

Tesis de Licenciatura

Convergencia y divergencia del grafo biclique  
iterado

Leandro P. Montero  
lmontero@dc.uba.ar

Directora: Dra. Marina Groshaus

Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
25 de noviembre de 2008

*A toda mi familia y*

*a la memoria de Loba*

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis viejos Cristina y Alberto, como también a mis hermanos Pablo y Genaro por estar toda mi vida al lado mío acompañándome y apoyándome tanto en los buenos momentos como en los malos. También quiero agradecerle a Flor por bancarme prácticamente todos los años que duró esta carrera. A mi perra Monchi por su alegría constante y a Loba que ya no está más con nosotros y nunca la voy a olvidar.

En orden cronológico, quiero comenzar por la gente del colegio La Salle de Florida, que crecieron conmigo desde que eramos pequeños. El Benja, Pablo, Lega, Juani, Herno, el Tano, Seba, Perra, el Negro, Juampi, Cris, Emoution, Fer, Paolo, a mi amigo y también socio de trabajo Chiro, y a dos grandes amigos que ahora son tanos, Eze y Polo, y a todos LPDL32. Al equipo de fútbol de ex-alumnos del colegio, Sporting Vaginola y a todos sus integrantes. Por último a toda la gente del colegio que estuvo conmigo y me olvide nombrar.

Siguiendo, llegamos a la facultad. Quiero empezar por el digamos “culpable” de todo esto, Dieguito Fernandez Slezak, que gracias a él y a una charla que tuvimos en un boliche, me convenció de estudiar esto!! Después quiero agradecer a todos mis amigos que estuvieron desde el principio en este viaje (de ida) que fue estudiar Cs. de la Computación. A Manix, Cesaro, el Marino, el Pocho, Guille, Fran, DSaban, David, German, Wiwi, Loch, Guido, Marta (o el Feo), Matias, Facu, Nigel, Gabón, etc. A todos los que se sumaron después con los años, el Eze, Jota, Luigi, el Sabi, Viiiiv, y espero no estar olvidandome de nadie. A la gente de matemática por su amistad, Analia, Flor, las Melli, Mariela, etc. Al glorioso equipo de fútbol, Tu Amiga Te Tiene Ganas, y a todos sus integrantes de los que me falta nombrar a Lichu y Marian. A los profesores que tuve estos años, como también a todos los compañeros de trabajo que tuve en Algo1 y Algo3, entre ellos, a Esteban, Pablito T., ASdeL, Dario, etc. A la gente del grupo de Investigación Operativa, Optimización Combinatoria y Grafos, más precisamente a Pablo, Juanjo, Nico e Irene por darme una mano cuando la necesitaba, me olvido de alguien...?

Siguiendo quiero agradecer a todos los compañero de trabajo del CBC de las sedes Martinez y en especial Drago, por la compañía de tantos años y las enseñanzas que me transmitieron para crecer como docente. Entre ellos están, Gabriela, Celia, Ana, Santiago, Adrián, Hugo, Paula y como coordinadoras, Mabel, Diana y Alicia.

En el plano musical, quiero agradecer a la legendaria banda de Heavy Metal, Malceva, a la cual tuve el gusto de pertenecer junto con mis amigos Herno, el Tano y German. Como también a mis guitarras por haber sido los recreos de todos estos largos años de estudio. A las bandas que también me acompañaron estos años, como Almafuerte y su gran guitarrista el Tano Marciello.

En el plano cultural (o nerd), en orden de lectura, quiero mencionar y recomendar a los libros de la serie Matemática Recreativa de Yakov Perelman por introducirme al mundo

de la matemática. Siguiendo, a los libros de Análisis Matemático de Tom Apostol y por último a los libros que me hicieron entrar en el mundo de los grafos, Graph Theory With Applications de J.A. Bondy and U.S.R. Murty y Graph Theory de Frank Harary.

Quiero mencionar también a mi flamante Escórt, por ser mucho pero mucho más que un medio de transporte estos últimos años.

También quiero agradecer al jurado, el Lic. Enrique Tobis y el Dr. Min Chih Lin, por sus comentarios y recomendaciones sobre este trabajo.

Casi terminando, quiero agradecer especialmente a Fran Soullignac por además de ser un gran amigo, y también compañero de trabajo, me ayudo siempre que lo necesite en la tesis, como también para preparar clases y/o otras dudas más, siempre con mucha voluntad, sin esperar nada a cambio, aunque en ciertas ocasiones hubo alguna que otra apuesta de por medio! JA! Gracias Fran!

Y para terminar, mi mayor agradecimiento es para mi directora, la Dra. Marina Groshaus porque la verdad sin ella como guía, compañera y amiga, este trabajo no hubiese sido posible. Ha sido realmente un placer trabajar a su lado, y tanto, que traté de estirar la tesis lo máximo posible para poder seguir trabajando con ella! A pesar de que más de una vez nos tiramos de los pelos, pese a las horas y horas de peluquería que tiene encima, siempre nos llevamos muy bien y nos divertimos trabajando juntos, como también me llevo grandes enseñanzas de su parte. También le agradezco como compañera de trabajo y JTP en Algo3 ya que es un gusto dar clase a su lado. Idola!

Muchas gracias a todos!

# Resumen

Dado un grafo  $G$ , una *clique* de  $G$  es un subgrafo inducido completo maximal, mientras que una *biclique* de  $G$  es un subgrafo inducido bipartito completo maximal de  $G$ .

El estudio de las bicliques resulta de interés debido a las diferentes aplicaciones en áreas distintas como genética, biología, el estudio de redes sociales, inteligencia artificial, etc. Por otro lado, tiene interés a nivel teórico, ya que están estrechamente relacionadas con temas profundamente estudiados como los grafos discos-Helly y los retractos.

Dada una familia de conjuntos  $\mathcal{H}$ , el *grafo de intersección* de  $\mathcal{H}$  es el grafo que contiene como conjunto de vértices a los conjuntos de  $\mathcal{H}$ , y existe una arista entre dos conjuntos  $E, F \in \mathcal{H}$  cuando  $E$  y  $F$  se intersecan.

Los grafos de intersección fueron estudiados en la literatura. Cabe mencionar a los grafos de intervalos (donde  $\mathcal{H}$  es una familia de intervalos) y al grafo línea (donde  $\mathcal{H}$  es la familia de aristas de  $G$ ), entre otros.

El *grafo clique* de  $G$ , denotado por  $K(G)$ , es el grafo de intersección de la familia de cliques de  $G$ . Existe un teorema de reconocimiento de grafos clique dado por Roberts y Spencer, pero éste no conduce a un algoritmo eficiente para el reconocimiento de dicha clase. En el 2002, se probó que el problema de reconocimiento de grafos clique es NP-completo, es decir, no existe un algoritmo polinomial para resolver este problema (si  $P \neq NP$ ).

Pensando al grafo clique como un operador, el *grafo clique iterado*  $K^k(G)$  es el grafo que resulta de aplicar  $k$  veces el operador “grafo clique” al grafo  $G$ . El grafo clique iterado fue estudiado ampliamente y pese a no haberse encontrado una caracterización de su comportamiento para un grafo general, se han presentado resultados restringidos a ciertas clases.

El *grafo biclique* de  $G$ ,  $KB(G)$ , es el grafo de intersección de las bicliques de  $G$ . Este fue definido y caracterizado recientemente. Sin embargo, aún sigue abierta la pregunta sobre la existencia de un algoritmo eficiente que resuelva el problema de reconocimiento de grafos biclique.

En este trabajo estudiamos el operador “grafo biclique”. Probamos que los únicos posibles comportamientos del grafo biclique iterado son la convergencia y la divergencia, y caracterizamos cada uno de estos. En particular, probamos que un grafo diverge si y solo si  $KB(G)$  contiene a una *gema*, una *casa* o  $K_5$  como subgrafos inducidos. Por otro lado, utilizando esta caracterización, presentamos un algoritmo polinomial que resuelve el problema de decidir el comportamiento de un grafo bajo el operador biclique.

# Abstract

Given a graph  $G$ , a *clique* of  $G$  is a maximal complete induced subgraph, while a *biclique* of  $G$  is a maximal bipartite complete induced subgraph.

The study of bicliques becomes interesting because of the possible different applications in several areas, such as genetics, biology, social networks, artificial intelligence, etc. Besides they have theoretical interest because of their relationship with some very deeply studied subjects, such as Helly disks and retracts.

