que ofrece la triangulación de *Delaunay*.

Se pudo observar también que la implementación de los algoritmos que permiten construir triangulaciones de alto orden no resulta costosa si se realiza sobre la base de las herramientas que ya existen para la construcción de triangulaciones de *Delaunay*. Lo que sí es costoso en ciertos casos es su tiempo de ejecución. Para la implementación propuesta, se detectaron instancias en las que los tiempos de ejecución observados fueron elevados respecto al tiempo insumido en la construcción de la triangulación de *Delaunay* original. No obstante, esto no ocurrió en la mayoría de los casos, sobre todo para órdenes más bajos en donde los tiempos fueron aceptables. Cabe destacar que, no fue el objetivo del presente trabajo optimizar la complejidad temporal de ejecución de los algoritmos implementados y, por tanto, existen mejoras que se le pueden realizar al mismo para poder optimizar los tiempos de ejecución presentados.

Por otra parte, uno de los factores relevantes en el análisis de triangulaciones de alto orden es la presencia de *slivers* en las aproximaciones. Se pudo ver que, en muchos casos, se realizaron *flips* que permiten mejorar considerablemente el valor de los criterios a optimizar y que permiten obtener triangulaciones de órdenes altos que no sólo no contienen *slivers* sino que además mejoran alguna métrica de error respecto de la triangulación de *Delaunay* original.

En base a todo lo observado, los resultados obtenidos y el análisis realizado se pudieron elaborar las respuestas a los interrogantes planteados como objetivo del presente trabajo. Dichas respuestas son las que se presentan a continuación.

- ¿Qué mejoras se obtienen con el uso de HODTs en terrenos reales?

Las HODTs, por definición, permiten que cada triángulo de la triangulación pueda contener más de cero puntos dentro de la circunferencia circunscrita por sus tres puntos. Esto permite que, a diferencia de la triangulación de *Delaunay* que es única dado un conjunto de puntos no degenerado, existan muchas triangulaciones de alto orden para un mismo conjunto de puntos iniciales. Al existir varias triangulaciones posibles se puede elegir aquella que optimice algún criterio en particular.

Existen ciertas condiciones que se desea que no se pierdan en las triangulaciones de alto orden, como ser: la *buena forma* de los triángulos, el bajo costo computacional necesario para generarlas y valores bajos en las métricas de error de las

aproximaciones (métrica que se utiliza para medir la calidad de la aproximación obtenida).

Se pudo observar, en función de los resultados obtenidos, que se puede obtener triangulaciones de alto orden que mejoren en un alto porcentaje el valor del criterio que se desea optimizar, que preserven la *buena forma* de los triángulos de la triangulación de *Delaunay* original, que no sean muy costosas de calcular y que mejoren las métricas de error de la DT que les dio origen. Estas condiciones se dieron mayoritariamente en las ejecuciones de la heurística GreedyMinMax para todos los criterios, aunque WABN a veces presenta métricas de error no tan buenas como el resto de los criterios para algunos muestreos aleatorios.

El porcentaje de mejora del valor del criterio a optimizar y la calidad de las aproximaciones obtenidas varían dependiendo del muestreo de puntos inicial. Hubo instancias en que, para un mismo terreno, un mismo criterio, una misma heurística y muestreos aleatorios de un mismo tamaño, a veces se observan mejoras considerables y a veces no. Esto ocurrió en todos los terrenos y para todos los criterios.

El porcentaje de mejora del valor del criterio a optimizar y la calidad de las aproximaciones obtenidas fue considerablemente mejor en el caso de la heurística GreedyMinMax respecto del resto de las heurísticas implementadas. Para la heurística GreedyMaxMin, si bien se obtuvieron mejoras, los resultados no fueron tan buenos como los observados para GreedyMinMax. Para el caso de las heurísticas del tipo GreedyMinSum y GreedyMaxSum, si bien se implementaron como alternativa de minimización del *maxValue* y maximización del *minValue* respectivamente, no se obtuvieron mejores resultados que para las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMaxMin (según corresponda). Más aún, dejando de lado el porcentaje de mejora del valor objetivo, en lo que respecta a las métricas de error funcionaron incluso peor.

Para el caso de las ejecuciones de la heurística GreedyMinMax, que fue la que mejor funcionó en todos los casos, las mejoras considerables se obtienen en órdenes bajos de ejecución lo que implica, por lo general, que los costos computacionales de generación sean bajos y que las alteraciones de los triángulos sean menores, dada la poca cantidad de *flips* que por lo general se requieren. Más aún, para ABN y JND se pudo ver que, cuando el porcentaje máximo no se consigue hasta orden máximo 4, el porcentaje de mejora de estas últimas aproximaciones no dista mucho del máximo total obtenido.

- ¿Cuán complicado es utilizar HODTs en terrenos reales? Es decir, ¿cuán difícil es implementar los algoritmos necesarios para trabajar con HODTs?

La biblioteca [CGAL](#) es muy robusta y cuenta con una gran cantidad de métodos y clases ya implementados que permiten operar ampliamente con triangulaciones. Una vez comprendidas las herramientas utilizadas, no resultó complicado realizar la implementación de los algoritmos propuestos. No obstante, es importante destacar que la implementación presentada no cumple todos los estándares y condiciones requeridos para que sea incorporada como parte de la biblioteca. Dado que no nos interiorizamos respecto a estos requerimientos no podemos realizar una estimación del costo de esta tarea.

Otra aclaración importante, ya mencionada anteriormente, es que la implementación propuesta no se encuentra optimizada. Las optimizaciones pensadas para la implementación propuesta no se realizaron por una cuestión de tiempo y magnitud del presente trabajo pero entendemos que no debería ser muy complicado incorporarlas.

- ¿Cuán útiles son los algoritmos propuestos? ¿Existen algoritmos heurísticos que den resultados similares?

En base a los resultados obtenidos se puede realizar el siguiente análisis general respecto a la ejecución de las heurísticas implementadas:

- *GreedyMinMax*: si bien se obtuvieron mejoras en la mayoría de los casos, en los órdenes de ejecución más pequeños se alcanzó la mayor mejora. Esto es más notorio para los criterios ABN y JND que para WABN en donde, al aumentar el orden de ejecución, se mejoró el objetivo en algunas aproximaciones.
- *GreedyMinSum*: no minimiza tanto el *maxValue* como en el caso anterior aunque, si lo mejora, lo hace mayoritariamente en órdenes bajos. Por lo general, las métricas de error dieron peores que las observadas para GreedyMinMax.
- *GreedyMaxMin*: los porcentajes de mejora son bajos respecto a los observados en las aproximaciones obtenidas tras ejecutar los algoritmos del tipo GreedyMin*. Las mejores mejoras se obtienen mayoritariamente en los órdenes más altos (muchas en orden máximo *infinito*) salvo que haya muchos mínimos, en cuyo caso se disminuye la cantidad en los órdenes más pequeños.
- *GreedyMaxSum*: los porcentajes de mejora son aún más bajos que GreedyMaxMin, pero se alcanzaron en órdenes más bajos. En lo que respecta a las magnitudes de error, fue el que peor funcionó empeorando las métricas en la gran mayoría de los casos.

Es decir que, en la mayoría de los casos, se obtienen mejoras al ejecutar las heurísticas propuestas pero la que arrojó mejores resultados fue GreedyMinMax que ,por

lo general, produjo mejoras considerables tanto en el valor objetivo como en lo que respecta a las métricas de error.

Respecto a la similitud entre las heurísticas ejecutadas, las comparables (GreedyMinMax con GreedyMinSum y GreedyMaxMin con GreedyMaxSum) no se comportaron similares funcionando generalmente mejor GreedyMinMax y GreedyMaxMin en cada caso.

No obstante, se detectaron *comportamientos* similares en varios casos entre ABN y JND. No ocurrió lo mismo con las *magnitudes* ya que, a veces, para una misma instancia alguno mejoraba mucho mientras que el otro no lo hacía tanto o biceversa.

Incluso se pudo observar que, para el caso de orden 1, la heurística GreedyMinMax funciona muy bien respecto al algoritmo exacto implementado. Aunque este último posee un costo computacional de construcción más pequeño, se pudo ver que en muchos casos la heurística arroja el mismo valor máximo que el algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 con objetivo del tipo MinMax, comportándose igual o mejor en lo que a métricas de error respecta.

- ¿Cuáles son los criterios que más se benefician con el uso de HODTs?

Es importante destacar que todos los criterios aportaron mejoras. A veces para una misma instancia de ejecución un criterio produce mejoras en porcentaje más altas que otro pero quizás en otra instancia este comportamiento se invierte. No obstante, en lo que respecta a porcentaje de mejora y calidad de la aproximación obtenida se vieron levemente más favorecidas ABN y JND respecto de WABN, pero no por mucho. Esta diferencia es un poco más notoria en órdenes de ejecución más bajos.

Adicionalmente, se pudo ver que el comportamiento de los criterios depende más de la muestra aleatoria seleccionada que del terreno que se esté modelando.

- Y la pregunta más general: ¿son las HODTs realmente útiles en la práctica?

La respuesta a esta pregunta se relaciona y engloba todo lo analizado en las anteriores. Como respuesta general podríamos decir que: se pueden obtener triangulaciones de alto orden que mejoren algún criterio específico, con costo computacional de construcción bajo, que posean triángulos con *buena forma* y que mejoren alguna métrica de error particular respecto a la triangulación de *Delaunay* original. Esto es mucho más factible si lo que se desea es minimizar el máximo ya que GreedyMinMax arrojó buenos resultados.

8.2. Conclusiones sobre el trabajo de tesis

Durante mucho tiempo se han utilizado las triangulaciones de *Delaunay* en GIS como la alternativa más común para la construcción de TINs. Más allá de las ventajas teóricas conocidas sobre las triangulaciones de *Delaunay*, se sabe que las mismas no incorporan en su construcción ninguna información adicional sobre los puntos del conjunto que se está triangulando. Es por esto que se proponen como alternativa fuerte las triangulaciones dependientes de datos, las cuales utilizan para su construcción tanto información sobre la distribución de los puntos como métricas conocidas de los puntos en cuestión (por ejemplo, su altura).

Se sabe que la triangulación de *Delaunay* es única si el conjunto de puntos del cual se parte es no degenerado. Es por esto que fueron planteadas como extensión de la triangulación de *Delaunay* las triangulaciones de *Delaunay* de alto orden que, al relajar el criterio de que no haya puntos dentro de las circunferencias circunscritas por cada triángulo, pueden no ser únicas y permitir así la incorporación de ciertos criterios a su construcción, con el fin de obtener una mejor aproximación a la superficie que se está modelando.

Una forma de incorporar estos criterios es utilizando el *método de Lawson* que permite obtener triangulaciones localmente óptimas en función del criterio que se desee optimizar.

El presente trabajo incluye la implementación de un software capaz de leer datos de elevación y construir triangulaciones de alto orden que optimicen ciertos criterios. En particular, los criterios dependientes de datos seleccionados para ser implementados fueron: ABN, JND y WABN.

La idea general detrás de los algoritmos propuestos e implementados fue aplicar el *método de Lawson*, tomando como triangulación inicial la triangulación de *Delaunay* y, en cada paso, realizar los intercambios de ejes correspondientes (dependiendo el criterio que se desee optimizar) para así llegar a una triangulación de orden k localmente óptima respecto a dicho criterio.

El objetivo final del desarrollo realizado fue determinar, en base a pruebas sobre terrenos reales (de distintos tipos y características), qué efecto tiene el uso de HODTs en la práctica.

No se pudo encontrar, más allá de los resultados teóricos existentes respecto a las bondades de las HODTs en general, un resultado práctico que respalde sistemáticamente este marco teórico en todos los casos. Existen casos en los que se obtuvieron aproximaciones más fieles al terreno real que se está modelando que la triangulación de *Delaunay* original, pero no se observó esto en todos los casos. Más aún, y tal como los estudios

teóricos preveían, las HODTs fueron un poco más costosas de calcular y las representaciones en algunos casos presentaron *slivers* (aunque no tantos como se esperaba según la bibliografía consultada).

Se puede destacar que, de las heurísticas implementadas, GreedyMinMax fue la que mejor funcionó obteniendo mejoras considerables en los órdenes más bajos. Incluso se pudo ver que casi no valió la pena incrementar el orden máximo a infinito ya que el costo computacional de generar estas aproximaciones es mayor pero el porcentaje de mejora del valor objetivo no es considerable respecto al obtenido en orden máximo hasta 4.

Más aún, para el criterio ABN se pudo ver que el error de las aproximaciones obtenidas es menor que el de la triangulación de *Delaunay* original, tal como era de esperarse.

Tal como puedo observarse en los resultados, el éxito de las HODTs radica tanto en la elección de la función de costo seleccionada (que depende a su vez de las propiedades del terreno a triangular) como de la muestra aleatoria de puntos sobre la cual se construyen las triangulaciones. No obstante, resulta inverosímil pensar en encontrar una función de costo que funcione sistemáticamente bien en todos los casos.

Es decir que, en la mayoría de los casos el balance entre las mejoras obtenidas y el costo computacional que cuesta generar las triangulaciones de alto orden fue positivo ya que: se pueden obtener triangulaciones de alto orden que mejoren algún criterio específico, con costo computacional de construcción bajo, que posean triángulos con *buena forma* y que mejoren alguna métrica de error particular respecto a la triangulación de *Delaunay* original. Esto es mucho más factible si lo que se desea es minimizar el máximo ya que GreedyMinMax arrojó buenos resultados.

Trabajo futuro

La necesidad de acotar el alcance del trabajo presentado nos condujo a relegar ciertos aspectos que consideramos hubieran sido interesantes de explorar. Se presenta un detalle de los mismos a continuación.

Algo deseable, en función de los resultados obtenidos, es que las triangulaciones de *Delaunay* de alto orden sean parte de la implementación de la biblioteca CGAL para que estén disponibles para ser utilizadas públicamente. Para ello es necesario interiorizarse sobre los estándares que el código debe cumplir para poder incorporar la extensión de la triangulación de *Delaunay* a la biblioteca pública antes mencionada. Así mismo, vimos que ciertas optimizaciones que pueden mejorar los tiempos de construcción de las HODTs no fueron implementadas pero sería tanto deseable como factible mejorar el código para que las contemple.

Si bien se utilizó como esquema de construcción de triangulaciones el *método de Lawson*, sería interesante implementar VBLOP y así poder incorporar pruebas en base a terrenos reales para uno de los criterios relevantes en la literatura consultada: PLC. Sería interesante realizar estas implementaciones para poder evaluar el efecto que tienen las HODTs generadas a partir de la optimización de este criterio sobre los terrenos seleccionados en comparación con las mejoras obtenidas por el resto de los criterios (sobre todo ABN ya que PLC se presenta como alternativa viable a ABN que, en base a las pruebas presentadas por su autor, funciona en algunos casos mejor).

Según se pudo observar, en base a las pruebas realizadas, la selección de puntos original juega un papel fundamental en la calidad de las aproximaciones obtenidas. Ya Wang et al. en [8] habían sugerido no separar la etapa de selección de puntos de la etapa de construcción de las triangulaciones, sino realizar una combinación de estas etapas. Si bien este nos pareció un resultado interesante no fue implementado ya que, en este trabajo, nos concentramos en la etapa de triangulación y sus posteriores optimizaciones. Se puede tratar de explorar el camino de la combinación de las etapas antes mencionadas pero incorporando criterios en la etapa de construcción de triangulaciones.

Como vimos, hubo casos en que para muestras de 5000 puntos no se obtuvieron tan buenas mejoras como para muestras de 2500 puntos del mismo terreno. Intuitivamente, esto no debería ocurrir. Es razonable pensar que al aumentar el tamaño de la muestra se mejora la aproximación obtenida. No obstante el resultado observado no contradice este punto ya que los muestreos son aleatorios y no se encuentran relacionados. Hubiera sido deseable, para poder verificar este punto, que los muestreos aleatorios de 2500 puntos sean un subconjunto aleatorio de los muestreos aleatorios de 5000 puntos.

La innovación del trabajo presentado consiste en haber encarado desde el punto de vista práctico un problema ampliamente estudiado en forma teórica.

Apéndice A

Métricas de error

Para comparar la calidad de las diferentes aproximaciones construidas se pueden utilizar distintas funciones de error.

Se define \mathcal{G} , el conjunto de puntos que representa el *ground truth*. Sea t_i un punto de \mathcal{G} , y sea p_i el punto de la interpolación del terreno en esa coordenada (x, y) . Se definen siguientes funciones de error:

- *Root mean square error* (RMSE):

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - p_i)^2}{n}}$$

- *Mean absolute error* (MAE):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |t_i - p_i|$$

- \mathcal{L}_1 -error (\mathcal{L}_1):

$$\sum_{i=1}^n |t_i - p_i|$$

- \mathcal{L}_2 -error (\mathcal{L}_2):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - p_i)^2}$$

- \mathcal{L}_p -error (\mathcal{L}_p):

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (t_i - p_i)^p}$$

- \mathcal{L}_∞ -error (\mathcal{L}_∞):

$$\max(|(t_i - p_i)|)$$

Las métricas de error se utilizan en el presente trabajo para comparar la calidad de las triangulaciones obtenidas.

Apéndice B

Uso del ejecutable

El programa implementado construye un ejecutable (llamado `terrain`) que provee una interfaz interactiva para el usuario permitiéndole seleccionar ciertos parámetros. Se inicializa el ambiente dependiendo de estos parámetros, luego se realiza la optimización seleccionada, se imprimen por pantalla los resultados obtenidos y, adicionalmente, se guarda la triangulación final obtenida tras la ejecución del método seleccionado.

A continuación se detallan los posibles parámetros y algunas combinaciones utilizadas para la generación de los casos de pruebas utilizados en el presente trabajo:

```
Use: <order> <delaunayPointsFilePath> <testPointsFilePath> <Method>  
      <flipCondition> <flipCriteria> <errorMethod>
```

Method:

- 2) Greedy
- 5) Exact

flipCondition:

- 3) MaxMin
- 4) MinMax
- 5) SumMax (only with Method 2)
- 6) SumMin (only with Method 2)

flipCriteria:

- 1) ABN
- 2) WABN
- 3) JND

errorMethod:

- 1) RMSE
- 2) Mean Absolute Error

- 3) All
- 4) L1 Error
- 5) L2 Error

Donde `orden` es el máximo orden permitido (en caso de ser negativo el mismo no estará restringido), `delaunayPointsFilePath` es el *path* al archivo de puntos del terreno a optimizar en formato *CGAL*, y `testPointsFilePath` es el *path* al directorio donde están los archivos de cada *ground truth* (también en formato *CGAL*). El parámetro `errorMethod` se utiliza para decidir que métricas de error utilizar para comparar la calidad de las aproximaciones obtenidas luego de la ejecución de las optimizaciones seleccionadas.

Combinando los parámetros `method`, `flipCondition` y `flipCriteria` es posible ejecutar todas las heurísticas implementadas. Por ejemplo, para ejecutar la heurística *GreedyMaxMinAbn* los parámetros serían 2, 3 y 1 respectivamente y, para ejecutar el *ExactoMinMaxJnd*, se deben utilizar los parámetros 5, 4 y 3. Cabe destacar que, en este último caso, el valor de `orden` no es tenido en cuenta, dado que método exacto solo funciona para orden uno.

Apéndice C

Resultados de ejecución

Se incluyen en este apéndice el conjunto de tablas y resultados que complementan los cuadros y figuras presentados en el [Capítulo 7](#).

C.1. Tiempo de ejecución

Se presentan aquí las tablas de los resultados correspondientes a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos del terreno BH.

En estas tablas se puede observar que para un mismo terreno y una misma heurística los comportamientos de los parámetros medidos fueron completamente diferentes. Se puede ver que los tiempos varían ampliamente así como también la cantidad de flips, la cantidad de iteraciones y el orden de las triangulaciones finales en cada caso observándose, adicionalmente, una correlación entre el incremento del tiempo de ejecución y el incremento de la cantidad de iteraciones.

heurística	terreno1-abn-2500				
	orden max	orden final	tiempo	cant flips	iteraciones
GreedyMaxMin	infinito	(1548-ODT)	00:54:59	189	66
	0	(DT)	00:00:00	0	0
	1	(0-ODT)	00:00:12	0	1
	2	(0-ODT)	00:00:20	0	1
	3	(3-ODT)	00:02:27	10	6
	4	(4-ODT)	00:00:56	2	2
	5	(4-ODT)	00:01:01	2	2
	6	(6-ODT)	00:07:59	31	15
	7	(7-ODT)	00:07:50	31	14
	8	(7-ODT)	00:08:09	31	14
	9	(9-ODT)	00:08:24	31	14
	10	(9-ODT)	00:08:34	31	14
	11	(11-ODT)	00:08:51	31	14
	12	(11-ODT)	00:08:59	31	14
	13	(11-ODT)	00:09:08	31	14
	14	(14-ODT)	00:09:10	31	14
	15	(14-ODT)	00:09:20	31	14
	16	(14-ODT)	00:09:28	31	14
	17	(14-ODT)	00:09:29	31	14
	18	(14-ODT)	00:09:34	31	14
	19	(14-ODT)	00:09:40	31	14
	20	(14-ODT)	00:09:39	31	14
	21	(14-ODT)	00:09:45	31	14
	22	(14-ODT)	00:09:51	31	14
	23	(14-ODT)	00:09:52	31	14
	24	(24-ODT)	00:03:33	9	5
	25	(24-ODT)	00:03:34	9	5
	26	(24-ODT)	00:03:35	9	5
	27	(24-ODT)	00:03:36	9	5
	28	(24-ODT)	00:03:36	9	5
	29	(24-ODT)	00:03:38	9	5
	30	(24-ODT)	00:03:38	9	5
	31	(24-ODT)	00:03:39	9	5
	32	(24-ODT)	00:03:40	9	5
	33	(24-ODT)	00:03:39	9	5
	34	(34-ODT)	00:10:59	32	15
	35	(34-ODT)	00:11:03	32	15
	36	(34-ODT)	00:11:02	32	15
	37	(34-ODT)	00:11:05	32	15
	38	(34-ODT)	00:11:06	32	15
	39	(34-ODT)	00:11:11	32	15
	40	(34-ODT)	00:11:15	32	15
	41	(41-ODT)	00:11:11	32	15
	42	(41-ODT)	00:11:11	32	15
	43	(41-ODT)	00:11:14	32	15
	44	(41-ODT)	00:11:20	32	15
	45	(41-ODT)	00:11:19	32	15
	46	(41-ODT)	00:11:17	32	15
	47	(41-ODT)	00:11:23	32	15
	48	(41-ODT)	00:11:22	32	15
	49	(41-ODT)	00:11:22	32	15
50	(41-ODT)	00:11:31	32	15	

FIGURA C.1: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno1*) del terreno BH.

		terreno2-abn-2500			
heurística	orden max	orden final	tiempo	cant flips	iteraciones
GreedyMaxMin	infinito	(356-ODT)	00:02:33	14	3
	0	(DT)	00:00:00	0	0
	1	(1-ODT)	00:00:23	2	2
	2	(2-ODT)	00:00:39	4	2
	3	(3-ODT)	00:00:49	6	2
	4	(4-ODT)	00:01:23	7	3
	5	(5-ODT)	00:01:31	8	3
	6	(5-ODT)	00:01:38	8	3
	7	(5-ODT)	00:01:41	8	3
	8	(5-ODT)	00:01:45	8	3
	9	(5-ODT)	00:01:48	8	3
	10	(5-ODT)	00:01:50	8	3
	11	(5-ODT)	00:01:53	8	3
	12	(5-ODT)	00:01:57	8	3
	13	(5-ODT)	00:01:57	8	3
	14	(5-ODT)	00:01:58	8	3
	15	(5-ODT)	00:02:01	8	3
	16	(16-ODT)	00:02:02	10	3
	17	(16-ODT)	00:02:02	10	3
	18	(16-ODT)	00:02:04	10	3
	19	(16-ODT)	00:02:05	10	3
	20	(16-ODT)	00:02:06	10	3
	21	(16-ODT)	00:02:06	10	3
	22	(16-ODT)	00:02:07	10	3
	23	(16-ODT)	00:02:08	10	3
	24	(16-ODT)	00:02:08	10	3
	25	(16-ODT)	00:02:09	10	3
	26	(16-ODT)	00:02:09	10	3
	27	(16-ODT)	00:02:10	10	3
	28	(28-ODT)	00:02:54	14	4
	29	(28-ODT)	00:02:55	14	4
	30	(28-ODT)	00:02:55	14	4
	31	(28-ODT)	00:02:56	14	4
	32	(28-ODT)	00:02:57	14	4
	33	(28-ODT)	00:02:57	14	4
	34	(28-ODT)	00:02:58	14	4
	35	(28-ODT)	00:02:59	14	4
	36	(28-ODT)	00:02:59	14	4
	37	(28-ODT)	00:02:58	14	4
	38	(28-ODT)	00:02:59	14	4
	39	(28-ODT)	00:03:02	14	4
	40	(28-ODT)	00:03:01	14	4
	41	(28-ODT)	00:03:00	14	4
	42	(28-ODT)	00:03:00	14	4
	43	(28-ODT)	00:03:02	14	4
	44	(28-ODT)	00:03:03	14	4
	45	(28-ODT)	00:03:02	14	4
	46	(28-ODT)	00:03:03	14	4
	47	(28-ODT)	00:03:03	14	4
	48	(28-ODT)	00:03:03	14	4
	49	(28-ODT)	00:03:03	14	4
50	(28-ODT)	00:03:03	14	4	

FIGURA C.2: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno2*) del terreno BH.

		terreno3-abn-2500			
heurística	orden max	orden final	tiempo	cant flips	iteraciones
GreedyMaxMin	infinito	(1689-ODT)	01:08:44	232	83
	0	(DT)	00:00:00	0	0
	1	(0-ODT)	00:00:12	0	1
	2	(2-ODT)	00:00:57	2	3
	3	(3-ODT)	00:03:13	15	8
	4	(4-ODT)	00:03:15	14	7
	5	(5-ODT)	00:03:32	14	7
	6	(5-ODT)	00:03:45	14	7
	7	(5-ODT)	00:03:55	14	7
	8	(5-ODT)	00:04:05	14	7
	9	(5-ODT)	00:04:12	14	7
	10	(10-ODT)	00:04:18	14	7
	11	(10-ODT)	00:04:21	14	7
	12	(10-ODT)	00:04:26	14	7
	13	(10-ODT)	00:04:30	14	7
	14	(10-ODT)	00:04:36	14	7
	15	(10-ODT)	00:04:36	14	7
	16	(16-ODT)	00:04:40	14	7
	17	(16-ODT)	00:04:47	14	7
	18	(16-ODT)	00:04:46	14	7
	19	(19-ODT)	00:24:31	85	36
	20	(19-ODT)	00:24:53	85	36
	21	(21-ODT)	00:24:53	87	36
	22	(21-ODT)	00:25:07	87	36
	23	(21-ODT)	00:25:12	87	36
	24	(21-ODT)	00:25:15	87	36
	25	(25-ODT)	00:25:23	87	36
	26	(25-ODT)	00:25:36	87	36
	27	(25-ODT)	00:25:37	87	36
	28	(25-ODT)	00:25:55	87	36
	29	(29-ODT)	00:25:45	87	36
	30	(30-ODT)	00:25:49	87	36
	31	(30-ODT)	00:26:04	87	36
	32	(30-ODT)	00:26:01	87	36
	33	(33-ODT)	00:24:39	86	34
	34	(33-ODT)	00:24:44	86	34
	35	(33-ODT)	00:25:02	86	34
	36	(36-ODT)	00:24:54	86	34
	37	(36-ODT)	00:25:04	86	34
	38	(36-ODT)	00:25:01	86	34
	39	(36-ODT)	00:25:04	86	34
	40	(40-ODT)	00:25:21	86	34
	41	(40-ODT)	00:25:30	86	34
	42	(40-ODT)	00:25:16	86	34
	43	(40-ODT)	00:25:19	86	34
	44	(44-ODT)	00:57:24	209	78
	45	(44-ODT)	00:57:43	209	78
	46	(46-ODT)	00:58:01	209	78
	47	(46-ODT)	00:57:36	209	78
	48	(48-ODT)	00:57:48	209	78
	49	(49-ODT)	00:57:07	208	77
50	(50-ODT)	00:57:24	207	77	

FIGURA C.3: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de 2500 puntos (*terreno3*) del terreno BH.

C.2. Análisis del algoritmo exacto para 1-ODT

Se presentan aquí las tablas correspondientes a los resultados obtenidos en función de las ejecuciones de los algoritmos:

- GreedyMinMax con orden máximo: infinito, 0 y 1.
- GreedyMinSum con orden máximo: infinito, 0 y 1.
- ExactoMinMax: ejecución del algoritmo exacto para triangulaciones de orden 1 para criterios del tipo MinMax.

Los algoritmos antes descriptos se ejecutaron para todos los criterios implementados (ABN, JND y WABN) y para todos los terrenos (BH, CC, KS, MH) con 3 muestras aleatorias de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 3 de 5000 puntos (siguiendo la misma nomenclatura) para cada uno de ellos.

Las métricas que se muestran en las tablas corresponden a los errores RMSE y MAE, al valor máximo del criterio optimizado (*maxValue*) y al *orden final* de la triangulación obtenida luego de la ejecución del algoritmo correspondiente.

Adicionalmente se calcularon los siguientes porcentajes:

- % *heurística*: mide el porcentaje de mejora del error o el valor máximo del criterio (según corresponda) de la heurística GreedyMinMax con orden máximo 1 respecto al valor correspondiente en la triangulación de *Delaunay* original.
- % *exacto*: mide el porcentaje de mejora del error o el valor máximo del criterio (según corresponda) del algoritmo ExactoMinMax respecto al valor correspondiente en la triangulación de *Delaunay* original.
- % *heurística*: mide el porcentaje de mejora del error o el valor máximo del criterio (según corresponda) de la heurística GreedyMinMax con orden máximo infinito respecto al valor correspondiente en la triangulación de *Delaunay* original.

En todos los casos la celda se resalta: con color verde si el porcentaje que contiene representa una mejora, sin color si es cero y naranja si el porcentaje refleja que la aplicación del algoritmo emporó el valor observado.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(33-ODT)	14,1324	8,66508	52,3671
	0	(DT)	14,0262	8,64291	62,5564
	1	(1-ODT)	13,9686	8,62291	59,5169
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	14,1094	8,69521	59,5169
% heurística			-0,41066005	-0,231403543	-4,858815405
% exacto			0,593175628	0,605120266	-4,858815405
% infinito			0,757154468	0,256510828	-16,28818154
GreedyMin Sum	infinito	(1030-ODT)	14,0106	8,57404	68,3901
	0	(DT)	14,0262	8,64291	62,5564
	1	(1-ODT)	13,9697	8,58753	62,5564

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(16-ODT)	13,4473	8,3463	39,5724
	0	(DT)	13,4963	8,37646	71,8395
	1	(1-ODT)	13,4942	8,37277	53,747
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,8091	8,49223	53,747
% heurística			-0,01555982	-0,044052022	-25,18461292
% exacto			2,317672251	1,382087421	-25,18461292
% infinito			-0,363062469	-0,360056635	-44,91554089
GreedyMin Sum	infinito	(1624-ODT)	13,3145	8,20792	51,5358
	0	(DT)	13,4963	8,37646	71,8395
	1	(1-ODT)	13,5131	8,33131	53,747

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(113-ODT)	13,3795	8,49077	48,6684
	0	(DT)	13,3867	8,49136	53,8354
	1	(1-ODT)	13,3781	8,48899	50,1847
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,2806	8,45556	50,1847
% heurística			-0,064242868	-0,027910723	-6,781225736
% exacto			-0,792577708	-0,42160502	-6,781225736
% infinito			-0,053784727	-0,006948239	-9,597773955
GreedyMin Sum	infinito	(1776-ODT)	13,0732	8,25665	51,2855
	0	(DT)	13,3867	8,49136	53,8354
	1	(1-ODT)	13,2601	8,4055	51,2855

FIGURA C.4: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(4-ODT)	25,6831	16,8599	68,5315
	0	(DT)	25,6943	16,8677	78,3965
	1	(1-ODT)	25,6831	16,8599	68,9994
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	25,9193	16,9404	68,9994
% heurística			-0,043589434	-0,046242226	-11,98663206
% exacto			0,875680598	0,431001263	-11,98663206
% infinito			-0,043589434	-0,046242226	-12,58346993
GreedyMin Sum	infinito	(1730-ODT)	25,0525	16,2975	77,6662
	0	(DT)	25,6943	16,8677	78,3965
	1	(1-ODT)	25,8307	16,8565	78,1323

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(10-ODT)	22,0245	15,6085	53,473
	0	(DT)	22,078	15,6354	77,6397
	1	(1-ODT)	22,1015	15,6474	58,13
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,2906	15,8118	58,13
% heurística			0,106440801	0,076748916	-25,12851029
% exacto			0,962949543	1,128209064	-25,12851029
% infinito			-0,242322674	-0,172045487	-31,12673027
GreedyMin Sum	infinito	(2424-ODT)	21,678	15,1967	69,885
	0	(DT)	22,078	15,6354	77,6397
	1	(1-ODT)	21,715	15,4281	60,5668

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	22,9151	15,8571	90,4108
	0	(DT)	22,9151	15,8571	102,333
	1	(1-ODT)	22,9151	15,8572	74,8107
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	23,0641	16,0223	73,8271
% heurística			0	0,000630632	-26,89484331
% exacto			0,65022627	1,041804617	-27,85601907
% infinito			0	0	-11,65039626
GreedyMin Sum	infinito	(1172-ODT)	22,3681	15,4495	80,014
	0	(DT)	22,9151	15,8571	102,333
	1	(1-ODT)	22,7297	15,7125	74,8107