Given a family of sets  $\mathcal{H}$ , the *intersection graph* of  $\mathcal{H}$  is the graph that has the members of  $\mathcal{H}$  as vertices, and there is an edge between two sets  $E, F \in \mathcal{H}$  when  $E$  and  $F$  have non-empty intersection.

Intersection graphs have been widely studied in the literature. We can mention as examples, interval graphs (where  $\mathcal{H}$  is a family of intervals) and line graphs (where  $\mathcal{H}$  is the family of edges of  $G$ ), among others.

The *clique graph* of  $G$ , denoted by  $K(G)$ , is the intersection graph of the family of cliques of  $G$ . There exists a characterization theorem for the clique graphs given by Roberts and Spencer. However, it does not lead to an efficient algorithm for the recognition problem. In 2002, it was proved that the recognition problem for clique graph is NP-Complete. In other words, there is no polynomial algorithm to solve this problem (if  $P \neq NP$ .)

Considering the clique graph as an operator, the *iterated clique graph*  $K^k(G)$  is the graph that results of applying  $k$  times the “clique operator” to  $G$ . The iterated clique graph has been widely studied. There is no characterization of its behaviour for a general graph, but there are results restricted to some classes.

The *biclique graph* of  $G$ ,  $KB(G)$ , is the intersection graph of the bicliques of  $G$ . This graph was recently defined and characterized. However, the question of the existence of an efficient algorithm for the recognition of biclique graphs is still an open problem.

In this work we study the “biclique graph” operator. We prove that there are only two possible behaviours of the iterated biclique graph: divergence and convergence, and we characterize each of them. In particular, we prove that a graph diverges if and only if  $KB(G)$  contains a *gem*, a *house* or  $K_5$  as induced subgraphs. Furthermore, this characterization helped us to derive an algorithm that solves the problem of deciding the behaviour of a graph under the biclique operator in polynomial time.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Resultados de la tesis . . . . .	3
1.2. Definiciones . . . . .	3
1.3. Cómo está organizada la tesis . . . . .	7
<b>2. Grafo Clique</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Grafo Clique Iterado . . . . .	11
<b>3. Operador Biclique</b>	<b>15</b>
3.1. Resultados preliminares . . . . .	16
3.2. Propiedades de los grafos biclique . . . . .	20
3.3. Distancias en $G$ y $KB(G)$ . . . . .	22
3.4. Árboles . . . . .	32
3.5. Cocktail Parties y completos . . . . .	38
3.6. Grafos Biclique . . . . .	46
<b>4. Operador Biclique Iterado</b>	<b>50</b>
4.1. Introducción . . . . .	50
4.2. Propiedades del operador biclique . . . . .	51
4.3. Caracterización del operador $KB$ iterado . . . . .	60
4.4. Clases de grafos estudiadas . . . . .	66

<b>5. Conclusiones</b>	<b>68</b>
5.1. Problemas abiertos y trabajo futuro . . . . .	69
<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>

# Índice de figuras

1.1.	Ejemplo de las bicliques de un grafo $G$ . . . . .	4
1.2.	Vértices $u$ y $v$ mellizos . . . . .	5
1.3.	$G$ no es biclique-Helly mientras que $G'$ si es biclique-Helly . . . . .	5
1.4.	$G$ y su grafo de linea $L(G)$ . . . . .	6
1.5.	$G$ y su grafo clique $K(G)$ . . . . .	6
1.6.	$G$ y su grafo biclique $KB(G)$ . . . . .	7
2.1.	$G$ y su grafo clique $K(G)$ . . . . .	10
2.2.	$G$ es convergente bajo el operador $K$ pero no es desmantelable . . . . .	12
2.3.	El grafo $G_i$ posee defecto Helly $i - 1$ . . . . .	13
2.4.	Dos representaciones para el grafo $O_3$ . . . . .	13
2.5.	$G$ converge al grafo trivial en 3 iteraciones . . . . .	14
2.6.	$G = O_3$ , $K(G) = O_4$ , continuando $K^2(G) = O_8$ , resulta ser divergente . . .	14
2.7.	$G$ cicla bajo el operador $K$ . . . . .	14
3.1.	$G$ y su grafo biclique $KB(G)$ . . . . .	16
3.2.	Ejemplo de una familia etiquetada . . . . .	17
3.3.	El grafo biclique $G$ y el grafo $H$ tal que $G = KB(H)$ . . . . .	18
3.4.	Vemos a $P_3$ con ejes gruesos, contenido en un <i>diamante</i> y en una <i>gema</i> respectivamente . . . . .	19
3.5.	Ejemplos de grafos que no son grafos biclique . . . . .	19
3.6.	El grafo $G$ no es grafo biclique y cumple que todo $P_3$ está contenido en un <i>diamante</i> . . . . .	20

3.7. $G = K_4 \subseteq H = \textit{casa}$ , los ejes gruesos representan $KB(G)$ que es subgrafo de $KB(H)$ . . . . .	22
3.8. Primera desigualdad . . . . .	24
3.9. Segunda desigualdad . . . . .	25
3.10. $B$ y $B'$ están a distancia 1 . . . . .	26
3.11. $B$ y $B'$ están a distancia $k$ . . . . .	27
3.12. Bicliques $U, V$ y $W$ del grafo $H$ . . . . .	29
3.13. El grafo $G$ no es grafo biclique y cumple que todo $P_3$ está contenido en un <i>diamante</i> . . . . .	29
3.14. Distintas opciones para $H$ si $d_H(B, B') = 2$ , los ejes punteados pueden estar (no simultáneamente) o no . . . . .	30
3.15. Únicas dos opciones para $H$ con dos bicliques que se intersecan con $B$ y $B'$ . . . . .	31
3.16. Grafos que no son grafos biclique según Proposición 3.3.8 . . . . .	32
3.17. $C_7$ , $KB(C_7)$ y $KB(C_7) - \{b\}$ . En ejes gruesos indicamos un $P_3$ . . . . .	33
3.18. Grafos $T$ , $KB(T)$ , $T - \{h_1, h_2\}$ y $KB(T - \{h_1, h_2\}) = KB(T) - \{B\}$ . . . . .	36
3.19. Árbol $T$ y el grafo biclique de $T$ , $KB(T) = K_5$ . . . . .	37
3.20. Árbol $T$ y el grafo biclique de $T$ , $KB(T) = K_5 + v$ adyacente a dos del completo . . . . .	37
3.21. Grafo $T + \{e\}$ y el grafo biclique de $T + \{e\}$ , $KB(T + \{e\}) = K_5 + v$ adyacente a tres del completo . . . . .	38
3.22. Cocktail party de orden 4, $CP(4)$ . . . . .	39
3.23. $G_1 = CP(4)$ y $G_2 = O_4$ . . . . .	40
3.24. El eje $e$ y el eje $e'$ que pertenece a un completo de $n - 2$ vértices no incidentes a $e$ . . . . .	43
3.25. Los ejes $e$ y $e'$ no son adyacentes y las bicliques $B$ y $B'$ que los contienen se intersecan en el vértice $v$ . . . . .	44
3.26. Grafos $CP(3)$ , $KB(CP(3))$ y $K_3$ . En ejes gruesos una biclique de $KB(CP(3))$ y su equivalente en $K_3$ . . . . .	46
3.27. Único grafo biclique de 1 vértice . . . . .	47
3.28. Único grafo biclique de 2 vértices. También resulta ser el único grafo biclique bipartito . . . . .	47

3.29. Único grafo biclique de 3 vértices . . . . .	47
3.30. Únicos grafos biclique de 4 vértices . . . . .	47
3.31. Únicos grafos biclique de 5 vértices . . . . .	48
3.32. Únicos grafos biclique de 6 vértices . . . . .	49
4.1. $G$ converge bajo el operador $KB$ . . . . .	51
4.2. $G$ diverge bajo el operador $KB$ . . . . .	51
4.3. El vértice $v$ unido a $k$ vértices del $K_n$ . En el gráfico $A = K_k$ y $B = K_{n-k}$ , por claridad se omitieron los ejes . . . . .	53
4.4. El grafo <i>gema</i> . . . . .	55
4.5. El grafo <i>casa</i> . . . . .	55
4.6. El grafo completo de 5 vértices, $K_5$ . . . . .	56
4.7. El grafo $G$ , sus contracciones de mellizos y los grafos bicliques de cada uno	57
4.8. El grafo <i>diamante</i> . . . . .	58
4.9. Diamante $u, v, w, x$ y los distintos casos . . . . .	59
4.10. Dos representaciones del grafo $O_3$ . . . . .	61
4.11. Construcción de árboles con 5 bicliques ( <b>a,b,c</b> ), y sus grafos biclique ( <b>d</b> ) .	66
4.12. Cocktail Party de orden 4, $CP(4)$ . . . . .	67
5.1. Grafo de <i>Hajös</i> . . . . .	69



# Capítulo 1

## Introducción

Dada una familia de conjuntos  $\mathcal{H}$ , el grafo de *intersección* de  $\mathcal{H}$  es el grafo que contiene como conjunto de vértices, a los conjuntos de  $\mathcal{H}$ , y existe una arista entre dos conjuntos  $E, F \in \mathcal{H}$  cuando  $E$  y  $F$  se intersecan.