FIGURA C.5: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(194-ODT)	21,8757	14,7588	70,8658
	0	(DT)	21,908	14,779	81,5883
	1	(1-ODT)	21,8701	14,752	65,2821
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	21,7837	14,6939	65,2821
% heurística			-0,172996166	-0,182691657	-19,98595387
% exacto			-0,567372649	-0,575817038	-19,98595387
% infinito			-0,147434727	-0,136680425	-13,14220299
GreedyMin Sum	infinito	(2058-ODT)	21,7325	14,5521	71,549
	0	(DT)	21,908	14,779	81,5883
	1	(1-ODT)	21,7865	14,6093	65,2821

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(7-ODT)	22,5181	15,2297	58,7423
	0	(DT)	22,497	15,2178	78,8596
	1	(0-ODT)	22,497	15,2178	78,8596
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,7565	15,2846	78,8596
% heurística			0	0	0
% exacto			1,153487132	0,438959639	0
% infinito			0,093790283	0,0781979	-25,51027396
GreedyMin Sum	infinito	(2231-ODT)	22,1422	14,7051	69,7209
	0	(DT)	22,497	15,2178	78,8596
	1	(1-ODT)	22,498	15,0745	78,8596

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(38-ODT)	22,2629	15,3789	53,4083
	0	(DT)	22,256	15,3747	72,7596
	1	(0-ODT)	22,256	15,3747	72,7596
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,2518	15,3884	72,7596
% heurística			0	0	0
% exacto			-0,018871316	0,08910743	0
% infinito			0,031002876	0,027317606	-26,59621548
GreedyMin Sum	infinito	(1078-ODT)	21,4627	14,7919	59,8668
	0	(DT)	22,256	15,3747	72,7596
	1	(1-ODT)	22,0567	15,2475	72,7596

FIGURA C.6: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(12-ODT)	8,62073	6,59071	23,1188
	0	(DT)	8,63538	6,5977	33,2053
	1	(0-ODT)	8,63538	6,5977	33,2053
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,6429	6,63121	33,2053
% heurística			0	0	0
% exacto			0,087083603	0,50790427	0
% infinito			-0,169650901	-0,105946011	-30,37617489
GreedyMin Sum	infinito	(1604-ODT)	8,55735	6,47709	25,5411
	0	(DT)	8,63538	6,5977	33,2053
	1	(1-ODT)	8,53611	6,5353	34,5616

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(14-ODT)	8,55875	6,45769	34,9392
	0	(DT)	8,5593	6,45796	38,7411
	1	(1-ODT)	8,55379	6,45482	35,6572
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,55948	6,49801	35,6572
% heurística			-0,064374423	-0,048622166	-7,960279909
% exacto			0,002102976	0,620164882	-7,960279909
% infinito			-0,006425759	-0,004180887	-9,813608803
GreedyMin Sum	infinito	(1523-ODT)	8,46084	6,28093	35,9843
	0	(DT)	8,5593	6,45796	38,7411
	1	(1-ODT)	8,46207	6,37558	35,9843

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	8,83022	6,75579	27,3641
	0	(DT)	8,82739	6,75272	38,6128
	1	(1-ODT)	8,826	6,75073	30,461
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,94323	6,80769	30,461
% heurística			-0,015746444	-0,029469606	-21,11165209
% exacto			1,312279167	0,814042341	-21,11165209
% infinito			0,032059306	0,045463162	-29,13204948
GreedyMin Sum	infinito	(1477-ODT)	8,88588	6,73363	33,7856
	0	(DT)	8,82739	6,75272	38,6128
	1	(1-ODT)	8,83319	6,72778	30,461

FIGURA C.7: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(17-ODT)	10,7298	6,86103	57,5989
	0	(DT)	10,7324	6,86501	86,9108
	1	(1-ODT)	10,7286	6,86022	65,3694
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,7965	6,92901	65,3694
% heurística			-0,035406806	-0,069774115	-24,78564229
% exacto			0,597256904	0,932263755	-24,78564229
% infinito			-0,024225709	-0,057975152	-33,72641835
GreedyMin Sum	infinito	(4770-ODT)	10,6846	6,76592	64,0602
	0	(DT)	10,7324	6,86501	86,9108
	1	(1-ODT)	10,7693	6,86145	67,6401

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(17-ODT)	10,728	6,86033	57,5989
	0	(DT)	10,7314	6,86441	86,9098
	1	(1-ODT)	10,7276	6,86052	65,3764
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,7955	6,92869	65,3764
% heurística			-0,035410105	-0,056669109	-24,77672253
% exacto			0,597312559	0,936424252	-24,77672253
% infinito			-0,031682725	-0,059437009	-33,72565579
GreedyMin Sum	infinito	(4770-ODT)	10,6836	6,76642	64,0592
	0	(DT)	10,7314	6,86441	86,9098
	1	(1-ODT)	10,7663	6,86131	67,6399

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(13-ODT)	10,5033	6,62884	59,8366
	0	(DT)	10,4943	6,62246	74,8134
	1	(1-ODT)	10,494	6,62151	66,0535
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,6855	6,7483	66,0535
% heurística			-0,002858695	-0,014345123	-11,70899866
% exacto			1,821941435	1,900200228	-11,70899866
% infinito			0,085760842	0,096338823	-20,01887362
GreedyMin Sum	infinito	(4767-ODT)	10,3122	6,45009	74,8134
	0	(DT)	10,4943	6,62246	74,8134
	1	(1-ODT)	10,5672	6,62974	74,8134

FIGURA C.8: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(3-ODT)	16,1999	11,3224	79,2927
	0	(DT)	16,1953	11,3206	96,3544
	1	(1-ODT)	16,1926	11,3171	80,477
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,2008	11,3575	80,477
% heurística			-0,016671503	-0,030917089	-16,47812658
% exacto			0,03396047	0,325954455	-16,47812658
% infinito			0,028403302	0,015900217	-17,70723496
GreedyMin Sum	infinito	(2575-ODT)	15,4786	10,8961	89,27
	0	(DT)	16,1953	11,3206	96,3544
	1	(1-ODT)	15,9328	11,1357	89,27

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(10-ODT)	17,5013	11,9672	74,5414
	0	(DT)	17,4785	11,957	79,7882
	1	(1-ODT)	17,4979	11,9637	74,7353
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,8235	12,2085	74,7353
% heurística			0,110993506	0,056034122	-6,33289133
% exacto			1,973853592	2,103370411	-6,33289133
% infinito			0,130445976	0,085305679	-6,575909721
GreedyMin Sum	infinito	(3714-ODT)	17,2009	11,6335	74,7353
	0	(DT)	17,4785	11,957	79,7882
	1	(1-ODT)	17,4772	11,9184	74,7353

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	17,4595	12,1689	63,3133
	0	(DT)	17,4548	12,1615	90,883
	1	(0-ODT)	17,4548	12,1615	90,883
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,6685	12,3219	90,883
% heurística			0	0	0
% exacto			1,224305062	1,318916252	0
% infinito			0,026926691	0,060847757	-30,33537625
GreedyMin Sum	infinito	(2978-ODT)	16,894	11,6878	96,8074
	0	(DT)	17,4548	12,1615	90,883
	1	(1-ODT)	17,4481	12,1265	90,883

FIGURA C.9: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(8-ODT)	16,2661	11,287	85,0608
	0	(DT)	16,2679	11,2887	87,2495
	1	(1-ODT)	16,2654	11,2861	80,8043
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,5086	11,4802	80,8043
% heurística			-0,015367687	-0,023031881	-7,387091044
% exacto			1,479600932	1,696386652	-7,387091044
% infinito			-0,011064735	-0,015059307	-2,508553058
GreedyMin Sum	infinito	(3405-ODT)	16,0673	10,9748	79,3805
	0	(DT)	16,2679	11,2887	87,2495
	1	(1-ODT)	16,19	11,1635	80,8043

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(1-ODT)	17,4846	11,8975	77,9893
	0	(DT)	17,4908	11,9041	110,909
	1	(1-ODT)	17,4846	11,8975	77,9893
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,5032	11,9768	77,9893
% heurística			-0,035447207	-0,055443083	-29,68172105
% exacto			0,070894413	0,610713956	-29,68172105
% infinito			-0,035447207	-0,055443083	-29,68172105
GreedyMin Sum	infinito	(2249-ODT)	16,932	11,4286	77,9893
	0	(DT)	17,4908	11,9041	110,909
	1	(1-ODT)	17,0356	11,6753	77,9893

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(10-ODT)	16,4048	11,451	80,3098
	0	(DT)	16,4048	11,451	90,7882
	1	(1-ODT)	16,4048	11,451	84,4675
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,6095	11,6184	84,4675
% heurística			0	0	-6,962028105
% exacto			1,24780552	1,461881058	-6,962028105
% infinito			0	0	-11,541588
GreedyMin Sum	infinito	(3262-ODT)	16,1131	11,174	81,4176
	0	(DT)	16,4048	11,451	90,7882
	1	(1-ODT)	16,4186	11,4267	90,1581

FIGURA C.10: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(92-ODT)	6,9368	5,11475	62,466
	0	(DT)	6,93704	5,11527	65,7059
	1	(0-ODT)	6,93704	5,11527	65,7059
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	6,99778	5,17867	65,7059
% heurística			0	0	0
% exacto			0,875589589	1,239426267	0
% infinito			-0,003459689	-0,010165641	-4,930911836
GreedyMin Sum	infinito	(2394-ODT)	6,9262	5,0064	62,466
	0	(DT)	6,93704	5,11527	65,7059
	1	(1-ODT)	6,89021	5,05648	65,7059

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(1-ODT)	7,01101	5,16511	44,6399
	0	(DT)	7,01161	5,16551	53,121
	1	(1-ODT)	7,01101	5,16511	44,6399
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	7,12555	5,24079	44,6399
% heurística			-0,008557236	-0,007743669	-15,96562565
% exacto			1,625019076	1,457358518	-15,96562565
% infinito			-0,008557236	-0,007743669	-15,96562565
GreedyMin Sum	infinito	(4281-ODT)	6,9153	4,98486	46,6578
	0	(DT)	7,01161	5,16551	53,121
	1	(1-ODT)	7,01068	5,13952	45,0075

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(3-ODT)	6,79253	4,97534	50,221
	0	(DT)	6,79253	4,97534	59,3484
	1	(1-ODT)	6,79253	4,97534	52,0029
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	6,80834	4,98174	52,0029
% heurística			0	0	-12,37691328
% exacto			0,232755689	0,128634425	-12,37691328
% infinito			0	0	-15,37935311
GreedyMin Sum	infinito	(3189-ODT)	6,64755	4,80115	53,5754
	0	(DT)	6,79253	4,97534	59,3484
	1	(1-ODT)	6,75039	4,91895	59,3484

FIGURA C.11: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio ABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(33-ODT)	14,0628	8,65318	50,0425
	0	(DT)	14,0262	8,64291	59,4892
	1	(1-ODT)	14,0343	8,65065	56,6892
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	14,1624	8,71382	56,6892
% heurística			0,05774907	0,089553171	-4,706736685
% exacto			0,971039911	0,820441263	-4,706736685
% infinito			0,26094024	0,11882572	-15,87968909
GreedyMin Sum	infinito	(1030-ODT)	14,0016	8,56067	59,1838
	0	(DT)	14,0262	8,64291	59,4892
	1	(1-ODT)	13,9697	8,58753	59,4892

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(15-ODT)	13,4628	8,35384	37,8742
	0	(DT)	13,4963	8,37646	58,397
	1	(1-ODT)	13,4942	8,37277	51,7969
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,8091	8,49223	51,7969
% heurística			-0,01555982	-0,044052022	-11,30212168
% exacto			2,317672251	1,382087421	-11,30212168
% infinito			-0,248216178	-0,270042476	-35,14358614
GreedyMin Sum	infinito	(1624-ODT)	13,3032	8,18299	49,8159
	0	(DT)	13,4963	8,37646	58,397
	1	(1-ODT)	13,5149	8,33285	51,7969

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(113-ODT)	13,3795	8,49077	47,079
	0	(DT)	13,3867	8,49136	50,6425
	1	(1-ODT)	13,3882	8,49572	48,2698
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,2806	8,45556	48,2698
% heurística			0,011205151	0,05134631	-4,685195241
% exacto			-0,792577708	-0,42160502	-4,685195241
% infinito			-0,053784727	-0,006948239	-7,036579948
GreedyMin Sum	infinito	(1776-ODT)	13,0723	8,25345	49,5492
	0	(DT)	13,3867	8,49136	50,6425
	1	(1-ODT)	13,2601	8,4055	49,5492

FIGURA C.12: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	25,6829	16,859	58,7812
	0	(DT)	25,6943	16,8677	65,8254
	1	(1-ODT)	25,6825	16,8647	56,07
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	26,0333	17,0634	56,07
% heurística			-0,045924582	-0,017785472	-14,82011503
% exacto			1,319358768	1,1602056	-14,82011503
% infinito			-0,044367817	-0,051577868	-10,70134021
GreedyMin Sum	infinito	(1730-ODT)	25,165	16,3812	62,6603
	0	(DT)	25,6943	16,8677	65,8254
	1	(1-ODT)	25,8387	16,8632	63,1196

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(10-ODT)	22,0767	15,6322	51,3645
	0	(DT)	22,078	15,6354	71,0657
	1	(1-ODT)	22,0841	15,6263	52,9579
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,2899	15,8091	52,9579
% heurística			0,027629314	-0,058201261	-25,48036535
% exacto			0,959778965	1,110940558	-25,48036535
% infinito			-0,005888215	-0,020466378	-27,72251593
GreedyMin Sum	infinito	(2424-ODT)	21,7222	15,2617	63,0581
	0	(DT)	22,078	15,6354	71,0657
	1	(1-ODT)	21,6944	15,4288	57,7046

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	22,9151	15,8571	71,7969
	0	(DT)	22,9151	15,8571	83,9254
	1	(1-ODT)	22,9151	15,8571	69,3705
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	23,0641	16,0223	66,382
% heurística			0	0	-17,34266384
% exacto			0,65022627	1,041804617	-20,90356436
% infinito			0	0	-14,45152481
GreedyMin Sum	infinito	(1172-ODT)	22,4201	15,4652	72,759
	0	(DT)	22,9151	15,8571	83,9254
	1	(1-ODT)	22,7142	15,6857	69,3705

FIGURA C.13: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(194-ODT)	21,8721	14,7559	55,2874
	0	(DT)	21,908	14,779	73,7954
	1	(1-ODT)	21,8768	14,7613	60,698
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	21,7837	14,6939	60,698
% heurística			-0,14241373	-0,119764531	-17,74826073
% exacto			-0,567372649	-0,575817038	-17,74826073
% infinito			-0,163867081	-0,156302862	-25,08015405
GreedyMin Sum	infinito	(2058-ODT)	21,9057	14,6425	65,8512
	0	(DT)	21,908	14,779	73,7954
	1	(1-ODT)	21,8116	14,6264	60,698

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(731-ODT)	22,5179	15,2292	56,3935
	0	(DT)	22,497	15,2178	69,8999
	1	(0-ODT)	22,497	15,2178	69,8999
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,7565	15,2846	69,8999
% heurística			0	0	0
% exacto			1,153487132	0,438959639	0
% infinito			0,092901276	0,074912274	-19,3224883
GreedyMin Sum	infinito	(2231-ODT)	22,1837	14,7162	62,8009
	0	(DT)	22,497	15,2178	69,8999
	1	(1-ODT)	22,4998	15,0764	69,8999

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(49-ODT)	22,2619	15,3761	49,8665
	0	(DT)	22,256	15,3747	67,9648
	1	(0-ODT)	22,256	15,3747	67,9648
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,268	15,3739	67,9648
% heurística			0	0	0
% exacto			0,053918045	-0,005203354	0
% infinito			0,026509705	0,009105869	-26,62893145
GreedyMin Sum	infinito	(1078-ODT)	21,4815	14,7961	57,1265
	0	(DT)	22,256	15,3747	67,9648
	1	(1-ODT)	22,0625	15,26	67,9648

FIGURA C.14: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(3-ODT)	8,62092	6,58866	24,6646
	0	(DT)	8,63538	6,5977	31,5159
	1	(0-ODT)	8,63538	6,5977	31,5159
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,6429	6,63121	31,5159
% heurística			0	0	0
% exacto			0,087083603	0,50790427	0
% infinito			-0,167450651	-0,137017445	-21,73918562
GreedyMin Sum	infinito	(1604-ODT)	8,56319	6,48566	25,33
	0	(DT)	8,63538	6,5977	31,5159
	1	(1-ODT)	8,53611	6,5353	33,6812

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(14-ODT)	8,55875	6,45769	32,8952
	0	(DT)	8,5593	6,45796	36,9689
	1	(1-ODT)	8,5593	6,45796	34,4737
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,55948	6,49801	34,4737
% heurística			0	0	-6,749456976
% exacto			0,002102976	0,620164882	-6,749456976
% infinito			-0,006425759	-0,004180887	-11,01926214
GreedyMin Sum	infinito	(1523-ODT)	8,46234	6,28341	33,9401
	0	(DT)	8,5593	6,45796	36,9689
	1	(1-ODT)	8,46207	6,37558	34,4737

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	8,82618	6,75064	26,3462
	0	(DT)	8,82739	6,75272	35,7288
	1	(1-ODT)	8,826	6,75073	29,925
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,94323	6,80769	29,925
% heurística			-0,015746444	-0,029469606	-16,24403842
% exacto			1,312279167	0,814042341	-16,24403842
% infinito			-0,013707336	-0,030802403	-26,26060769
GreedyMin Sum	infinito	(1477-ODT)	8,88588	6,73363	31,7179
	0	(DT)	8,82739	6,75272	35,7288
	1	(1-ODT)	8,83319	6,72778	29,925

FIGURA C.15: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(17-ODT)	10,7248	6,85599	50,2291
	0	(DT)	10,7324	6,86391	78,7498
	1	(1-ODT)	10,7266	6,86199	56,1894
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,8011	6,92951	56,1894
% heurística			-0,054041966	-0,027972395	-28,64819974
% exacto			0,640117774	0,955723487	-28,64819974
% infinito			-0,070813611	-0,115386128	-36,21685388
GreedyMin Sum	infinito	(4770-ODT)	10,6789	6,77293	70,4501
	0	(DT)	10,7324	6,86391	78,7498
	1	(1-ODT)	10,7756	6,86699	63,4101

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(17-ODT)	10,7238	6,85669	50,2121
	0	(DT)	10,7314	6,86441	78,7578
	1	(1-ODT)	10,7276	6,86052	56,1924
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,8011	6,9315	56,1924
% heurística			-0,035410105	-0,056669109	-28,65163831
% exacto			0,649495872	0,977360035	-28,65163831
% infinito			-0,07082021	-0,112464145	-36,24491796
GreedyMin Sum	infinito	(4770-ODT)	10,679	6,77313	70,4692
	0	(DT)	10,7314	6,86441	78,7578
	1	(1-ODT)	10,7746	6,867	63,4091

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(2-ODT)	10,5228	6,62798	50,6456
	0	(DT)	10,4943	6,62246	62,8856
	1	(1-ODT)	10,494	6,62151	56,6207
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,6857	6,7486	56,6207
% heurística			-0,002858695	-0,014345123	-9,962376124
% exacto			1,823847231	1,904730266	-9,962376124
% infinito			0,271575998	0,083352712	-19,46391543
GreedyMin Sum	infinito	(4767-ODT)	10,3058	6,43932	62,8856
	0	(DT)	10,4943	6,62246	62,8856
	1	(1-ODT)	10,5667	6,62866	62,8856

FIGURA C.16: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(54-ODT)	16,2034	11,3242	63,193
	0	(DT)	16,1953	11,3206	85,0617
	1	(1-ODT)	16,1926	11,3171	71,3505
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,2048	11,3595	71,3505
% heurística			-0,016671503	-0,030917089	-16,11912294
% exacto			0,058658994	0,343621363	-16,11912294
% infinito			0,05001451	0,031800435	-25,70922048
GreedyMin Sum	infinito	(2575-ODT)	15,4946	10,907	80,4578
	0	(DT)	16,1953	11,3206	85,0617
	1	(1-ODT)	15,932	11,1331	78,8515

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(10-ODT)	17,5013	11,9672	66,5133
	0	(DT)	17,4785	11,957	73,0638
	1	(1-ODT)	17,496	11,9614	66,5133
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,8243	12,2103	66,5133
% heurística			0,100123008	0,036798528	-8,965452112
% exacto			1,978430643	2,118424354	-8,965452112
% infinito			0,130445976	0,085305679	-8,965452112
GreedyMin Sum	infinito	(3714-ODT)	17,1401	11,577	62,8819
	0	(DT)	17,4785	11,957	73,0638
	1	(1-ODT)	17,4785	11,9206	69,0356

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(4-ODT)	17,4636	12,1737	60,1331
	0	(DT)	17,4548	12,1615	81,6186
	1	(0-ODT)	17,4548	12,1615	81,6186
ExactoMinMax	1	(0-ODT)	17,4548	12,1615	81,6186
% heurística			0	0	0
% exacto			0	0	0
% infinito			0,050415931	0,100316573	-26,32426922
GreedyMin Sum	infinito	(2978-ODT)	16,9474	11,7377	78,7007
	0	(DT)	17,4548	12,1615	81,6186
	1	(1-ODT)	17,4449	12,1237	81,6186

FIGURA C.17: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(56-ODT)	16,2698	11,2916	66,8646
	0	(DT)	16,2679	11,2887	73,868
	1	(0-ODT)	16,2679	11,2887	73,868
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,5086	11,4802	73,868
% heurística			0	0	0
% exacto			1,479600932	1,696386652	0
% infinito			0,011679442	0,025689406	-9,480966048
GreedyMin Sum	infinito	(4564-ODT)	16,0143	10,9444	71,1376
	0	(DT)	16,2679	11,2887	73,868
	1	(1-ODT)	16,1889	11,1619	73,868

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(1-ODT)	17,4846	11,8975	68,5612
	0	(DT)	17,4908	11,9041	93,0093
	1	(1-ODT)	17,4846	11,8975	68,5612
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,5032	11,9768	68,5612
% heurística			-0,035447207	-0,055443083	-26,285651
% exacto			0,070894413	0,610713956	-26,285651
% infinito			-0,035447207	-0,055443083	-26,285651
GreedyMin Sum	infinito	(4043-ODT)	16,6844	11,3368	63,1762
	0	(DT)	17,4908	11,9041	93,0093
	1	(1-ODT)	17,0553	11,6858	68,5612

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(2-ODT)	16,4048	11,451	64,8781
	0	(DT)	16,4048	11,451	80,5079
	1	(1-ODT)	16,4048	11,451	70,546
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,6095	11,6184	70,546
% heurística			0	0	-12,37381673
% exacto			1,24780552	1,461881058	-12,37381673
% infinito			0	0	-19,4139954
GreedyMin Sum	infinito	(3262-ODT)	16,1338	11,1518	86,981
	0	(DT)	16,4048	11,451	80,5079
	1	(1-ODT)	16,4145	11,4254	73,6173

FIGURA C.18: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	6,9368	5,11475	50,8334
	0	(DT)	6,93704	5,11527	54,4121
	1	(1-ODT)	6,9368	5,11475	54,0715
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	6,99147	5,17453	54,0715
% heurística			-0,003459689	-0,010165641	-0,62596371
% exacto			0,784628602	1,158492123	-0,62596371
% infinito			-0,003459689	-0,010165641	-6,577029742
GreedyMin Sum	infinito	(2394-ODT)	6,92781	5,00633	54,4121
	0	(DT)	6,93704	5,11527	54,4121
	1	(1-ODT)	6,89565	5,06255	54,0715

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(1-ODT)	7,01098	5,16501	43,3004
	0	(DT)	7,01161	5,16551	50,5385
	1	(1-ODT)	7,01098	5,16501	43,3004
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	7,12555	5,24079	43,3004
% heurística			-0,008985098	-0,009679586	-14,32195257
% exacto			1,625019076	1,457358518	-14,32195257
% infinito			-0,008985098	-0,009679586	-14,32195257
GreedyMin Sum	infinito	(4281-ODT)	6,91867	4,9874	44,1549
	0	(DT)	7,01161	5,16551	50,5385
	1	(1-ODT)	7,01151	5,14054	43,3004

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(3-ODT)	6,79253	4,97534	45,5364
	0	(DT)	6,79253	4,97534	54,5386
	1	(1-ODT)	6,79253	4,97534	50,1319
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	6,82484	4,99686	50,1319
% heurística			0	0	-8,079965382
% exacto			0,475669596	0,432533254	-8,079965382
% infinito			0	0	-16,5061076
GreedyMin Sum	infinito	(3189-ODT)	6,6447	4,79758	46,9333
	0	(DT)	6,79253	4,97534	54,5386
	1	(1-ODT)	6,75168	4,92025	54,5386

FIGURA C.19: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio JND sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(24-ODT)	13,9666	8,60777	266,721
	0	(DT)	14,0262	8,64291	395,318
	1	(1-ODT)	14,0476	8,64942	314,982
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	14,2125	8,73494	314,982
% heurística			0,152571616	0,075321853	-20,32186746
% exacto			1,328228601	1,064803405	-20,32186746
% infinito			-0,42491908	-0,406576026	-32,53001381
GreedyMin Sum	infinito	(582-ODT)	13,8811	8,55587	439,193
	0	(DT)	14,0262	8,64291	395,318
	1	(1-ODT)	13,9276	8,58683	439,193

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(54-ODT)	13,4866	8,36951	318,237
	0	(DT)	13,4963	8,37646	447,29
	1	(1-ODT)	13,4942	8,37277	379,324
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,7093	8,46928	379,324
% heurística			-0,01555982	-0,044052022	-15,19506361
% exacto			1,578210324	1,108105333	-15,19506361
% infinito			-0,07187155	-0,08297061	-28,8521988
GreedyMin Sum	infinito	(476-ODT)	13,4628	8,28212	423
	0	(DT)	13,4963	8,37646	447,29
	1	(1-ODT)	13,498	8,35217	379,324

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(9-ODT)	13,3923	8,49369	308,025
	0	(DT)	13,3867	8,49136	317,556
	1	(0-ODT)	13,3867	8,49136	317,556
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	13,3343	8,48063	317,556
% heurística			0	0	0
% exacto			-0,391433288	-0,126363739	0
% infinito			0,041832565	0,027439656	-3,00136039
GreedyMin Sum	infinito	(1373-ODT)	13,2711	8,41182	375,81
	0	(DT)	13,3867	8,49136	317,556
	1	(1-ODT)	13,2836	8,44333	352,058

FIGURA C.20: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(61-ODT)	25,7489	16,9516	364,349
	0	(DT)	25,6943	16,8677	484,315
	1	(1-ODT)	25,6705	16,8546	436,656
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	26,0921	17,1041	436,656
% heurística			-0,092627548	-0,077663226	-9,840496371
% exacto			1,548203298	1,401495165	-9,840496371
% infinito			0,212498492	0,497400357	-24,77024251
GreedyMin Sum	infinito	(1174-ODT)	25,6811	16,6675	546,448
	0	(DT)	25,6943	16,8677	484,315
	1	(1-ODT)	25,8399	16,8629	484,82

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(38-ODT)	22,0933	15,6439	381,415
	0	(DT)	22,078	15,6354	536,182
	1	(1-ODT)	22,0961	15,6487	382,539
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,1561	15,7618	382,539
% heurística			0,081982064	0,085063382	-28,65500893
% exacto			0,35374581	0,808421914	-28,65500893
% infinito			0,069299755	0,054363815	-28,86463925
GreedyMin Sum	infinito	(2424-ODT)	21,5865	15,2879	504,027
	0	(DT)	22,078	15,6354	536,182
	1	(1-ODT)	21,7507	15,4617	418,039

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(91-ODT)	22,8968	15,8295	403,442
	0	(DT)	22,9151	15,8571	494,806
	1	(1-ODT)	22,888	15,8507	492,633
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,9723	15,9521	492,633
% heurística			-0,11826263	-0,040360469	-0,439162015
% exacto			0,249617065	0,599100718	-0,439162015
% infinito			-0,079860005	-0,174054524	-18,46461037
GreedyMin Sum	infinito	(529-ODT)	22,4132	15,453	554,111
	0	(DT)	22,9151	15,8571	494,806
	1	(1-ODT)	22,7797	15,7278	535,774

FIGURA C.21: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(3-ODT)	21,9085	14,7812	500,28
	0	(DT)	21,908	14,779	528,599
	1	(0-ODT)	21,908	14,779	528,599
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	21,7295	14,6478	528,599
% heurística			0	0	0
% exacto			-0,81477086	-0,887746126	0
% infinito			0,002282271	0,014885987	-5,357369197
GreedyMin Sum	infinito	(448-ODT)	21,7121	14,5796	536,262
	0	(DT)	21,908	14,779	528,599
	1	(1-ODT)	21,8067	14,6389	536,262

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(62-ODT)	22,4854	15,2025	502,828
	0	(DT)	22,497	15,2178	756,021
	1	(0-ODT)	22,497	15,2178	756,021
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,5258	15,1776	756,021
% heurística			0	0	0
% exacto			0,128017069	-0,264164334	0
% infinito			-0,051562431	-0,100540157	-33,49020728
GreedyMin Sum	infinito	(1046-ODT)	22,2646	14,8715	645,458
	0	(DT)	22,497	15,2178	756,021
	1	(1-ODT)	22,555	15,1095	807,15

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(350-ODT)	22,2909	15,4029	367,665
	0	(DT)	22,256	15,3747	409,005
	1	(0-ODT)	22,256	15,3747	409,005
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	22,3178	15,4324	409,005
% heurística			0	0	0
% exacto			0,27767793	0,375291876	0
% infinito			0,156811646	0,183418213	-10,1074559
GreedyMin Sum	infinito	(469-ODT)	22,0213	15,2187	849,183
	0	(DT)	22,256	15,3747	409,005
	1	(1-ODT)	22,1892	15,3083	411,746

FIGURA C.22: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(518-ODT)	8,63531	6,59757	169,144
	0	(DT)	8,63538	6,5977	178,846
	1	(0-ODT)	8,63538	6,5977	178,846
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,6226	6,62496	178,846
% heurística			0	0	0
% exacto			-0,147995803	0,413174288	0
% infinito			-0,000810619	-0,001970384	-5,42477886
GreedyMin Sum	infinito	(389-ODT)	8,65987	6,58545	178,846
	0	(DT)	8,63538	6,5977	178,846
	1	(1-ODT)	8,59597	6,57442	178,846

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(2-ODT)	8,56061	6,45865	290,593
	0	(DT)	8,5593	6,45796	300,53
	1	(1-ODT)	8,5605	6,45868	293,954
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,55757	6,46493	293,954
% heurística			0,014019838	0,011149032	-2,188134296
% exacto			-0,020211933	0,10792882	-2,188134296
% infinito			0,01530499	0,010684489	-3,306491864
GreedyMin Sum	infinito	(766-ODT)	8,6302	6,42767	363,803
	0	(DT)	8,5593	6,45796	300,53
	1	(1-ODT)	8,47196	6,40081	293,954

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(6-ODT)	8,81446	6,7467	120,696
	0	(DT)	8,82739	6,75272	133,587
	1	(1-ODT)	8,82481	6,75151	129,768
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	8,91536	6,81253	129,768
% heurística			-0,029227212	-0,017918705	-2,858811112
% exacto			0,996557306	0,885717163	-2,858811112
% infinito			-0,146475912	-0,089149261	-9,649891082
GreedyMin Sum	infinito	(564-ODT)	8,84257	6,69241	248,535
	0	(DT)	8,82739	6,75272	133,587
	1	(1-ODT)	8,8441	6,73807	174,094

FIGURA C.23: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(4-ODT)	10,7198	6,79599	282,967
	0	(DT)	10,7294	6,79591	376,029
	1	(0-ODT)	10,7294	6,79591	376,029
ExactoMinMax	1	(0-ODT)	10,7294	6,79591	376,029
% heurística			0	0	0
% exacto			0	0	0
% infinito			-0,089473782	0,001177179	-24,74862311
GreedyMin Sum	infinito	(812-ODT)	10,7697	6,79471	376,029
	0	(DT)	10,7294	6,79591	376,029
	1	(1-ODT)	10,7493	6,8001	376,029

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(4-ODT)	10,7278	6,86467	283,187
	0	(DT)	10,7314	6,86441	377,529
	1	(0-ODT)	10,7314	6,86441	377,529
ExactoMinMax	1	(0-ODT)	10,7314	6,86441	377,529
% heurística			0	0	0
% exacto			0	0	0
% infinito			-0,033546415	0,003787653	-24,98933857
GreedyMin Sum	infinito	(812-ODT)	10,776	6,84371	377,529
	0	(DT)	10,7314	6,86441	377,529
	1	(1-ODT)	10,7503	6,85007	377,529

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(61-ODT)	10,4417	6,61547	262,184
	0	(DT)	10,4943	6,62246	398,805
	1	(1-ODT)	10,4382	6,61192	338,272
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	10,5877	6,72186	338,272
% heurística			-0,534575913	-0,159155359	-15,17859606
% exacto			0,890006956	1,500952818	-15,17859606
% infinito			-0,501224474	-0,105549901	-34,25759456
GreedyMin Sum	infinito	(854-ODT)	10,4987	6,58599	378,354
	0	(DT)	10,4943	6,62246	398,805
	1	(1-ODT)	10,5865	6,63711	338,272