Un grafo  $G$  se dice que es de intersección cuando existe una familia de conjuntos  $\mathcal{H}$  tal que  $G$  es el grafo de intersección de  $\mathcal{H}$ . Cabe destacar que todo grafo es un grafo de intersección [59]. De hecho, todo grafo  $G$  es el grafo de intersección de la familia de conjuntos de ejes incidentes a cada vértice.

Los grafos de intersección han recibido mucha atención en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones [17, 45]. Cabe mencionar a los grafos de intervalos ( $\mathcal{H}$  es una familia de intervalos sobre una línea recta), los grafos cordales ( $\mathcal{H}$  es una familia de subárboles de un árbol), los grafos arco-circulares ( $\mathcal{H}$  es una familia de arcos alrededor de un círculo), los grafos de permutación (donde  $\mathcal{H}$  es una familia de segmentos que unen dos líneas rectas paralelas), los grafos clique ( $\mathcal{H}$  es la familia de cliques de un grafo), los grafos de línea ( $\mathcal{H}$  es la familia de aristas de un grafo), entre otros [14, 32, 45, 56, 67, 68]. Las clases de grafos mencionadas tienen aplicaciones en genética, biología molecular, control del tránsito (diseño de semáforos), almacenamiento de mercadería, ordenamiento de vagones de un ferrocarril, estadística, diseño de compiladores o problemas computacionales que utilizan como estructuras de datos pilas y colas, entre otros [8, 28, 57, 58, 63].

Un primer problema que se plantea al estudiar una clase de grafos dada es el problema de reconocimiento. Dado un grafo, se quiere determinar si este grafo pertenece o no a la clase en cuestión. Idealmente, esta respuesta debe ser dada por un algoritmo de tiempo polinomial.

Los grafos de intervalos fueron introducidos por Hajós en 1957 [23] y Benzer en 1959 [5]. Estos grafos tienen una gran cantidad de aplicaciones y hay varios problemas NP-Hard para el caso general que resultan ser polinomiales para esta clase de grafos. Por ejemplo, el problema de coloreo, clique máxima, conjunto independiente máximo y mínimo cubrimiento

por cliques. Existen varias caracterizaciones sobre esta clase de grafos: Lekkerkerker-Boland (1962) [43], Gilmore-Hoffman (1964) [16], Fulkerson-Gross (1965) [14]. El primer algoritmo de reconocimiento lineal ( $O(m+n)$ ) recién fue desarrollado en 1975 por Booth y Leuker [6]. A partir de allí, aparecieron varios algoritmos de reconocimiento también lineales: Korte-Möhring (1989) [33], Hsu (1992) [29] y Hsu-Ma (1999) [30].

Los grafos arco-circulares, grafos de intersección de arcos alrededor de un círculo, fueron introducidos a mediados de la década del '70, siendo Alan Tucker quien aportó el basamento teórico inicial [61, 62, 63, 64, 65]. Tienen aplicaciones en genética, control del tránsito, diseño de compiladores, estadística y problemas de almacenamiento. El reconocimiento de esta clase es polinomial; el primer algoritmo lineal ( $O(m+n)$ ) se debe a McConnell (2003) [44] y Kaplan-Nussbaum [31] en el 2006.

Los grafos de bi-intervalos se definen a partir de dos familias de intervalos. Cada vértice corresponde a un único intervalo sobre una recta real, y dos vértices son adyacentes si sus intervalos tienen intersección no vacía y además pertenecen a familias distintas. Existen varias caracterizaciones de esta clase de grafos [26] pero el único algoritmo de reconocimiento polinomial que se conoce es de tiempo  $O(n^5 m^6 \log n)$  [47].

Los grafos clique fueron introducidos por Hamelink (1968) [24]. Existe un teorema de reconocimiento de grafos clique dado por Roberts y Spencer [56], pero éste no conduce a un algoritmo eficiente de reconocimiento. Se probó en [1] que el problema de reconocimiento de grafos clique es NP-completo, es decir, no existe un algoritmo de tiempo polinomial para resolver este problema (si  $P \neq NP$ ). El grafo clique iterado es el resultado de aplicar el operador clique a un grafo una cierta cantidad finita de veces. El grafo clique iterado fue estudiado, y se clasificaron los diferentes posibles comportamientos cuando la cantidad de iteraciones  $k$  tiende a infinito (convergencia, divergencia, ciclos) [12, 13, 34, 35, 36, 38, 37, 39, 40, 41, 42, 48, 60]. Sin embargo, no existen resultados generales sobre la convergencia, divergencia o ciclos del operador clique.

El grafo biclique de  $G$ ,  $KB(G)$ , es el grafo de intersección de las bicliques de  $G$ . Este fue definido recientemente [18, 21]. Las bicliques de un grafo han sido estudiadas en varios contextos. En la literatura podemos encontrar trabajos sobre la cantidad de bicliques de un grafo [55], tamaño de la biclique máxima [49, 50] y otros [3, 9, 15, 27, 46, 51, 54, 66, 69]. También se han estudiado las bicliques en el marco de la propiedad Helly [19, 22]. Los grafos bicliques fueron caracterizados en [18, 21]. Sin embargo, aún sigue abierta la pregunta sobre la existencia de un algoritmo eficiente que resuelva el problema de reconocimiento de grafos biclique.

Motivados por el grafo clique, en este trabajo definimos al operador biclique iterado. Como veremos más adelante, este operador presenta comportamientos muy diferentes a los del operador clique.

## 1.1. Resultados de la tesis

En este trabajo estudiamos al operador biclique iterado, es decir, el resultado de aplicar el operador biclique sucesivas veces. Este operador tiene características muy diferentes al operador clique iterado. Estudiamos los posibles comportamientos cuando la cantidad de iteraciones crece y presentamos clases de grafos que representan cada comportamiento. Probamos que un grafo o bien converge o bien diverge, pero no cicla bajo el operador biclique. Presentamos una caracterización para cada tipo de comportamiento para cualquier grafo  $G$ . Este resultado da origen a un algoritmo polinomial que resuelve el problema de decidir si un grafo dado es divergente o convergente bajo el operador biclique. También estudiamos el operador restringido a la clase de árboles, completos y grafos Cocktail Party. Probamos que los árboles con 5 o más bicliques divergen y presentamos una conjetura similar para grafos en general. Respecto a las otras dos clases, probamos que los completos de por lo menos 5 bicliques divergen, al igual que los Cocktail Party de orden  $j$ , para  $j \geq 4$ .

Cabe destacar que solo existen resultados similares relativos al operador clique restringido a ciertas clases de grafos. Dado que este operador es nuevo en la literatura y aún no ha sido explorado, sumado a las características mismas del operador, que lo hace de por sí un operador “complicado”, estos resultados representan un gran avance en el objetivo del estudio del operador biclique.