FIGURA C.24: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(1156-ODT)	16,1917	11,3176	348,654
	0	(DT)	16,1953	11,3206	499,558
	1	(0-ODT)	16,1953	11,3206	499,558
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,1263	11,2683	499,558
% heurística			0	0	0
% exacto			-0,426049533	-0,461989647	0
% infinito			-0,022228671	-0,026500362	-30,20750343
GreedyMin Sum	infinito	(1514-ODT)	15,89	11,0473	483,304
	0	(DT)	16,1953	11,3206	499,558
	1	(1-ODT)	15,9217	11,1523	499,558

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(103-ODT)	17,474	11,9494	394,731
	0	(DT)	17,4785	11,957	609,598
	1	(0-ODT)	17,4785	11,957	609,598
ExactoMinMax	1	(0-ODT)	17,4785	11,957	609,598
% heurística			0	0	0
% exacto			0	0	0
% infinito			-0,025745916	-0,063561094	-35,24732693
GreedyMin Sum	infinito	(570-ODT)	17,3382	11,7951	416,838
	0	(DT)	17,4785	11,957	609,598
	1	(1-ODT)	17,4716	11,918	609,598

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(21-ODT)	17,4504	12,1712	305,449
	0	(DT)	17,4548	12,1615	412,531
	1	(0-ODT)	17,4548	12,1615	412,531
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,6812	12,2846	412,531
% heurística			0	0	0
% exacto			1,297064418	1,012210665	0
% infinito			-0,025207966	0,079759898	-25,957322
GreedyMin Sum	infinito	(2978-ODT)	17,1474	11,8961	450,757
	0	(DT)	17,4548	12,1615	412,531
	1	(1-ODT)	17,444	12,1526	424,003

FIGURA C.25: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(37-ODT)	16,2606	11,2843	420,222
	0	(DT)	16,2679	11,2887	557,716
	1	(0-ODT)	16,2679	11,2887	557,716
ExactoMinMax	1	(0-ODT)	16,2679	11,2887	557,716
% heurística			0	0	0
% exacto			0	0	0
% infinito			-0,044873647	-0,03897703	-24,65304922
GreedyMin Sum	infinito	(1673-ODT)	16,0191	11,0375	557,716
	0	(DT)	16,2679	11,2887	557,716
	1	(1-ODT)	16,1959	11,1727	557,716

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(311-ODT)	17,4949	11,9	350,868
	0	(DT)	17,4908	11,9041	481,404
	1	(1-ODT)	17,4842	11,8986	435,673
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	17,3697	11,966	435,673
% heurística			-0,037734123	-0,046202569	-9,499505613
% exacto			-0,692363986	0,519988911	-9,499505613
% infinito			0,023440895	-0,034441915	-27,11568662
GreedyMin Sum	infinito	(1028-ODT)	16,7898	11,4861	435,673
	0	(DT)	17,4908	11,9041	481,404
	1	(1-ODT)	17,1024	11,7227	435,673

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(701-ODT)	16,4317	11,4558	402,104
	0	(DT)	16,4048	11,451	532,422
	1	(1-ODT)	16,4048	11,451	503,132
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	16,4947	11,4968	503,132
% heurística			0	0	-5,501275304
% exacto			0,548010338	0,399965069	-5,501275304
% infinito			0,163976397	0,041917736	-24,47644913
GreedyMin Sum	infinito	(2151-ODT)	16,4111	11,3821	430,29
	0	(DT)	16,4048	11,451	532,422
	1	(1-ODT)	16,3812	11,4118	503,132

FIGURA C.26: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS.

		Terreno 1			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(19-ODT)	6,93441	5,11488	298,443
	0	(DT)	6,93704	5,11527	448,396
	1	(0-ODT)	6,93704	5,11527	448,396
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	7,00957	5,19153	448,396
% heurística			0	0	0
% exacto			1,045546804	1,490830396	0
% infinito			-0,037912424	-0,007624231	-33,44209137
GreedyMin Sum	infinito	(1665-ODT)	6,96087	5,06433	298,443
	0	(DT)	6,93704	5,11527	448,396
	1	(1-ODT)	6,90593	5,06647	448,396

		Terreno 2			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(4-ODT)	7,00309	5,15919	171,391
	0	(DT)	7,01161	5,16551	216,358
	1	(0-ODT)	7,01161	5,16551	216,358
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	7,13727	5,2625	216,358
% heurística			0	0	0
% exacto			1,792170414	1,877646157	0
% infinito			-0,121512748	-0,122349971	-20,78360865
GreedyMin Sum	infinito	(635-ODT)	7,01137	5,10674	218,196
	0	(DT)	7,01161	5,16551	216,358
	1	(1-ODT)	7,03441	5,16078	218,196

		Terreno 3			
huerística	orden max	orden final	RMSE	MAE	maxValue
GreedyMinMax	infinito	(2-ODT)	6,77976	4,96747	155,336
	0	(DT)	6,79253	4,97534	156,938
	1	(0-ODT)	6,79253	4,97534	156,938
ExactoMinMax	1	(1-ODT)	6,80834	4,98174	156,938
% heurística			0	0	0
% exacto			0,232755689	0,128634425	0
% infinito			-0,188000642	-0,158180144	-1,020785278
GreedyMin Sum	infinito	(3189-ODT)	6,74265	4,88041	157,92
	0	(DT)	6,79253	4,97534	156,938
	1	(1-ODT)	6,76185	4,92922	156,938

FIGURA C.27: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para el criterio WABN sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH.

C.3. Métricas de error

Se presentan aquí las tablas correspondientes a las métricas de error de las aproximaciones obtenidas por las ejecuciones de los algoritmos: GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 1 a 50 e infinito.

Los algoritmos antes descritos se ejecutaron para todos los criterios implementados (ABN, JND y WABN) y para todos los terrenos (BH, CC, KS, MH) con 3 muestras aleatorias de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 3 de 5000 puntos (siguiendo la misma nomenclatura) para cada uno de ellos.

Las números que se muestran en las siguientes tablas corresponden a la cantidad total de ejecuciones en la que las métricas de los errores RMSE, MAE, \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_1 de las aproximaciones obtenidas en cada instancia mejoraron, empeoraron o igualaron a la triangulación de *Delaunay*.

La cantidad total de casos es 51 ya que cada instancia corresponde a la ejecución de una de las heurísticas antes mencionada para un criterio determinado con orden máximo 1 a 50 e infinito.

Cabe destacar que, los colores que se utilizaron para resaltar las celdas tienen como objetivo distinguir los comportamientos entre los distintos criterios. Se resaltaron las celdas que dentro de la fila poseen el máximo valor con *verde* si mejoraba la métrica de la triangulación de *Delaunay*, *naranja* si la empeora y *gris* si la iguala.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	5	46	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	28	23	0
GreedyMinSumABN	45	6	0
GreedyMinSumJND	44	7	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	45	2	4
GreedyMaxMinJND	45	2	4
GreedyMaxMinWABN	9	38	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	13	38	0
GreedyMaxMinJND	13	38	0
GreedyMaxMinWABN	13	38	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	50	1	0
GreedyMinMaxWABN	0	49	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	27	22	2
GreedyMaxMinJND	27	22	2
GreedyMaxMinWABN	11	39	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	1	50	0

FIGURA C.28: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	5	46	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	28	23	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	45	4	2
GreedyMaxMinJND	45	4	2
GreedyMaxMinWABN	9	40	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	13	38	0
GreedyMaxMinJND	13	38	0
GreedyMaxMinWABN	13	38	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	50	1	0
GreedyMinMaxWABN	0	49	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	29	21	1
GreedyMaxMinJND	29	21	1
GreedyMaxMinWABN	48	2	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.29: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	5	46	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	28	23	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	45	4	2
GreedyMaxMinJND	45	4	2
GreedyMaxMinWABN	9	40	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	13	38	0
GreedyMaxMinJND	13	38	0
GreedyMaxMinWABN	13	38	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	50	1	0
GreedyMinMaxWABN	0	49	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	29	21	1
GreedyMaxMinJND	29	21	1
GreedyMaxMinWABN	48	2	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.30: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	5	46	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	28	23	0
GreedyMinSumABN	45	6	0
GreedyMinSumJND	44	7	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	45	2	4
GreedyMaxMinJND	45	2	4
GreedyMaxMinWABN	9	38	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	13	38	0
GreedyMaxMinJND	13	38	0
GreedyMaxMinWABN	13	38	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	50	1	0
GreedyMinMaxWABN	0	49	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	28	22	1
GreedyMaxMinJND	28	22	1
GreedyMaxMinWABN	11	39	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	1	50	0

FIGURA C.31: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	26	25	0
GreedyMaxMinABN	29	21	1
GreedyMaxMinJND	29	21	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	50	1	0
GreedyMinMaxJND	46	5	0
GreedyMinMaxWABN	36	15	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	14	33	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	6	0	45
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	37	13	1
GreedyMaxMinJND	37	13	1
GreedyMaxMinWABN	8	43	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.32: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	50	1	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	36	15	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	3	47	1
GreedyMaxMinJND	3	47	1
GreedyMaxMinWABN	15	33	3
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	6	2	43
GreedyMinMaxJND	6	1	44
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	44	2	5
GreedyMaxMinJND	47	4	0
GreedyMaxMinWABN	22	29	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.33: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	50	1	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	36	15	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	3	47	1
GreedyMaxMinJND	3	47	1
GreedyMaxMinWABN	15	33	3
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	6	2	43
GreedyMinMaxJND	6	1	44
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	44	2	5
GreedyMaxMinJND	47	4	0
GreedyMaxMinWABN	22	29	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.34: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	3	48	0
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	26	25	0
GreedyMaxMinABN	29	21	1
GreedyMaxMinJND	29	21	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	50	1	0
GreedyMinMaxJND	46	5	0
GreedyMinMaxWABN	36	15	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	14	33	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	2	49
GreedyMinMaxJND	6	1	44
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	37	13	1
GreedyMaxMinJND	37	13	1
GreedyMaxMinWABN	8	43	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.35: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	48	2	1
GreedyMinMaxJND	49	1	1
GreedyMinMaxWABN	2	0	49
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	6	45	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	2	48	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	49	0	2
GreedyMinMaxWABN	0	51	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	2	49	0
GreedyMaxMinABN	1	38	12
GreedyMaxMinJND	0	39	12
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	49	2	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	0	51	0
GreedyMinSumJND	0	51	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.36: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	48	2	1
GreedyMinMaxJND	49	1	1
GreedyMinMaxWABN	2	0	49
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	2	48	1
GreedyMaxMinJND	2	48	1
GreedyMaxMinWABN	2	48	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	49	0	2
GreedyMinMaxWABN	0	51	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	39	12
GreedyMaxMinJND	0	39	12
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	49	2	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.37: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	48	2	1
GreedyMinMaxJND	49	1	1
GreedyMinMaxWABN	2	0	49
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	2	48	1
GreedyMaxMinJND	2	48	1
GreedyMaxMinWABN	2	48	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	49	0	2
GreedyMinMaxWABN	0	51	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	39	12
GreedyMaxMinJND	0	39	12
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	49	2	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.38: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	48	2	1
GreedyMinMaxJND	49	1	1
GreedyMinMaxWABN	2	0	49
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	6	45	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	2	48	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	49	0	2
GreedyMinMaxWABN	0	51	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	2	49	0
GreedyMaxMinABN	1	38	12
GreedyMaxMinJND	0	39	12
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	49	2	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	0	51	0
GreedyMinSumJND	0	51	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.39: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	30	21	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	28	18	5
GreedyMaxMinJND	6	40	5
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	1	50	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	48	1	2
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	0	43	8
GreedyMaxMinJND	0	43	8
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	50	1
GreedyMinMaxJND	1	49	1
GreedyMinMaxWABN	1	49	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	48	3	0
GreedyMaxMinABN	15	36	0
GreedyMaxMinJND	16	35	0
GreedyMaxMinWABN	9	42	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.40: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	46	5
GreedyMaxMinJND	0	46	5
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	48	1	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	35	15	1
GreedyMinMaxJND	36	14	1
GreedyMinMaxWABN	1	49	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	4	47	0
GreedyMaxMinJND	4	47	0
GreedyMaxMinWABN	3	48	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.41: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	46	5
GreedyMaxMinJND	0	46	5
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	48	1	2
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	50	1
GreedyMaxMinJND	0	50	1
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	35	15	1
GreedyMinMaxJND	36	14	1
GreedyMinMaxWABN	1	49	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	4	47	0
GreedyMaxMinJND	4	47	0
GreedyMaxMinWABN	3	48	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.42: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	30	21	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	28	18	5
GreedyMaxMinJND	6	40	5
GreedyMaxMinWABN	0	46	5
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	1	50	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	48	1	2
GreedyMinSumABN	50	1	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	50	1	0
GreedyMaxMinABN	0	46	5
GreedyMaxMinJND	0	46	5
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	50	1
GreedyMinMaxJND	1	49	1
GreedyMinMaxWABN	1	49	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	48	3	0
GreedyMaxMinABN	15	36	0
GreedyMaxMinJND	16	35	0
GreedyMaxMinWABN	9	42	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.43: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	48	3	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	48	3	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	1	50	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	45	5	1
GreedyMaxMinJND	45	5	1
GreedyMaxMinWABN	45	5	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.44: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	48	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	44	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	48	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	44	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	1	50	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	49	2	0
GreedyMinSumWABN	48	3	0
GreedyMaxMinABN	45	6	0
GreedyMaxMinJND	45	6	0
GreedyMaxMinWABN	45	6	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.45: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	48	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	44	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	0	48	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	44	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	1	50	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	49	2	0
GreedyMinSumWABN	48	3	0
GreedyMaxMinABN	45	6	0
GreedyMaxMinJND	45	6	0
GreedyMaxMinWABN	45	6	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.46: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	48	3	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	48	3	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	5	45	1
GreedyMaxMinJND	5	45	1
GreedyMaxMinWABN	5	45	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	1	50	0
GreedyMinMaxJND	1	50	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	48	3	0
GreedyMinSumWABN	0	51	0
GreedyMaxMinABN	46	5	0
GreedyMaxMinJND	46	5	0
GreedyMaxMinWABN	46	5	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.47: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	49	0
GreedyMinMaxJND	2	49	0
GreedyMinMaxWABN	38	8	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	15	19	17
GreedyMaxMinJND	0	26	25
GreedyMaxMinWABN	0	39	12
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	8	43	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	47	3	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	0	1
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	1	50
GreedyMaxMinJND	0	1	50
GreedyMaxMinWABN	0	1	50
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	26	23	2
GreedyMaxMinJND	26	23	2
GreedyMaxMinWABN	36	12	3
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.48: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	49	0
GreedyMinMaxJND	2	49	0
GreedyMinMaxWABN	38	8	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	47	4
GreedyMaxMinJND	0	47	4
GreedyMaxMinWABN	0	47	4
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	8	43	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	47	3	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	51	0
GreedyMaxMinJND	0	51	0
GreedyMaxMinWABN	0	51	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	35	15	1
GreedyMaxMinJND	35	15	1
GreedyMaxMinWABN	38	12	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.49: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	49	0
GreedyMinMaxJND	2	49	0
GreedyMinMaxWABN	38	8	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	4	39	8
GreedyMaxMinJND	4	39	8
GreedyMaxMinWABN	4	39	8
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	8	43	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	47	3	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	51	0
GreedyMaxMinJND	0	51	0
GreedyMaxMinWABN	0	51	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	0	50	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	34	15	2
GreedyMaxMinJND	34	15	2
GreedyMaxMinWABN	37	12	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.50: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	49	0
GreedyMinMaxJND	2	49	0
GreedyMinMaxWABN	38	8	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	15	19	17
GreedyMaxMinJND	0	26	25
GreedyMaxMinWABN	0	39	12
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	8	43	0
GreedyMinMaxJND	0	51	0
GreedyMinMaxWABN	47	3	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	6	45
GreedyMaxMinJND	0	6	45
GreedyMaxMinWABN	0	6	45
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	2	48	1
GreedyMinMaxJND	2	48	1
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	26	23	2
GreedyMaxMinJND	26	23	2
GreedyMaxMinWABN	37	12	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.51: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	43	0	8
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	9	42	0
GreedyMinSumJND	12	39	0
GreedyMinSumWABN	2	49	0
GreedyMaxMinABN	0	37	14
GreedyMaxMinJND	0	37	14
GreedyMaxMinWABN	23	14	14
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	8	43	0
GreedyMaxMinABN	33	18	0
GreedyMaxMinJND	33	18	0
GreedyMaxMinWABN	48	3	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	8	43	0
GreedyMaxMinJND	8	43	0
GreedyMaxMinWABN	15	36	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.52: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	43	0	8
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	37	14
GreedyMaxMinJND	0	37	14
GreedyMaxMinWABN	0	37	14
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	12	39	0
GreedyMaxMinJND	12	39	0
GreedyMaxMinWABN	48	3	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	8	43	0
GreedyMaxMinJND	8	43	0
GreedyMaxMinWABN	50	1	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.53: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	43	0	8
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	0	37	14
GreedyMaxMinJND	0	37	14
GreedyMaxMinWABN	0	37	14
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	12	39	0
GreedyMaxMinJND	12	39	0
GreedyMaxMinWABN	48	3	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	8	43	0
GreedyMaxMinJND	8	43	0
GreedyMaxMinWABN	50	1	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.54: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	43	0	8
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	9	42	0
GreedyMinSumJND	12	39	0
GreedyMinSumWABN	2	49	0
GreedyMaxMinABN	0	37	14
GreedyMaxMinJND	0	37	14
GreedyMaxMinWABN	23	14	14
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	50	1	0
GreedyMinSumWABN	7	44	0
GreedyMaxMinABN	33	18	0
GreedyMaxMinJND	33	18	0
GreedyMaxMinWABN	48	3	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	50	0	1
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	8	43	0
GreedyMaxMinJND	8	43	0
GreedyMaxMinWABN	15	36	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.55: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	6	44	1
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	1	49	1
GreedyMaxMinJND	1	49	1
GreedyMaxMinWABN	1	49	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	2	49	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	42	0	9
GreedyMaxMinJND	35	0	16
GreedyMaxMinWABN	7	35	9
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – RMSE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	0	46	5
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	49	2	0
GreedyMinSumWABN	45	6	0
GreedyMaxMinABN	12	10	29
GreedyMaxMinJND	12	10	29
GreedyMaxMinWABN	0	22	29
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.56: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error RMSE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	45	6	0
GreedyMinMaxJND	0	50	1
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	1	50	0
GreedyMaxMinJND	1	50	0
GreedyMaxMinWABN	1	50	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	49	0	2
GreedyMaxMinJND	49	0	2
GreedyMaxMinWABN	14	35	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – MAE	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	0	46	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	12	38	1
GreedyMaxMinJND	12	38	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.57: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	45	6	0
GreedyMinMaxJND	0	50	1
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	1	50	0
GreedyMaxMinJND	1	50	0
GreedyMaxMinWABN	1	50	0
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	51	0	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	49	0	2
GreedyMaxMinJND	49	0	2
GreedyMaxMinWABN	14	35	2
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L1	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	0	46	5
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	12	38	1
GreedyMaxMinJND	12	38	1
GreedyMaxMinWABN	0	50	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.58: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_1 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Terreno 1 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	6	44	1
GreedyMinMaxWABN	48	0	3
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	1	49	1
GreedyMaxMinJND	1	49	1
GreedyMaxMinWABN	1	49	1
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 2 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	51	0	0
GreedyMinMaxJND	51	0	0
GreedyMinMaxWABN	2	49	0
GreedyMinSumABN	51	0	0
GreedyMinSumJND	51	0	0
GreedyMinSumWABN	51	0	0
GreedyMaxMinABN	43	0	8
GreedyMaxMinJND	36	0	15
GreedyMaxMinWABN	8	35	8
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