## 1.2. Definiciones

Un grafo simple  $G = (V, E)$  está formado por un conjunto  $V$  de *vértices* y un conjunto  $E$  de pares no ordenados de  $V \times V$  llamados *aristas* o *ejes*. Notaremos por  $V$  al conjunto de vértices y por  $E$  al conjunto de ejes mientras quede claro por contexto a lo que nos estamos refiriendo. En otro caso, denotaremos a los conjuntos como  $V(G)$  y  $E(G)$  respectivamente. Sean  $n = |V(G)|$  y  $m = |E(G)|$ . Diremos que dos vértices  $v, w$  son *adyacentes* cuando el eje  $e = (v, w) \in E$ . En ese caso diremos también que el vértice  $v$  (o  $w$ ) es *incidente* al eje  $e$ . Diremos que dos ejes  $e, e'$  son *adyacentes* cuando existe un vértice incidente a ambos. Un *subgrafo*  $G'$  de  $G$  es un grafo  $G' = (V', E')$ , donde  $V'$  es un subconjunto de  $V$ , y  $E'$ , subconjunto de  $(V' \times V') \cap E$ . Cuando  $E' = (V' \times V') \cap E$ , se dice que  $G' = (V', E')$  es un *subgrafo inducido* de  $G$  y lo denotaremos como  $G' \subseteq G$ . Un grafo  $G = (V, E)$  se dice *bipartito* cuando  $V = U \cup W$ ,  $U \cap W = \emptyset$ , y  $E \subseteq U \times W$ . Un grafo se dice *completo* y lo denotamos  $K_n$ , cuando todo par de vértices es adyacente. Un *conjunto independiente* en  $G$  es un subconjunto de vértices de  $G$  no adyacentes tomados de a pares. Una *clique* de  $G$  es un subgrafo completo maximal con respecto a la inclusión. Una *biclique* es un subconjunto  $B \subseteq V(G)$  que induce un subgrafo bipartito completo maximal, también bajo la inclusión, de  $G$ . Notamos  $B = X \cup Y$  a la correspondiente bipartición y nos restringiremos al caso en que  $X, Y \neq \emptyset$ . Vemos como ejemplo en la Figura 1.1 que  $B_1, B_2$  y  $B_3$  son las bicliques de  $G$ .

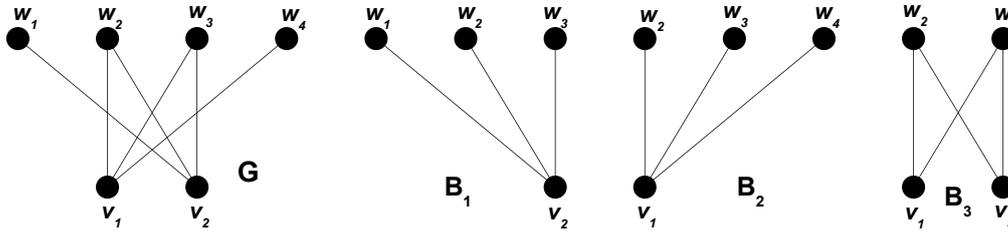


Figura 1.1: Ejemplo de las bicliques de un grafo  $G$

Dos grafos  $G$  y  $H$  son *isomorfos* si existe una función biyectiva  $F$  de  $V(G)$  a  $V(H)$  que verifica que  $(v, w) \in E(G)$  si y sólo si  $(F(v), F(w)) \in E(H)$  para todo  $v, w \in V(G)$ . En ese caso notamos  $G = H$ . Un vértice  $v \in V(G)$  se dice *universal* cuando es adyacente a todo otro vértice de  $G$ . Una secuencia  $v_1, \dots, v_k$  de distintos vértices es un *camino* de longitud  $k - 1$  cuando  $(v_i, v_{i+1})$  es un eje de  $G$  para  $i = 1, \dots, k - 1$ . Cuando  $v_1$  es adyacente a  $v_k$  diremos que  $v_1, \dots, v_k$  es un *ciclo*. Denotaremos por  $P_k$  a un camino de  $k$  vértices y por  $C_k$  a un ciclo de  $k$  vértices. Diremos que un grafo  $G$  es *conexo* si para todo par de vértices  $v, w$  existe un camino en  $G$  que los une. La *distancia* entre dos vértices  $v, w$  de un grafo  $G$ , es el mínimo  $k$  tal que  $P_k$  comienza en  $v$  y termina en  $w$ , la denotaremos  $d_G(v, w)$ . Haremos un abuso de notación usando  $d(v, w)$  en lugar de  $d_G(v, w)$  mientras se entienda por contexto. Por  $G^c$  denotamos el *complemento* de  $G = (V, E)$  definido de forma tal que los vértices de  $G^c$  son los mismos vértices de  $G$  y los ejes de  $G^c$  son el conjunto  $(V \times V) - E$ . Si  $G = (V, E)$  es bipartito, con bipartición  $V = U \cup W$ , el *complemento bipartito* de  $G$ , denotado por  $G^{cb}$ , es un grafo bipartito con el mismo conjunto  $V$  de vértices donde el conjunto de ejes está dado por el conjunto  $\{(v, w) \in U \times W / (v, w) \notin E\}$ . La *vecindad abierta* de un vértice  $v$ ,  $N(v)$ , es el conjunto de vértices adyacentes a  $v$ , mientras que la *vecindad cerrada* de  $v$  denotada por  $N[v]$  es  $N(v) \cup \{v\}$ . Denotaremos al *grado* de un vértice  $v$  como  $d_G(v) = |N(v)|$  y mientras quede claro por contexto lo abreviaremos como  $d(v)$ . Un grafo se dice *regular*, si todos sus vértices tienen el mismo grado. Dos vértices son *mellizos* si poseen la misma vecindad abierta (Fig. 1.2). Un grafo es un *árbol* si es conexo y no contiene ciclos. Dado un vértice  $h$  de un árbol, diremos que  $h$  es una *hoja* si posee un único vértice adyacente al cual llamaremos *padre* de  $h$ . Es inmediato ver que todo árbol posee al menos dos hojas.

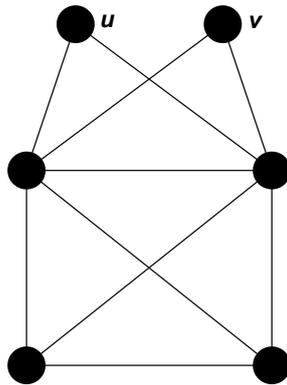


Figura 1.2: Vértices  $u$  y  $v$  mellizos

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de algún conjunto. Diremos que  $\mathcal{F}$  es *intersectante* cuando los subconjuntos de  $\mathcal{F}$  se intersecan de a pares. Cuando toda subfamilia intersectante de  $\mathcal{F}$  tiene intersección total diremos que  $\mathcal{F}$  es una familia *Helly*. Un grafo es *biclique-Helly* cuando su familia de bicliques cumple la propiedad de Helly. En la Figura. 1.3,  $G$  no es biclique-Helly puesto que las bicliques de  $G$  son una familia intersectante pero sin un elemento en común. Por otro lado, el grafo  $G'$  es biclique-Helly.

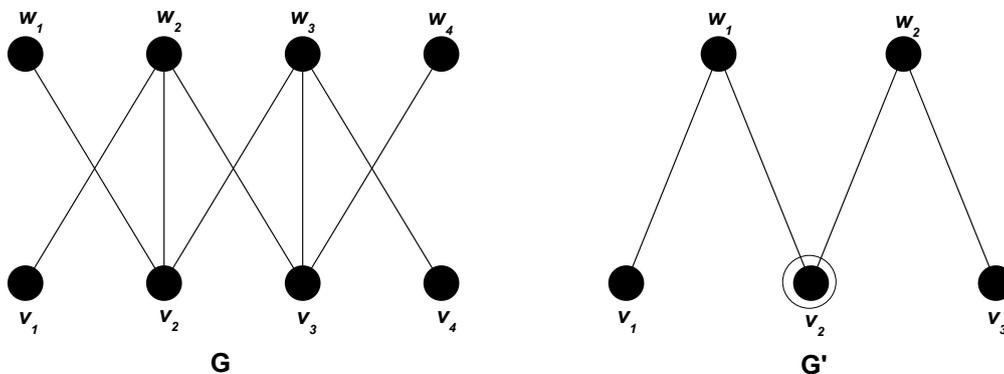


Figura 1.3:  $G$  no es biclique-Helly mientras que  $G'$  si es biclique-Helly

Dada una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de cierto conjunto, el *grafo de intersección* de  $\mathcal{F}$  es el grafo que posee un vértice por cada conjunto de  $\mathcal{F}$ , y dos vértices son adyacentes cuando los correspondientes conjuntos se intersecan. El *grafo de línea* de  $G$ , denotado  $L(G)$  es el grafo de intersección de la familia de ejes de  $G$  (Fig. 1.4). El *grafo clique* de  $G$ ,  $K(G)$ , es el grafo de intersección de las cliques de  $G$  (Fig. 1.5). Denotamos por  $K^2(G)$  al grafo clique de  $K(G)$ . Análogamente se define al *grafo biclique* de  $G$ ,  $KB(G)$ , como el grafo de

intersección de las bicliques de  $G$  (Fig. 1.6). En esta tesis definimos al *grafo biclique iterado* de  $G$   $k$  veces, como  $KB^k(G) = KB(KB^{k-1}(G))$  tomando como  $G = KB^0(G)$ .

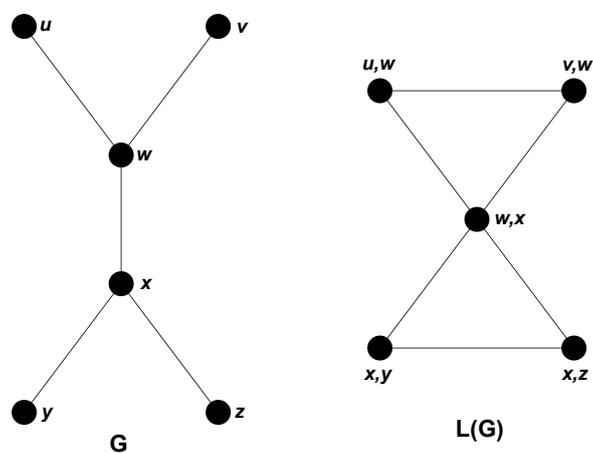


Figura 1.4:  $G$  y su grafo de línea  $L(G)$

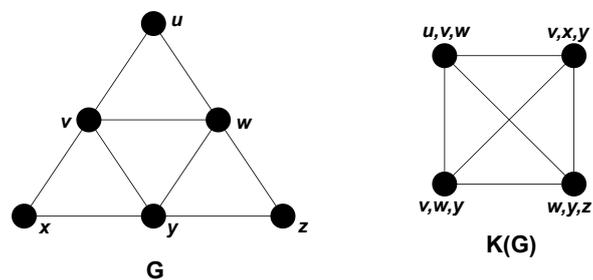
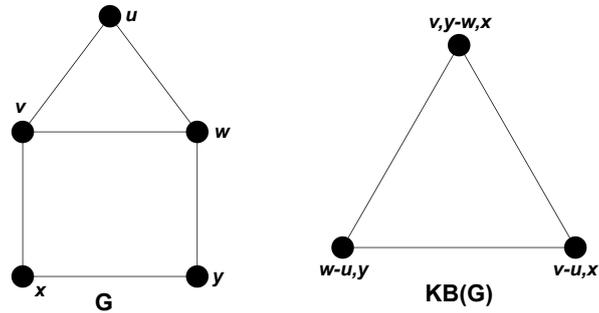


Figura 1.5:  $G$  y su grafo clique  $K(G)$

Figura 1.6:  $G$  y su grafo biclique  $KB(G)$ 

Dado un grafo  $G$ , un *operador*  $H$  aplicado a  $G$  es una función que transforma el grafo  $G$  en otro grafo.

Sean  $G$  un grafo y  $H$  un operador. Diremos que:

- $G$  *diverge* bajo el operador  $H$  si  $\lim_{i \rightarrow \infty} |V(H^i(G))| = \infty$ .
- $G$  *converge* bajo el operador  $H$  si  $\lim_{i \rightarrow \infty} H^i(G) = H^m(G)$  para algún  $m$ .<sup>1</sup>
- $G$  *cicla* bajo el operador  $H$  si  $H^i(G) = H^{i+s}(G)$  para algún  $i, s$  con  $s \geq 1$ . El menor  $s$  con esta propiedad es llamado *período* de  $G$ .

Cabe aclarar que a lo largo de este trabajo, siempre y cuando no se diga lo contrario, supondremos todos los grafos conexos.

### 1.3. Cómo está organizada la tesis

En el Capítulo 2, presentaremos resultados conocidos sobre los grafos clique. Daremos una caracterización para los mismos y mostraremos algunos resultados sobre el comportamiento (convergencia, divergencia y ciclos) del grafo clique iterado.

El Capítulo 3 contiene algunos resultados generales sobre el grafo biclique. Por otro lado, estudiaremos el grafo biclique en árboles, grafos completos y los grafos Cocktail Party. Además finalizaremos el capítulo presentando todos los grafos biclique de hasta 6 vértices.

En el capítulo 4, daremos una caracterización, en el caso general, de los distintos tipos de comportamiento del grafo biclique iterado cuando la cantidad de iteraciones tiende a

<sup>1</sup>Como abuso de notación, diremos también que un grafo  $G$  converge bajo un operador  $H$  si  $H^i(G) = K_1$  para algún  $i$ , y  $H^j(G) = \emptyset$  para  $j > i$ .

infinito. Probamos que un grafo  $G$  diverge bajo el operador biclique si y sólo si  $KB(G)$  contiene a una *gema*, una *casa* o  $K_5$  como subgrafos inducidos. Esta caracterización nos conducirá a un algoritmo de tiempo polinomial para el problema de decisión. Al finalizar el capítulo presentaremos el algoritmo y daremos su complejidad.

El capítulo 5 contiene las conclusiones de esta tesis y problemas abiertos a realizar como trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Grafo Clique

En este capítulo haremos un repaso de los resultados conocidos sobre el grafo clique y el grafo clique iterado. Esto nos servirá de motivación para el estudio del grafo biclique y el grafo biclique iterado, como veremos en los capítulos siguientes.

### 2.1. Introducción

Dada una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de cierto conjunto, el *grafo de intersección* de  $\mathcal{F}$  es el grafo que posee un vértice por cada conjunto de  $\mathcal{F}$ , y dos vértices son adyacentes cuando los correspondientes conjuntos se intersecan. Por otro lado, dado un grafo  $G$ , se dice que  $G$  es un grafo de intersección cuando existe una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de cierto conjunto tal que  $G$  es su grafo de intersección. Los grafos de intersección han sido estudiados en varios contextos [45].

El grafo clique introducido por Hamelink [24], denotado  $K(G)$ , es el grafo de intersección de la familia de todas las cliques de  $G$ . En la Figura 2.1 podemos observar un grafo  $G$  y su correspondiente grafo clique  $K(G)$ . Las cliques de  $G$  son los cuatro triángulos. Podemos observar que todos se intersecan entre si, es por eso que  $K(G)$  es un grafo completo de 4 vértices.

Dos problemas fundamentales aparecen al estudiar los grafos de intersección. El problema de reconocimiento, el cual consiste en dado un grafo  $G$  decidir si existe una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de un conjunto de cierto tipo dado, tal que  $G$  es el grafo de intersección de  $\mathcal{F}$ . El segundo problema es determinar la complejidad computacional del primer problema.

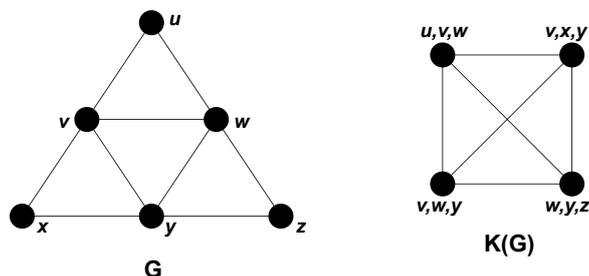


Figura 2.1:  $G$  y su grafo clique  $K(G)$

Se han dado dos caracterizaciones para los grafos clique. En [56], Roberts y Spencer dieron la primera de ellas. Más tarde, en [2] se dio una diferente. Sin embargo, ninguna de ellas parece llevar a un algoritmo de tiempo polinomial para el reconocimiento. Mas aún, la complejidad computacional del problema de reconocimiento de grafos clique se desconocía hasta hace algunos años, cuando se probó que el problema es NP-Completo [1].

A continuación daremos la caracterización de los grafos clique presentada por Roberts y Spencer, para esto recordemos las siguientes definiciones. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de algún conjunto. Diremos que  $\mathcal{F}$  es *intersectante* cuando los subconjuntos de  $\mathcal{F}$  se intersecan de a pares. Cuando toda subfamilia intersectante de  $\mathcal{F}$  tiene intersección total diremos que  $\mathcal{F}$  es una familia *Helly*. Sea  $G$  un grafo y sea  $\mathcal{F}$  una familia de subgrafos de  $G$ , diremos que  $\mathcal{F}$  *cubre los ejes* de  $G$  cuando todo eje  $e_i \in E(G)$  pertenece a algún subgrafo  $F_j \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 2.1.1** ([56]) *Un grafo  $G$  es un grafo clique si y solo si existe una familia de subgrafos completos  $\mathcal{C}$  de  $G$  tales que:*

1.  $\mathcal{C}$  cubre los ejes de  $G$ .
2.  $\mathcal{C}$  es una familia Helly.