Terreno 3 – L2	# mejoró	# empeoró	# igualó
GreedyMinMaxABN	0	0	51
GreedyMinMaxJND	0	0	51
GreedyMinMaxWABN	0	46	5
GreedyMinSumABN	49	2	0
GreedyMinSumJND	49	2	0
GreedyMinSumWABN	45	6	0
GreedyMaxMinABN	12	10	29
GreedyMaxMinJND	12	10	29
GreedyMaxMinWABN	0	22	29
GreedyMaxSumABN	0	51	0
GreedyMaxSumJND	0	51	0
GreedyMaxSumWABN	0	51	0

FIGURA C.59: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra la cantidad de casos (de un total de 51) en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró la métrica de error \mathcal{L}_2 respecto de la triangulación de *Delaunay*.

Las números que se muestran en las siguientes tablas corresponden al porcentaje total de ejecuciones en la que las métricas de los errores RMSE y MAE de las aproximaciones obtenidas en cada una de las instancias antes mencionadas mejoraron, empeoraron o igualaron a la triangulación de *Delaunay* original.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	69,93%	30,07%	0,00%	69,93%	30,07%	0,00%
GreedyMinSum	95,42%	4,58%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	55,56%	40,52%	3,92%	56,86%	41,18%	1,96%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	66,01%	33,99%	0,00%	66,01%	33,99%	0,00%
GreedyMinSum	94,77%	5,23%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	55,56%	40,52%	3,92%	56,86%	41,18%	1,96%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	20,26%	78,43%	1,31%	20,26%	78,43%	1,31%
GreedyMinSum	99,35%	0,65%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	21,57%	75,16%	3,27%	45,75%	52,29%	1,96%
GreedyMaxSum	0,65%	99,35%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.60: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	66,01%	0,65%	33,33%	69,93%	1,96%	28,10%
GreedyMinSum	99,35%	0,65%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	43,14%	52,94%	3,92%	30,72%	64,71%	4,58%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	67,32%	3,27%	29,41%	70,59%	0,65%	28,76%
GreedyMinSum	99,35%	0,65%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	43,14%	52,94%	3,92%	32,68%	66,01%	1,31%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	58,82%	41,18%	0,00%	58,82%	41,18%	0,00%
GreedyMinSum	83,66%	16,34%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	14,38%	82,35%	3,27%	24,18%	73,20%	2,61%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.61: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	57,52%	41,18%	1,31%	57,52%	41,18%	1,31%
GreedyMinSum	99,35%	0,65%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	20,92%	70,59%	8,50%	2,61%	93,46%	3,92%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	35,29%	63,40%	1,31%	58,17%	40,52%	1,31%
GreedyMinSum	85,62%	14,38%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	14,38%	77,12%	8,50%	2,61%	93,46%	3,92%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	32,03%	65,36%	2,61%	32,03%	65,36%	2,61%
GreedyMinSum	97,39%	2,61%	0,00%	99,35%	0,65%	0,00%
GreedyMaxMin	5,88%	88,24%	5,88%	1,96%	92,16%	5,88%
GreedyMaxSum	0,65%	99,35%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.62: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	65,36%	33,99%	0,65%	65,36%	33,99%	0,65%
GreedyMinSum	66,67%	33,33%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	0,65%	88,24%	11,11%	1,31%	87,58%	11,11%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	96,08%	1,96%	1,96%	96,08%	1,96%	1,96%
GreedyMinSum	66,67%	33,33%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	0,00%	88,89%	11,11%	1,31%	87,58%	11,11%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	34,64%	33,33%	32,03%	34,64%	33,33%	32,03%
GreedyMinSum	5,23%	94,77%	0,00%	99,35%	0,65%	0,00%
GreedyMaxMin	1,31%	92,16%	6,54%	1,31%	92,16%	6,54%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.63: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	67,32%	32,68%	0,00%	67,32%	32,68%	0,00%
GreedyMinSum	94,77%	5,23%	0,00%	98,69%	1,31%	0,00%
GreedyMaxMin	35,95%	62,09%	1,96%	35,95%	62,75%	1,31%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	67,32%	32,68%	0,00%	67,32%	32,68%	0,00%
GreedyMinSum	94,12%	5,88%	0,00%	97,39%	2,61%	0,00%
GreedyMaxMin	35,95%	62,09%	1,96%	35,95%	62,75%	1,31%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	96,08%	0,00%	3,92%	33,33%	62,75%	3,92%
GreedyMinSum	0,00%	100,00%	0,00%	98,04%	1,96%	0,00%
GreedyMaxMin	35,95%	62,09%	1,96%	35,95%	61,44%	2,61%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.64: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno BH. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	7,84%	91,50%	0,65%	7,84%	91,50%	0,65%
GreedyMinSum	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	26,80%	28,10%	45,10%	22,88%	73,86%	3,27%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	2,61%	96,73%	0,65%	2,61%	96,73%	0,65%
GreedyMinSum	99,35%	0,00%	0,65%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	16,99%	32,68%	50,33%	22,88%	73,86%	3,27%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	88,24%	7,19%	4,58%	55,56%	39,87%	4,58%
GreedyMinSum	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	23,53%	33,99%	42,48%	24,84%	71,90%	3,27%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.65: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno CC. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	66,67%	0,00%	33,33%	62,75%	3,92%	33,33%
GreedyMinSum	98,69%	1,31%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	35,95%	38,56%	25,49%	40,52%	57,52%	1,96%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	37,25%	28,76%	33,99%	33,33%	32,68%	33,99%
GreedyMinSum	98,69%	1,31%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	31,37%	38,56%	30,07%	40,52%	57,52%	1,96%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	32,68%	62,09%	5,23%	64,71%	30,07%	5,23%
GreedyMinSum	96,08%	3,92%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	5,23%	69,28%	25,49%	9,80%	88,24%	1,96%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.66: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno KS. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

ABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	61,44%	0,00%	38,56%	61,44%	0,00%	38,56%
GreedyMinSum	72,55%	27,45%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	26,80%	64,05%	9,15%	13,07%	77,78%	9,15%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

JND	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	66,67%	0,00%	33,33%	66,67%	0,00%	33,33%
GreedyMinSum	74,51%	25,49%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	26,80%	64,05%	9,15%	13,07%	77,78%	9,15%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

WABN	RMSE			MAE		
	% mejoró	% empeoró	% igualó	% mejoró	% empeoró	% igualó
GreedyMinMax	96,73%	0,00%	3,27%	96,73%	0,00%	3,27%
GreedyMinSum	39,87%	60,13%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
GreedyMaxMin	56,21%	34,64%	9,15%	64,05%	26,80%	9,15%
GreedyMaxSum	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

FIGURA C.67: Cuadro correspondiente a la ejecución de los algoritmos antes mencionados para todos los criterios sobre 3 muestreos aleatorios de 5000 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) del terreno MH. Se muestra el porcentaje total de casos en que la heurística aplicada con el criterio definido (según indica el nombre de la fila) mejoró, igualó o empeoró las métricas de error RMSE y MAE respecto de la triangulación de *Delaunay*.

C.4. Valores obtenidos

Se presentan aquí las tablas correspondientes a los valores máximo y mínimo medidos en las aproximaciones obtenidas por las ejecuciones de los algoritmos: GreedyMinMax, GreedyMaxMin, GreedyMinSum y GreedyMaxSum con orden máximo 1 a 50 e infinito.

Los algoritmos antes descritos se ejecutaron para todos los criterios implementados (ABN, JND y WABN) y para todos los terrenos (BH, CC, KS, MH) con 3 muestras aleatorias de 2500 puntos (*terreno1*, *terreno2* y *terreno3*) y 3 de 5000 puntos (siguiendo la misma nomenclatura) para cada uno de ellos.

Las números que se muestran en las tablas correspondientes a las ejecuciones de las heurísticas GreedyMinMax y GreedyMinSum son:

- *terreno*: terreno sobre el cual se ejecutó el algoritmo indicado según la tabla.
- *muestra*: nombre de la muestra que se utilizó para la ejecución del algoritmo indicado según la tabla.
- *orden final*: orden final de la aproximación obtenida en donde se observó el porcentaje máximo de mejora del valor objetivo.
- *porcentaje*: porcentaje máximo de mejora del valor objetivo observado en la aproximación antes mencionada.
- *% hasta 4*: porcentaje máximo de mejora del valor objetivo observado en las aproximaciones obtenidas hasta orden máximo 4.
- *diferencia*: diferencia entre los 2 porcentajes antes mencionados.

Y, para el caso de las heurísticas GreedyMaxMin y GreedyMaxSum, son:

- *terreno*, *muestra* y *orden final*: igual que antes.
- *minValue*: valor mínimo del criterio medido en la aproximación en donde se observó el máximo de mejora del valor objetivo.
- *cant min*: cantidad de mínimos observados en la aproximación antes mencionada.
- *cociente*: entre el valor mínimo del criterio medido en la aproximación antes mencionada y el mínimo observado en la triangulación de *Delaunay*. Cabe destacar que, dado que existen muchos valores mínimos iguales a *cero*, para realizar estos cálculos, se invirtió el intervalo de $[0.,180)$ a $[180.,0)$. Es por esto que, en este caso,

cuando nos referimos al valor mínimo observado en una determinada triangulación en verdad nos estamos refiriendo a 180 menos dicho valor. Es decir que, cuanto más chico es el cociente mejor es la aproximación obtenida tras la ejecución de esta heurística.

Cabe destacar que, se resaltan con color *rojo* los porcentajes de mejora máximo que corresponden a ejecuciones con orden máximo infinito.

GreedyMinMax

ABN 2500						
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4	
BH	terreno1	33	16,29%	11,43%	4,86%	
	terreno2	16	4,92%	0,70%	4,22%	
	terreno3	5	9,60%	1,88%	7,72%	
CC	terreno1	4	12,58%	0,00%	12,58%	
	terreno2	2	31,13%	0,00%	31,13%	
	terreno3	3	33,16%	0,00%	33,16%	
MH	terreno1	9	30,38%	1,69%	28,69%	
	terreno2	3	14,68%	0,00%	14,68%	
	terreno3	2	29,13%	0,00%	29,13%	
KS	terreno1	4	21,72%	0,00%	21,72%	
	terreno2	7	25,51%	7,52%	17,99%	
	terreno3	3	26,60%	0,00%	26,60%	
			promedio	21,31%	1,94%	19,37%
			desvío est	9,43%	3,68%	10,51%

FIGURA C.68: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

ABN 5000						
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4	
BH	terreno1	17	33,73%	8,95%	24,78%	
	terreno2	17	33,70%	8,95%	24,75%	
	terreno3	2	20,23%	0,00%	20,23%	
CC	terreno1	2	17,71%	0,00%	17,71%	
	terreno2	10	6,58%	0,25%	6,33%	
	terreno3	9	30,34%	4,40%	25,94%	
MH	terreno1	92	4,93%	4,93%	0,00%	
	terreno2	1	15,97%	0,00%	15,97%	
	terreno3	3	15,38%	0,00%	15,38%	
KS	terreno1	2	9,02%	0,00%	9,02%	
	terreno2	1	29,68%	0,00%	29,68%	
	terreno3	8	11,54%	4,18%	7,36%	
			promedio	19,07%	2,64%	16,43%
			desvío est	10,48%	3,54%	9,20%

FIGURA C.69: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio ABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

JND 2500					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	33	15,88%	11,17%	4,71%
	terreno2	4	33,55%	0,00%	33,55%
	terreno3	5	7,04%	1,14%	5,90%
CC	terreno1	6	20,12%	1,58%	18,54%
	terreno2	2	27,72%	0,00%	27,72%
	terreno3	3	23,58%	0,00%	23,58%
MH	terreno1	3	21,74%	0,00%	21,74%
	terreno2	4	16,12%	0,00%	16,12%
	terreno3	2	26,26%	0,00%	26,26%
KS	terreno1	194	25,08%	0,17%	24,91%
	terreno2	7	25,33%	9,70%	15,63%
	terreno3	3	26,63%	0,00%	26,63%
promedio			22,42%	1,98%	20,44%
desvío est			6,92%	4,00%	8,70%

FIGURA C.70: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio JND sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

JND 5000					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	17	36,24%	4,77%	31,47%
	terreno2	17	36,20%	4,77%	31,43%
	terreno3	2	19,46%	0,00%	19,46%
CC	terreno1	54	25,71%	9,59%	16,12%
	terreno2	1	8,97%	0,00%	8,97%
	terreno3	4	26,32%	0,00%	26,32%
MH	terreno1	9	6,58%	5,95%	0,63%
	terreno2	1	14,32%	0,00%	14,32%
	terreno3	3	16,51%	0,00%	16,51%
KS	terreno1	8	9,48%	5,49%	3,99%
	terreno2	1	26,29%	0,00%	26,29%
	terreno3	2	19,41%	0,00%	19,41%
promedio			20,46%	2,55%	17,91%
desvío est			9,97%	3,37%	10,01%

FIGURA C.71: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio JND sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

WABN 2500					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	24	32,53%	8,49%	24,04%
	terreno2	54	28,85%	4,34%	24,51%
	terreno3	9	3,00%	2,79%	0,21%
CC	terreno1	61	24,77%	7,35%	17,42%
	terreno2	2	28,86%	0,00%	28,86%
	terreno3	43	18,46%	10,33%	8,13%
MH	terreno1	518	5,42%	0,52%	4,90%
	terreno2	2	3,31%	0,00%	3,31%
	terreno3	6	9,65%	1,84%	7,81%
KS	terreno1	3	5,36%	0,00%	5,36%
	terreno2	62	33,49%	6,69%	26,80%
	terreno3	38	10,11%	9,42%	0,69%
		promedio	16,98%	4,31%	12,67%
		desvío est	12,10%	3,97%	10,86%

FIGURA C.72: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio WABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