Esta caracterización motivó la caracterización de los grafos biclique que será presentada en el próximo capítulo, y que nos será de utilidad a la hora de probar por inspección que ciertos grafos no son grafos biclique. El resto de este capítulo estará centrado en el grafo clique iterado, el cual motiva nuestro estudio del grafo biclique iterado y es el tema central de este trabajo.

## 2.2. Grafo Clique Iterado

En esta sección veremos resultados conocidos sobre el comportamiento del operador clique iterado aplicado a un grafo.

Dado un grafo  $G$ , un operador  $H$  aplicado a  $G$  es una función que transforma el grafo  $G$  en otro grafo. De esta forma, podemos pensar al grafo clique de un grafo como un operador, denotado  $K$ . En otras palabras, podemos definir al *operador clique*  $K$  aplicado a  $G$  como una función,  $K : \text{Grafos} \rightarrow \text{Grafos}$ , que transforma al grafo  $G$  en el grafo de intersección de la familia de todas las cliques de  $G$ , es decir, en  $K(G)$ . Luego, podemos definir al *operador clique iterado* recursivamente de la siguiente forma:

- $K^0(G) = G$
- $K^i(G) = K(K^{i-1}(G))$  para  $i \geq 1$

Varios interrogantes surgen al estudiar el operador clique iterado. El primero es decidir el comportamiento (convergencia, divergencia o ciclos) del operador cuando la cantidad de iteraciones  $i$  tiende a infinito. El segundo es determinar la complejidad computacional asociada al problema anterior. Finalmente, si es posible encontrar clases de grafos para las cuales el operador clique iterado tenga el mismo comportamiento para todo grafo perteneciente a esa clase.

A continuación veremos resultados conocidos sobre el comportamiento de un grafo bajo el operador  $K$ .

En [4] se ha dado una caracterización completa para determinar convergencia del operador clique iterado en los grafos clique-Helly. Esa caracterización, dada por el siguiente teorema, conduce a un algoritmo de tiempo polinomial para el reconocimiento de grafos convergentes restringidos a esa clase. Primero necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.2.1** *Un grafo es desmantelable si existe un ordenamiento de vértices  $v_1, \dots, v_n$  tal que  $v_i$  es un vértice que cumple que  $N(v_i) \subseteq N(v_j)$  para algún otro vértice  $v_j$  en el grafo  $G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .*

**Teorema 2.2.2** ([4]) *Sea  $G$  un grafo clique-Helly. Luego  $G$  converge bajo el operador  $K$  si y solo si  $G$  es desmantelable.*

Cabe destacar que existen grafos convergentes bajo el operador  $K$  que no son desmantelables [53], como por ejemplo el de la siguiente figura (Fig. 2.2).

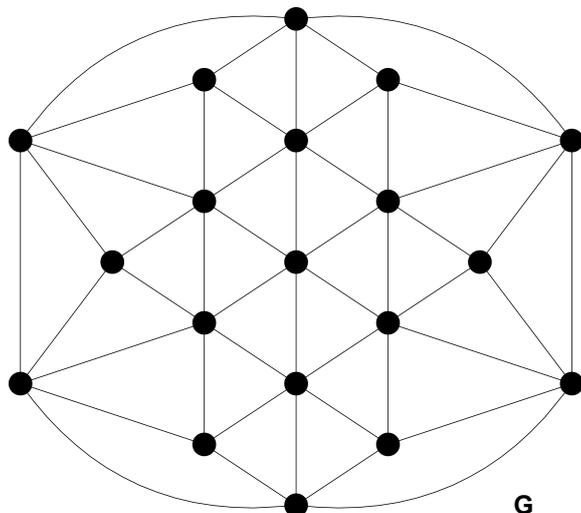


Figura 2.2:  $G$  es convergente bajo el operador  $K$  pero no es desmantelable

En general, no se conocen muchos resultados acerca de la convergencia de un grafo bajo el operador  $K$  cuando no es clique-Helly. La clase de grafos desmantelables es convergente, es decir, si  $G$  es desmantelable, entonces  $G$  es convergente (más allá de ser  $G$  clique-Helly o no) [53]. El estudio de la convergencia tiene también aplicaciones en otras áreas [25].

Veamos resultados acerca de la cantidad de iteraciones para la convergencia. Dado un grafo  $G$ , el *defecto Helly* de  $G$ , es el menor valor  $i$ , tal que  $K^i(G)$  es clique-Helly. En [7] se probó que, dado un  $i$  arbitrario, existen grafos con defecto Helly  $i$ . Por lo tanto, combinando esto con el Teorema 2.2.2, dado  $i$ , vemos que existen grafos que convergen en  $i$  iteraciones. Como ejemplo, podemos observar en la Figura 2.3 una familia de grafos  $G_i$ ,  $i \geq 1$ , tal que el defecto Helly de  $G_i$  es  $i - 1$ .

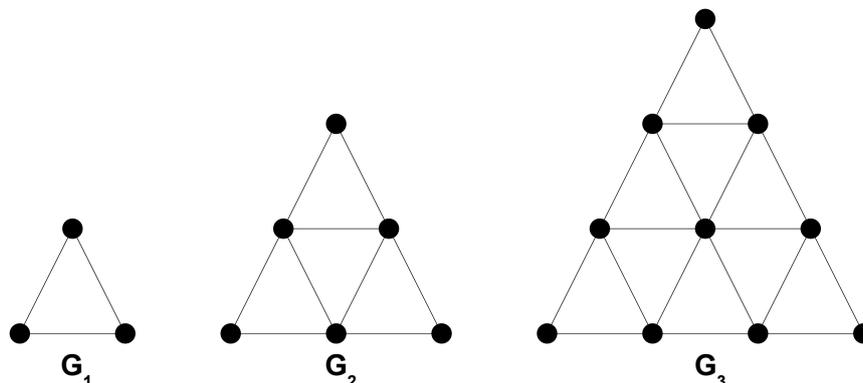


Figura 2.3: El grafo  $G_i$  posee defecto Helly  $i - 1$

La clase de grafos divergentes fue investigada en [48]. Para  $n \geq 3$  denotamos por  $O_n$  al complemento de la unión de  $n$  completos de 2 vértices. El grafo  $O_n$  resultante posee  $2n$  vértices. En la Figura 2.4 podemos ver dos representaciones distintas del grafo  $O_3$ .

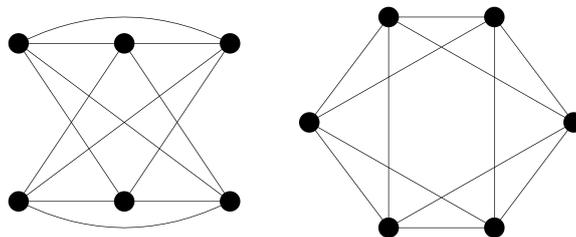


Figura 2.4: Dos representaciones para el grafo  $O_3$

Puede probarse que  $K(O_n) = O_{2n-1}$  lo cual implica que  $O_n$  es divergente bajo el operador  $K$  [12, 48].

En [12, 38] pueden encontrarse resultados acerca de grafos que ciclan bajo el operador clique iterado. En particular, en [12] hay ejemplos de grafos que, dado un  $i$  arbitrario, ciclan bajo el operador clique con período  $i$ .

En las siguientes tres figuras (Fig. 2.5, Fig. 2.6 y Fig. 2.7) podemos ver ejemplos de grafos convergentes, divergentes y cíclicos bajo el operador  $K$ .

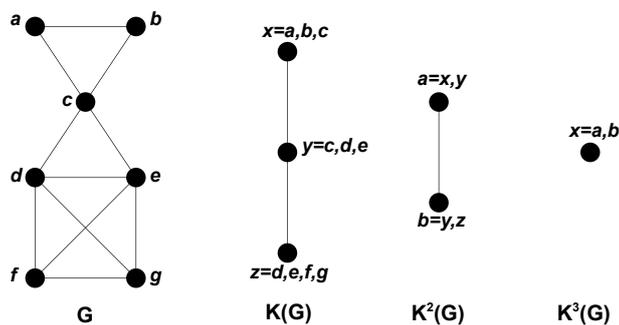


Figura 2.5:  $G$  converge al grafo trivial en 3 iteraciones

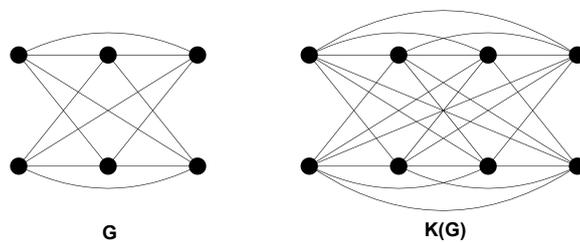


Figura 2.6:  $G = O_3$ ,  $K(G) = O_4$ , continuando  $K^2(G) = O_8$ , resulta ser divergente

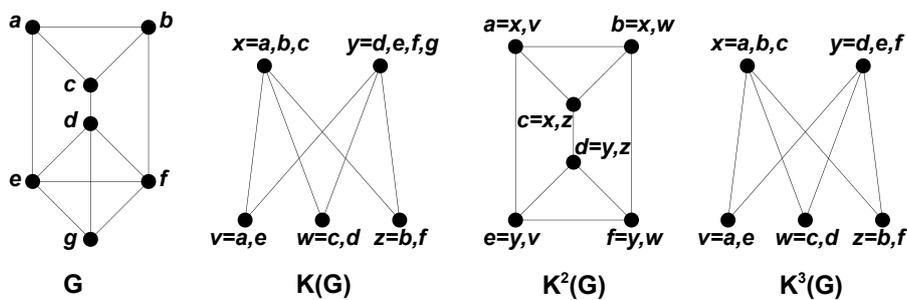


Figura 2.7:  $G$  cicla bajo el operador  $K$

# Capítulo 3

## Operador Biclique

Las bicliques de un grafo fueron estudiadas en varios contextos. En la literatura podemos encontrar trabajos sobre la cantidad de bicliques de un grafo [55], tamaño de la biclique máxima [49, 50] y otros [3, 9, 15, 27, 46, 51, 54, 66, 69]. También se han estudiado las bicliques en el marco de la propiedad Helly [19, 22].

El grafo biclique de  $G$ ,  $KB(G)$ , es el grafo de intersección de las bicliques de  $G$ . Este fue definido recientemente en [18, 21], y es de interés debido a las diferentes aplicaciones de las bicliques en áreas, como genética, biología, el estudio de redes sociales, inteligencia artificial, etc. Por otro lado, tienen interés teórico, ya que están estrechamente relacionadas con temas profundamente estudiados como los grafos discos-Helly, y los retractos. Los grafos bicliques fueron caracterizados en [18, 21]. Sin embargo, aún sigue abierta la pregunta sobre la existencia de un algoritmo eficiente que resuelva el problema de reconocimiento de grafos biclique.

En este capítulo estudiaremos las bicliques en el marco de los grafos de intersección y veremos propiedades del operador biclique aplicado a un grafo  $G$ . Estos resultados nos ayudarán a dar una caracterización sobre la convergencia y divergencia del grafo biclique iterado en el próximo capítulo.

En la primera sección repasaremos resultados conocidos del operador biclique que utilizaremos frecuentemente. En las secciones siguientes daremos propiedades generales del operador biclique, como también resultados acerca de la relación entre las distancias entre bicliques en  $G$  y distancias entre vértices en  $KB(G)$ . En las últimas secciones veremos propiedades del operador para clases de grafos particulares, como por ejemplo, árboles, completos y los Cocktail Party. Finalmente presentaremos todos los grafos biclique de hasta 6 vértices.

### 3.1. Resultados preliminares

Análogamente al grafo clique (Capítulo 2), se define al *grafo biclique* de  $G$ , denotado por  $KB(G)$ , como el grafo de intersección de la familia de todas las bicliques de  $G$  [18, 21]. En la siguiente figura (Fig. 3.1) podemos observar un grafo  $G$  y su correspondiente grafo biclique  $KB(G)$ . Podemos observar que  $G$  posee tres bicliques. Las bicliques  $\{w\} \cup \{u, y\}$  y  $\{v\} \cup \{u, x\}$  resultan ser isomorfas a  $K_{1,2}$  mientras que la biclique  $\{w, x\} \cup \{v, y\}$  es isomorfa a  $K_{2,2}$ . Debido a que las tres se intersecan entre si,  $KB(G)$  resulta ser un grafo completo de 3 vértices.

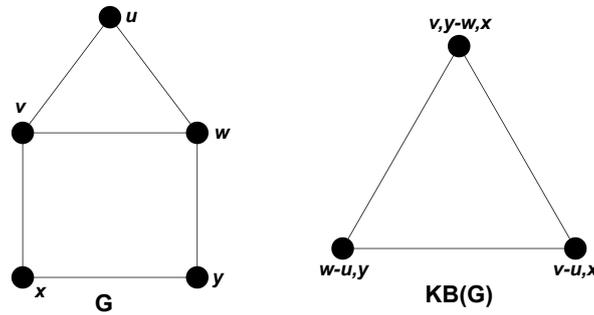


Figura 3.1:  $G$  y su grafo biclique  $KB(G)$

En forma similar al grafo clique, se conoce una caracterización para los grafos biclique, aunque esta tampoco parece conducir a un algoritmo de tiempo polinomial para el problema de reconocimiento. A continuación presentaremos los conceptos necesarios para dicha caracterización, dada en [18, 21].

Dado un conjunto  $S$  de elementos, diremos que una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $S$  *separa elementos* de  $S$  si para todo par de elementos  $x, y \in S$ , existe un conjunto en  $\mathcal{F}$  que contiene a  $x$  y no contiene a  $y$ . Un *cubrimiento* de un conjunto  $S$  es una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $S$  tal que todo elemento de  $S$  está en algún conjunto de  $\mathcal{F}$ .

Sea  $S$  un conjunto de elementos y  $L$  un conjunto de etiquetas. Un subconjunto de  $S$  es un subconjunto  *$L$ -etiquetado* cuando todo elemento de él posee una etiqueta del conjunto  $L$ . Una familia de subconjuntos etiquetados se dice *familia etiquetada*.

Una familia etiquetada de conjuntos  $\mathcal{F}$  se dice *bien etiquetada* si todo elemento que pertenece a un conjunto de  $\mathcal{F}$  posee la misma etiqueta en todos los conjuntos de  $\mathcal{F}$ .

Una familia etiquetada de conjuntos  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  se dice *bipartita intersectante* si  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  son bien etiquetadas y todo conjunto de  $\mathcal{F}_1$  se interseca con todo conjunto de  $\mathcal{F}_2$  en al menos un elemento con distinta etiqueta.

Una familia etiquetada  $\mathcal{F}$  se dice *compatible* si no existen  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  tales que  $F_1$  se

interseca con  $F_2$  en elementos con igual etiqueta y en elementos con distinta etiqueta simultáneamente.

Si  $\mathcal{F}$  es compatible y toda subfamilia bipartita intersectante de  $\mathcal{F}$  contiene un elemento en común diremos que  $\mathcal{F}$  es *bipartita-Helly*.

Dado  $S$  un conjunto de elementos y  $L$  un conjunto de etiquetas,  $|L| = 2$ , diremos que una familia  $L$ -etiquetada  $\mathcal{F}$  es un *bicubrimiento etiquetado* de  $S$  si para todo elemento  $x \in S$  existen dos conjuntos de  $\mathcal{F}$  tal que cada uno contiene a  $x$  con diferente etiqueta.

En la Figura 3.2 podemos ver un ejemplo de una familia  $\{1, -1\}$ -etiquetada, donde  $v_a$  significa que el elemento  $v$  posee la etiqueta  $a$ . La familia  $\mathcal{F}$  es un bicubrimiento de  $S$ . La subfamilia  $\mathcal{F}_2$  es un ejemplo de una familia bien etiquetada mientras que  $\mathcal{F}_1$  no es bien etiquetada. La subfamilia  $\mathcal{F}'_1 \cup \mathcal{F}'_2$  de  $\mathcal{F}$  es bipartita intersectante pero no es compatible. La subfamilia  $\mathcal{F}''_1 \cup \mathcal{F}''_2$  es una subfamilia bipartita intersectante de  $\mathcal{F}$  que resulta ser compatible pero no tiene un elemento en común. Finalmente,  $\mathcal{F}'''_1 \cup \mathcal{F}'''_2$  es una subfamilia bipartita intersectante de  $\mathcal{F}$  compatible y que sí posee un elemento en común.