WABN 5000					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	4	24,99%	0,00%	24,99%
	terreno2	4	24,95%	0,00%	24,95%
	terreno3	61	34,26%	3,24%	31,02%
CC	terreno1	19	30,21%	30,21%	0,00%
	terreno2	103	35,25%	6,21%	29,04%
	terreno3	2	25,96%	0,00%	25,96%
MH	terreno1	19	33,44%	22,25%	11,19%
	terreno2	4	20,78%	0,00%	20,78%
	terreno3	2	1,02%	0,00%	1,02%
KS	terreno1	4	24,65%	0,00%	24,65%
	terreno2	3	27,12%	0,00%	27,12%
	terreno3	34	30,15%	24,65%	5,50%
		promedio	26,07%	7,21%	18,85%
		desvío est	9,05%	11,44%	11,25%

FIGURA C.73: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinMax para el criterio WABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

GreedyMinSum

ABN 2500						
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4	
BH	terreno1	1	0,00%	0,00%	0,00%	
	terreno2	2	28,26%	2,00%	26,26%	
	terreno3	1	4,74%	0,00%	4,74%	
CC	terreno1	2	0,93%	0,00%	0,93%	
	terreno2	1	21,99%	0,00%	21,99%	
	terreno3	2	29,04%	0,00%	29,04%	
MH	terreno1	4	24,49%	0,00%	24,49%	
	terreno2	1	7,12%	0,00%	7,12%	
	terreno3	1	21,11%	0,00%	21,11%	
KS	terreno1	37	21,69%	1,70%	19,99%	
	terreno2	6	11,59%	3,85%	7,74%	
	terreno3	4	24,89%	0,00%	24,89%	
			promedio	16,32%	0,63%	15,69%
			desvío est	10,76%	1,24%	10,70%

FIGURA C.74: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

ABN 5000						
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4	
BH	terreno1	43	26,29%	2,04%	24,25%	
	terreno2	43	26,25%	2,04%	24,21%	
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%	
CC	terreno1	2	17,71%	0,00%	17,71%	
	terreno2	1	6,33%	0,00%	6,33%	
	terreno3	3	24,91%	0,00%	24,91%	
MH	terreno1	49	4,93%	4,93%	0,00%	
	terreno2	1	15,27%	0,00%	15,27%	
	terreno3	3	15,38%	0,00%	15,38%	
KS	terreno1	2	9,02%	0,00%	9,02%	
	terreno2	1	29,68%	0,00%	29,68%	
	terreno3	34	10,32%	9,63%	0,69%	
			promedio	15,51%	1,55%	13,95%
			desvío est	9,68%	2,96%	10,64%

FIGURA C.75: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio ABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

JND 2500					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	1	0,51%	0,00%	0,51%
	terreno2	2	14,69%	0,00%	14,69%
	terreno3	1	2,16%	0,00%	2,16%
CC	terreno1	2	4,81%	0,00%	4,81%
	terreno2	1	18,80%	0,00%	18,80%
	terreno3	3	21,42%	0,00%	21,42%
MH	terreno1	4	22,93%	0,00%	22,93%
	terreno2	3	8,19%	0,00%	8,19%
	terreno3	1	16,24%	0,00%	16,24%
KS	terreno1	4	20,58%	0,00%	20,58%
	terreno2	6	10,16%	3,59%	6,57%
	terreno3	4	15,95%	0,00%	15,95%
promedio			13,04%	0,30%	12,74%
desvío est			7,71%	1,04%	7,90%

FIGURA C.76: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio JND sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

JND 5000					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	1	19,49%	0,00%	19,49%
	terreno2	1	19,45%	0,00%	19,45%
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%
CC	terreno1	2	16,12%	0,00%	16,12%
	terreno2	2	10,33%	0,00%	10,33%
	terreno3	2	19,48%	0,00%	19,48%
MH	terreno1	1	0,63%	0,00%	0,63%
	terreno2	1	14,32%	0,00%	14,32%
	terreno3	4	13,94%	0,00%	13,94%
KS	terreno1	4	3,99%	0,00%	3,99%
	terreno2	4	35,96%	0,00%	35,96%
	terreno3	11	19,40%	10,20%	9,20%
promedio			14,43%	0,85%	13,58%
desvío est			9,96%	2,94%	9,94%

FIGURA C.77: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio JND sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

WABN 2500					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno2	1	15,20%	0,00%	15,20%
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%
CC	terreno1	2	9,84%	0,00%	9,84%
	terreno2	2	25,27%	0,00%	25,27%
	terreno3	43	7,14%	7,14%	0,00%
MH	terreno1	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno2	2	3,31%	0,00%	3,31%
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%
KS	terreno1	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno2	3	17,48%	0,00%	17,48%
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%
promedio			6,52%	0,60%	5,93%
desvío est			8,65%	2,06%	8,85%

FIGURA C.78: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio WABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

WABN 5000					
terreno	muestra	orden final	porcentaje	diferencia	% hasta 4
BH	terreno1	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno2	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno3	1	15,18%	0,00%	15,18%
CC	terreno1	6	6,47%	6,47%	0,00%
	terreno2	9	31,62%	2,58%	29,04%
	terreno3	0	0,00%	0,00%	0,00%
MH	terreno1	19	33,44%	22,25%	11,19%
	terreno2	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno3	2	1,02%	0,00%	1,02%
KS	terreno1	0	0,00%	0,00%	0,00%
	terreno2	11	9,50%	0,00%	9,50%
	terreno3	6	20,20%	14,70%	5,50%
promedio			9,79%	3,83%	5,95%
desvío est			12,58%	7,28%	9,02%

FIGURA C.79: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMinSum para el criterio WABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

GreedyMaxMin

ABN 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(1548-ODT)	0,1910340000	0,9989387000	1
	terreno2	(28-ODT)	0,0061101700	0,9999660546	1
	terreno3	(1689-ODT)	0,2287250000	0,9987342240	1
CC	terreno1	(9-ODT)	0,1192490000	0,9993375056	1
	terreno2	(2207-ODT)	0,2014470000	0,9988840485	1
	terreno3	(13-ODT)	0,0620572000	0,9996563725	1
MH	terreno1	(9-ODT)	0,0832873000	0,9995496912	1
	terreno2	(34-ODT)	0,1924110000	0,9989339926	1
	terreno3	(40-ODT)	0,0679430000	0,9996281797	1
KS	terreno1	(1335-ODT)	0,3250860000	0,9982037825	1
	terreno2	(12-ODT)	0,0631672000	0,9996520252	1
	terreno3	(1488-ODT)	0,4170790000	0,9976890555	1
promedio			0,1631329892	0,9990978027	
desvío est			0,1207368326	0,0006694539	

FIGURA C.80: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

ABN 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(3057-ODT)	0,1042950000	0,9994205833	1
	terreno2	(3047-ODT)	0,1042850000	0,9994104833	1
	terreno3	(6-ODT)	0,0247792000	0,9998623378	1
CC	terreno1	(31-ODT)	0,0724552000	0,9995974711	1
	terreno2	(3242-ODT)	0,0993841000	0,9994478661	1
	terreno3	(3434-ODT)	0,1444580000	0,9991974556	1
MH	terreno1	(2818-ODT)	0,0983723000	0,9994566263	1
	terreno2	(4335-ODT)	0,1631760000	0,9990942516	1
	terreno3	(1975-ODT)	0,0675588000	0,9996254227	1
KS	terreno1	(3782-ODT)	0,1064660000	0,9994085222	1
	terreno2	(3981-ODT)	0,0790481000	0,9995608439	1
	terreno3	(4578-ODT)	0,2142880000	0,9988095111	1
promedio			0,1065471417	0,9994076146	
desvío est			0,0490871501	0,0002727018	

FIGURA C.81: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio ABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

JND 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(1548-ODT)	0,1910230000	0,9989387611	1
	terreno2	(28-ODT)	0,0061100300	0,9999660554	1
	terreno3	(1689-ODT)	0,2294120000	0,9987304071	1
CC	terreno1	(9-ODT)	0,1192030000	0,9993377611	1
	terreno2	(2207-ODT)	0,2014020000	0,9988842985	1
	terreno3	(13-ODT)	0,0620531000	0,9996563952	1
MH	terreno1	(9-ODT)	0,0832854000	0,9995496964	1
	terreno2	(2053-ODT)	0,2902990000	0,9983901668	1
	terreno3	(40-ODT)	0,0677274000	0,9996293744	1
KS	terreno1	(1228-ODT)	0,1998800000	0,9988993507	1
	terreno2	(12-ODT)	0,0627425000	0,9996543368	1
	terreno3	(1595-ODT)	0,4169140000	0,9976899692	1
promedio			0,1608376192	0,9991105477	
desvío est			0,1171082262	0,0006498958	

FIGURA C.82: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio JND sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

JND 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(3057-ODT)	0,1042940000	0,9994205889	1
	terreno2	(3047-ODT)	0,1042640000	0,9994105968	1
	terreno3	(6-ODT)	0,0247781000	0,9998623439	1
CC	terreno1	(31-ODT)	0,0724552000	0,9995974711	1
	terreno2	(4696-ODT)	0,0993817000	0,9994478794	1
	terreno3	(4239-ODT)	0,1444390000	0,9991975611	1
MH	terreno1	(2818-ODT)	0,0974387000	0,9994618116	1
	terreno2	(4335-ODT)	0,1631710000	0,9990942615	1
	terreno3	(1975-ODT)	0,0673361000	0,9996266578	1
KS	terreno1	(3830-ODT)	0,0897511000	0,9995013828	1
	terreno2	(1207-ODT)	0,0790215000	0,9995609917	1
	terreno3	(4578-ODT)	0,2130790000	0,9988162278	1
promedio			0,1049507833	0,9994164812	
desvío est			0,0491110225	0,0002728577	

FIGURA C.83: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio JND sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

WABN 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(15-ODT)	0,1984710000	0,9988973833	1
	terreno2	(28-ODT)	0,0214908000	0,9998806067	1
	terreno3	(1859-ODT)	0,5402530000	0,9970157664	1
CC	terreno1	(2096-ODT)	0,6374780000	0,9964584556	1
	terreno2	(28-ODT)	0,3077440000	0,9983216689	1
	terreno3	(34-ODT)	0,6582980000	0,9963461806	1
MH	terreno1	(40-ODT)	0,6829130000	0,9962261985	1
	terreno2	(34-ODT)	0,2066300000	0,9988768949	1
	terreno3	(932-ODT)	0,2764260000	0,9984879933	1
KS	terreno1	(14-ODT)	0,1683080000	0,9991238195	1
	terreno2	(1193-ODT)	1,0633300000	0,9941002394	1
	terreno3	(1372-ODT)	1,0749900000	0,9940588526	1
promedio			0,4863609833	0,9973161716	
desvío est			0,3474166843	0,0019322946	

FIGURA C.84: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio WABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

WABN 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(14-ODT)	0,0972083000	0,9994599539	1
	terreno2	(13-ODT)	0,0971093000	0,9993589339	1
	terreno3	(7-ODT)	0,0886928000	0,9995072622	1
CC	terreno1	(2662-ODT)	0,2934660000	0,9983696333	1
	terreno2	(4696-ODT)	0,1039500000	0,9994225000	1
	terreno3	(4239-ODT)	0,4627670000	0,9974290722	1
MH	terreno1	(1436-ODT)	0,1738210000	0,9990350425	1
	terreno2	(4335-ODT)	0,3042290000	0,9983113205	1
	terreno3	(1041-ODT)	0,1538100000	0,9991492491	1
KS	terreno1	(2111-ODT)	0,3339160000	0,9981449111	1
	terreno2	(2293-ODT)	0,1454580000	0,9991919000	1
	terreno3	(1923-ODT)	0,4441430000	0,9975325389	1
promedio			0,2248808667	0,9987426931	
desvío est			0,1372846724	0,0007547507	

FIGURA C.85: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxMin para el criterio WABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

Reducción de cantidad de mínimos

Se presentan aquí las imágenes visuales de algunas de las triangulaciones obtenidas tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo de 2500 puntos (*terreno2*) de BH.

En las siguientes imágenes se resaltan con color los triángulos en los que se observa el valor mínimo del criterio ABN, que es el que se busca maximizar. Se puede observar que, a medida que se avanza el orden final de la triangulación, se visualiza una menor cantidad de mínimos.

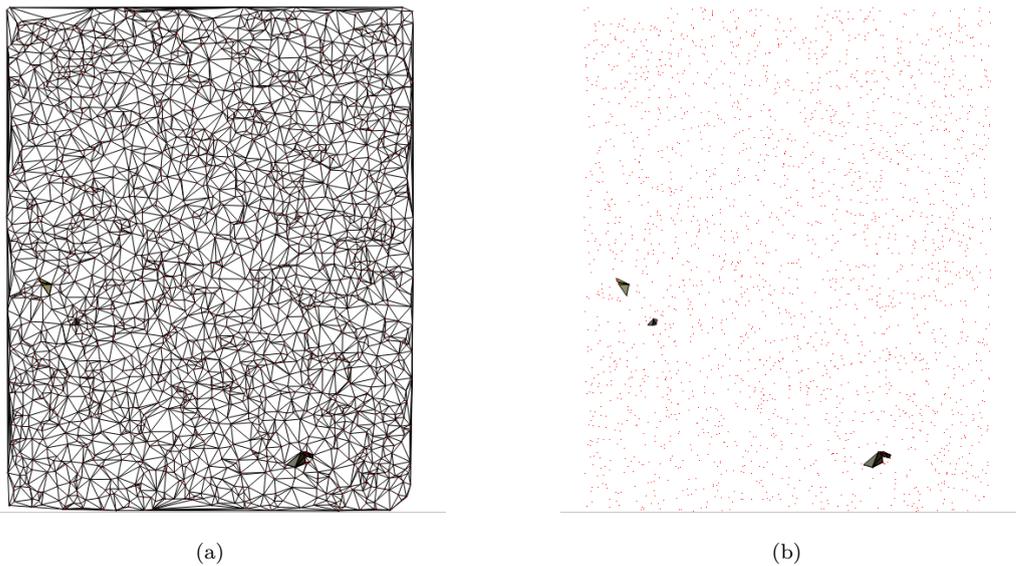


FIGURA C.86: (a) Triangulación de *Delaunay* en base a un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observan 16 mínimos. (b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

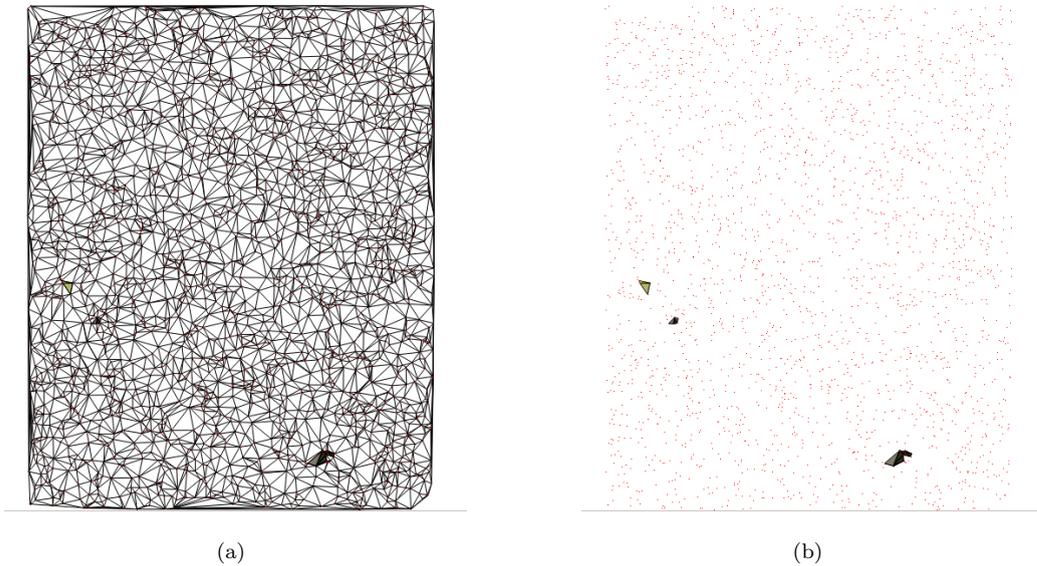


FIGURA C.87: (a) Triangulación de orden 1 obtenida tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observan 13 mínimos. (b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

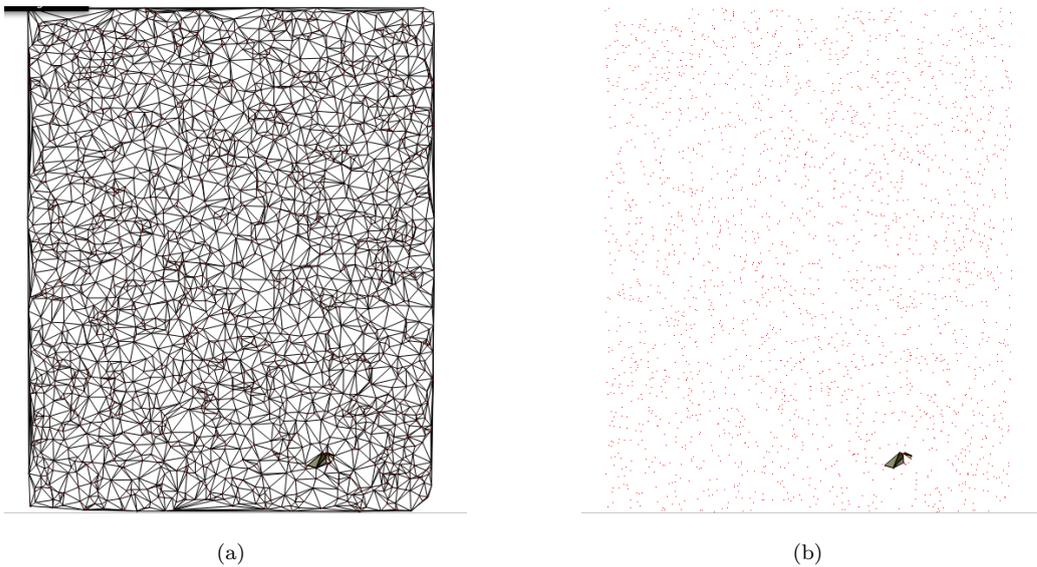


FIGURA C.88: (a) Triangulación de orden 5 obtenida tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observan 5 mínimos. (b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

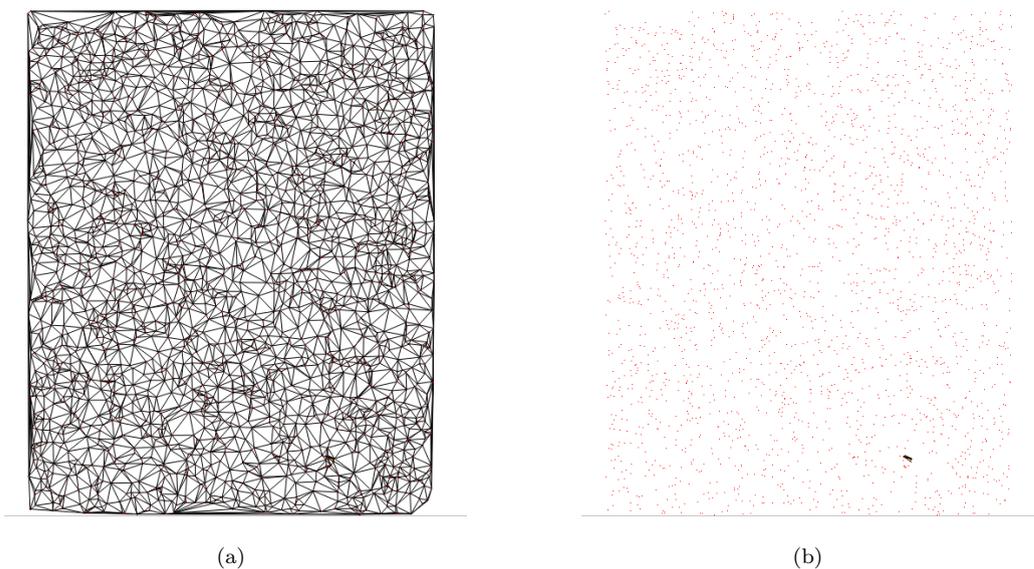


FIGURA C.89: (a) Triangulación de orden 16 obtenida tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observan 2 mínimos.
(b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

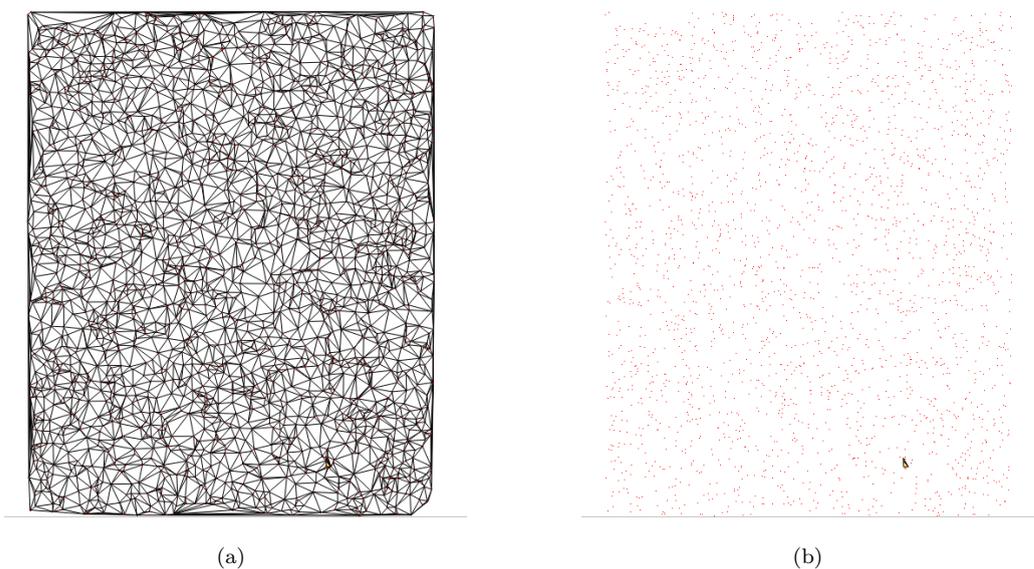


FIGURA C.90: (a) Triangulación de orden 28 obtenida tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observa 1 mínimo. En este caso el mínimo posee un valor mayor que el observado en la triangulación de *Delaunay* original.
(b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

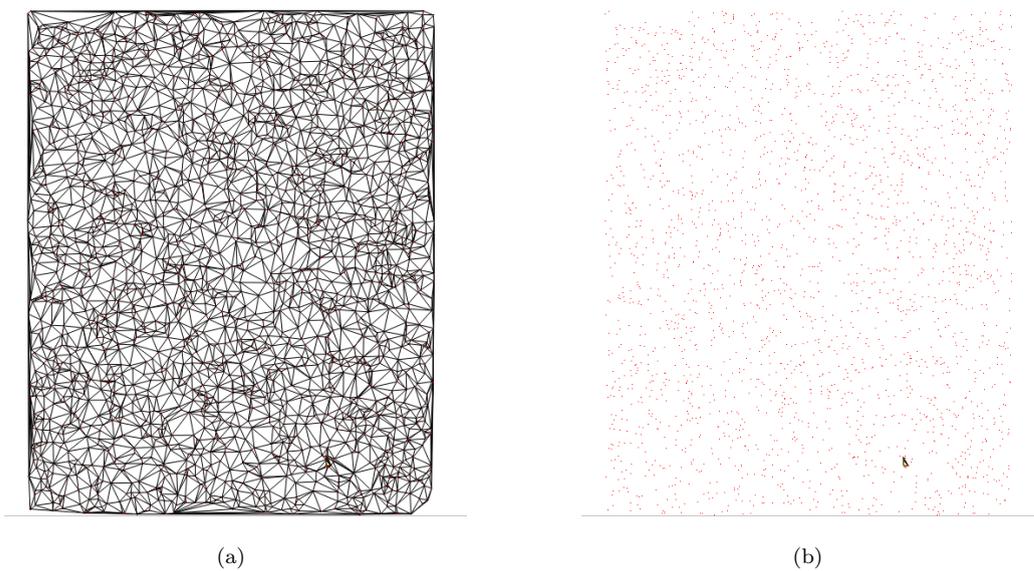


FIGURA C.91: (a) Triangulación de orden 356 obtenida tras la ejecución de la heurística GreedyMaxMinABN sobre un muestreo aleatorio de BH de un tamaño de 2500 puntos (*terreno2*) en donde se observa 1 mínimo. En este caso el mínimo posee el mismo valor que el de la triangulación de orden 28 y se obtiene tras realizar 14 *flips*.
(b) Se muestra lo mismo que en (a) pero ocultando los ejes para poder visualizar mejor los cuadriláteros y los mínimos.

GreedyMaxSum

ABN 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(12-ODT)	0,0062405000	0,9999653306	1
	terreno2	(46-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(24-ODT)	0,0011958600	0,9999982810	1
CC	terreno1	(4-ODT)	0,0133693000	0,9999257261	1
	terreno2	(7-ODT)	0,0081414200	0,9999579718	1
	terreno3	(16-ODT)	0,0095919200	0,9999478466	1
MH	terreno1	(2314-ODT)	0,0098555000	0,9999576508	1
	terreno2	(24-ODT)	0,0084844900	0,9999558096	1
	terreno3	(10-ODT)	0,0071683400	0,9999658186	1
KS	terreno1	(2210-ODT)	0,0175842000	0,9999121426	1
	terreno2	(2332-ODT)	0,0176314000	0,9999050026	1
	terreno3	(2339-ODT)	0,0145385000	0,9999254054	1
			promedio	0,0094834525	0,9999514155
			desvío est	0,0056416486	0,0000303087

FIGURA C.92: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio ABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

ABN 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(8-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno2	(7-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(4928-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	2
CC	terreno1	(6-ODT)	0,0022754300	0,9999873587	1
	terreno2	(13-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(5-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
MH	terreno1	(4611-ODT)	0,0034001800	0,9999842508	1
	terreno2	(2-ODT)	0,0032657600	0,9999826425	1
	terreno3	(20-ODT)	0,0041654300	0,9999776083	1
KS	terreno1	(4684-ODT)	0,0067923700	0,9999622646	1
	terreno2	(4598-ODT)	0,0177530000	0,9999013722	1
	terreno3	(4593-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
			promedio	0,0031376808	0,9999829581
			desvío est	0,0051161030	0,0000284074

FIGURA C.93: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio ABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

JND 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(12-ODT)	0,0062404900	0,9999653306	1
	terreno2	(46-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(3-ODT)	0,0011958300	0,9999982809	1
CC	terreno1	(4-ODT)	0,0131825000	0,9999267639	1
	terreno2	(7-ODT)	0,0081389400	0,9999579856	1
	terreno3	(2434-ODT)	0,0714960000	0,9996039346	1
MH	terreno1	(2314-ODT)	0,0098520200	0,9999576647	1
	terreno2	(24-ODT)	0,0084803000	0,9999558308	1
	terreno3	(10-ODT)	0,0071679000	0,9999658179	1
KS	terreno1	(2171-ODT)	0,0232291000	0,9998807542	1
	terreno2	(2238-ODT)	0,0175576000	0,9999053648	1
	terreno3	(25-ODT)	0,0123535000	0,9999375414	1
promedio			0,0149078483	0,9999212725	
desvío est			0,0189400274	0,0001056638	

FIGURA C.94: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio JND sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

JND 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(8-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno2	(7-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(4928-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	2
CC	terreno1	(6-ODT)	0,0022753300	0,9999873593	1
	terreno2	(13-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(4-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
MH	terreno1	(4611-ODT)	0,0033936700	0,9999842857	1
	terreno2	(2-ODT)	0,0032648700	0,9999826296	1
	terreno3	(20-ODT)	0,0041435200	0,9999777279	1
KS	terreno1	(22-ODT)	0,0045561200	0,9999746882	1
	terreno2	(4598-ODT)	0,0177511000	0,9999013828	1
	terreno3	(4593-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
promedio			0,0029487175	0,9999840061	
desvío est			0,0050094712	0,0000277994	

FIGURA C.95: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio JND sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

WABN 2500					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(2454-ODT)	0,0678224000	0,9996232089	1
	terreno2	(18-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	3
	terreno3	(7-ODT)	0,0074531000	0,9999758168	1
CC	terreno1	(2433-ODT)	0,0672047000	0,9996266406	1
	terreno2	(2375-ODT)	0,1419350000	0,9992428589	1
	terreno3	(2434-ODT)	0,1116360000	0,9993832021	1
MH	terreno1	(2292-ODT)	0,0514954000	0,9997341451	1
	terreno2	(5-ODT)	0,0160146000	0,9999358957	1
	terreno3	(DT)	0,0042712600	1,0000000000	1
KS	terreno1	(2-ODT)	0,0264337000	0,9999120565	1
	terreno2	(9-ODT)	0,0446906000	0,9997593907	1
	terreno3	(27-ODT)	0,0590929000	0,9997029015	1
promedio			0,0498374717	0,9997413430	
desvío est			0,0437858471	0,0002452267	

FIGURA C.96: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio WABN sobre muestras de 2500 puntos de todos los terrenos.

WABN 5000					
terreno	muestra	orden final	minValue	cociente	cant min
BH	terreno1	(8-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno2	(7-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(18-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
CC	terreno1	(4893-ODT)	0,0073239200	0,9999593116	1
	terreno2	(30-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
	terreno3	(2-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	1
MH	terreno1	(4611-ODT)	0,0210633000	0,9998836970	1
	terreno2	(5-ODT)	0,0137203000	0,9999252602	1
	terreno3	(35-ODT)	0,0198334000	0,9998935663	1
KS	terreno1	(4635-ODT)	0,0141557000	0,9999213572	1
	terreno2	(39-ODT)	0,0107960000	0,9999400222	1
	terreno3	(4611-ODT)	0,0000000000	1,0000000000	2
promedio			0,0072410517	0,9999602679	
desvío est			0,0083484147	0,0000456612	

FIGURA C.97: Cuadro correspondiente a la ejecución de la heurística GreedyMaxSum para el criterio WABN sobre muestras de 5000 puntos de todos los terrenos.

Bibliografía

- [1] Joachim Gudmundsson, Mikael Hammar, and Marc van Kreveld. Higher order Delaunay triangulations. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 23: 85–98, 2002.
- [2] Thierry de Kok, Marc van Kreveld, and Maarten Löffler. Generating realistic terrains with higher-order Delaunay triangulations. *Computational Geometry*, 36(1): 52–65, 2007.
- [3] Ahmad Biniáz and Gholamhossein Dastghaibiyfard. Slope fidelity in terrains with higher-order Delaunay triangulations. *16th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, pages 17–23, 2008.
- [4] A. Biniáz and G. Dastghaibiyfard. Drainage reality in terrains with higher-order Delaunay triangulations. *Lecture Notes in Geoinformation and Cartography*, pages 199–211, 2008.
- [5] Marc. van Kreveld, Maaten Löffler, and Rodrigo I. Silveira. Optimization for first order Delaunay triangulations. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 4(43):377–394, 2009.
- [6] R. B. Grayson I. D. Moore and A. R. Ladson. Digital terrain modelling: A review of hydrological, geomorphological, and biological applications. *Hydrological processes*, 5(1):3–30, 1991.
- [7] Shmuel Rippa. Long and thin triangles can be good for linear interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(1):257–270, 1992.
- [8] Kai Wang, Chor-Pang Lo, George A. Brook, and Hamid R. Arabnia. Comparison of existing triangulation methods for regularly and irregularly spaced height fields. *International Journal of Geographical Information Science*, 15(8):743–762, 2001.
- [9] Zi-Tan Chen and J Armando Guevara. Systematic selection of very important points (vip) from digital terrain model for constructing triangular irregular networks. 8: 50–56, 1987.

-
- [10] L. Paul Chew. Constrained Delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4:97–108, 1989.
- [11] Øyvind Hjelle and Morten Dæhlen. Triangulations and applications. *Springer*, 10: 137–154, 2006.
- [12] Joachim Gudmundsson, Herman J. Haverkort, and Marc van Kreveld. Constrained higher order Delaunay triangulations. *Computational Geometry*, 30(3):271–277, 2005.
- [13] Jacob E. Goodman and Joseph O’Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, second edition, 1997.
- [14] Yusuke Abe and Yoshio Okamoto. On algorithmic enumeration of higher-order delaunay triangulations. *On Algorithmic Enumeration of Higher-Order Delaunay Triangulations*, 2008.
- [15] C. L. Lawson. Software for C^1 Surface Interpolation. *Mathematical Software III*, pages 161–194, 1977.
- [16] M. Bern, H. Edelsbrunner, B. Eppstein, S. Mitchell, and T.S. Tan. Edge insertion for optimal triangulations. *Lecture Notes in Computer Science*, 583:46–60, 1992.
- [17] J.L. Brown. Vertex based data dependent triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 8(3):239–251, 1991.
- [18] J. Weisz and R. Bodnár. A refined “angle between normals” criterion for scattered data interpolation. *Computers and Mathematics with Application*, 41:531–534, 2001.
- [19] Nira Dyn, David Levin, and Samuel Rippa. Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 10(1):137–154, 1990.
- [20] Nira Dyn, David Levin, and Samuel Rippa. Boundary correction for piecewise linear interpolation defined over data-dependent triangulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 39:179–192, 1992.
- [21] Jay Lee. Comparison of existing methods for building triangular irregular network models of terrain from grid digital elevation models. *International Journal of Geographical information systems*, 5(3):267–285, 1991.