- $S = \{v, w, z, r, s\}$ ,  $L = \{1, -1\}$
- Subconjuntos de  $S$ :  $F_1 = \{v_1, w_{-1}\}$ ,  $F_2 = \{v_{-1}, w_{-1}\}$ ,  $F_3 = \{s_{-1}, w_{-1}\}$ ,  $F_4 = \{v_1, z_1, r_{-1}, s_1\}$ ,  $F_5 = \{v_{-1}, r_1, w_1\}$ ,  $F_6 = \{v_1, w_1\}$ ,  $F_7 = \{v_{-1}, w_1\}$ ,  $F_8 = \{z_{-1}, r_1\}$
- $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8\}$
- $\mathcal{F}_1 = \{F_1, F_2\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{F_1, F_3\}$
- $\mathcal{F}'_1 = \{F_1\}$ ,  $\mathcal{F}'_2 = \{F_2\}$
- $\mathcal{F}''_1 = \{F_3\}$ ,  $\mathcal{F}''_2 = \{F_4, F_6\}$
- $\mathcal{F}'''_1 = \{F_1, F_4\}$ ,  $\mathcal{F}'''_2 = \{F_5, F_7\}$

Figura 3.2: Ejemplo de una familia etiquetada

Llegamos ahora a dar la caracterización de los grafos bicliques.

**Teorema 3.1.1** ([18, 21]) *Un grafo  $G$  es un grafo biclique si y solo si existe una familia  $\mathcal{C}$   $\{1, -1\}$ -etiquetada de subconjuntos de  $V(G)$  tal que:*

1. *Cada subconjunto de  $\mathcal{C}$  induce un grafo completo en  $G$  y  $\mathcal{C}$  es un cubrimiento de ejes de  $G$ .*
2.  *$\mathcal{C}$  es un bicubrimiento etiquetado de  $V(G)$ .*
3.  *$\mathcal{C}$  es bipartita-Helly.*

4.  $\mathcal{C}$  separa elementos de  $V(G)$ .

Si bien este teorema no parece conducir a un algoritmo de tiempo polinomial para el reconocimiento de grafos biclique, para una cantidad acotada de vértices nos sirve para, o bien decidir que un grafo  $G$  no es grafo biclique, o bien para hallar la familia de subconjuntos  $\mathcal{C}$  de  $V(G)$  que verifica el teorema y de esta forma construir un grafo  $H$  que cumpla que  $G = KB(H)$ .

En el siguiente ejemplo (Fig 3.3) se muestra al grafo  $G$  y al grafo  $H$  que verifica que  $G = KB(H)$ . Si consideramos la siguiente familia  $\mathcal{C}$  de  $V(G)$  construida de la siguiente manera:

- $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$
- $C_1 = \{u_1\}$
- $C_2 = \{u_{-1}, v_{-1}\}$
- $C_3 = \{u_1, v_1, w_1\}$
- $C_4 = \{v_{-1}, w_{-1}\}$
- $C_5 = \{w_1\}$

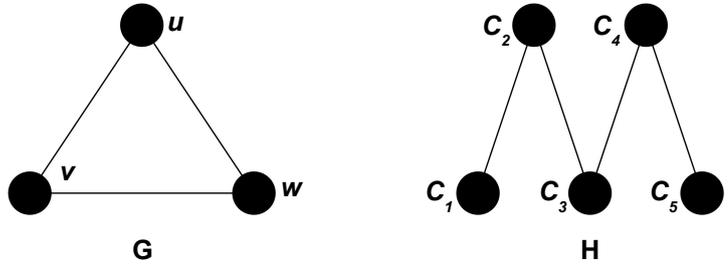


Figura 3.3: El grafo biclique  $G$  y el grafo  $H$  tal que  $G = KB(H)$

Podemos verificar que  $\mathcal{C}$  verifica las hipótesis del Teorema 3.1.1. Ahora construimos el grafo  $H$  tomando un vértice por cada subconjunto de  $\mathcal{C}$  y dos vértices de  $H$  son adyacentes si los correspondientes subconjuntos de  $\mathcal{C}$  se intersecan con diferente etiqueta. De esta forma obtenemos  $H$  como se observa en la Figura. 3.3.

Como corolario del Teorema 3.1.1 se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.2** ([18, 20]) *Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices. El problema de determinar si  $G$  es un grafo biclique está en NP.*

Este teorema se basa en que es posible verificar en tiempo polinomial si una familia de conjuntos es bipartita-Helly [18, 20]. Además, podemos restringir la búsqueda de  $\mathcal{C}$  a familias de tamaño a lo sumo  $O(m + n)$ .

A continuación presentamos un teorema de gran utilidad en nuestro trabajo.

**Teorema 3.1.3** ([18, 21]) *Sea  $G$  un grafo tal que  $G = KB(H)$ , para algún grafo  $H$ , luego todo  $P_3$  inducido en  $G$  está contenido en un diamante o gema inducidos en  $G$  (Fig 3.4).*

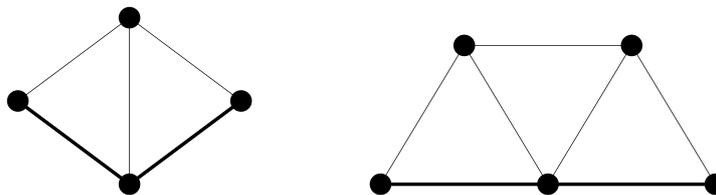


Figura 3.4: Vemos a  $P_3$  con ejes gruesos, contenido en un *diamante* y en una *gema* respectivamente

En la sección 3.3 daremos una demostración diferente para el Teorema 3.1.3.

A partir de esta condición necesaria, fácilmente podemos construir grafos que no son grafos biclique, como por ejemplo los que vemos en la Figura 3.5. En los tres casos se indican con ejes gruesos los  $P_3$  inducidos que no están contenidos en ningún *diamante* o *gema*.

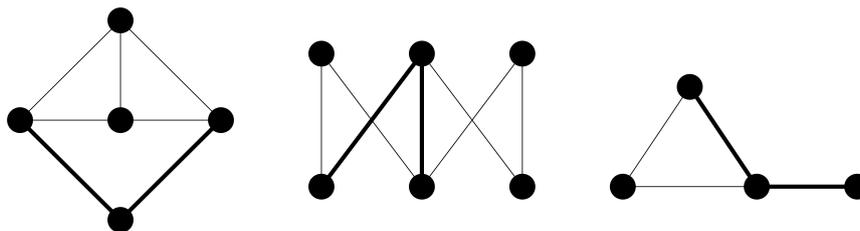


Figura 3.5: Ejemplos de grafos que no son grafos biclique

Un interrogante que surge a partir del Teorema 3.1.3 es el siguiente: ¿si  $G$  es un grafo tal que todo  $P_3$  inducido está contenido en un *diamante* o *gema* entonces  $G$  es grafo biclique?. Más adelante, probaremos que cierto grafo posee todo  $P_3$  contenido en un *diamante* pero no es grafo biclique, es decir, la condición del Teorema 3.1.3 no es una condición suficiente. Como adelanto podemos ver en la siguiente figura (Fig. 3.6), el grafo en cuestión.

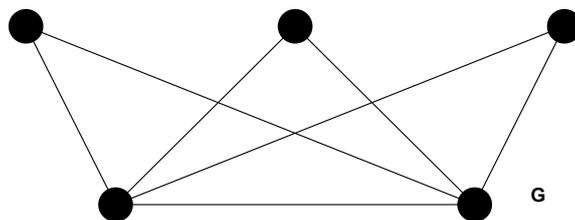


Figura 3.6: El grafo  $G$  no es grafo biclique y cumple que todo  $P_3$  está contenido en un *diamante*

## 3.2. Propiedades de los grafos biclique

En esta sección daremos propiedades generales de los grafos biclique que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Comenzaremos dando una condición necesaria y suficiente para que, dado un grafo  $G$ , su grafo biclique  $KB(G)$  sea conexo.

**Proposición 3.2.1** *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $G$  es conexo si y solo si  $KB(G)$  es conexo.*

**Demostración:**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $G$  es conexo. Sean  $B$  y  $B'$  bicliques de  $G$ . Si  $B$  se interseca con  $B'$ , luego estas bicliques son adyacentes como vértices de  $KB(G)$ . Supongamos ahora que  $B \cap B' = \emptyset$ , luego como  $G$  es conexo existe un camino simple entre cada vértice de  $B$  y  $B'$ . Sean  $b \in B$  y  $b' \in B'$  tales que  $d(b, b') = \min\{d(v, w) \mid v \in B \text{ y } w \in B'\}$ . Sea  $k = d(b, b')$ . Claramente  $k > 0$ , por lo tanto sea  $C = b, v_1, \dots, v_{k-1}, b'$  un camino de longitud  $k$  de  $b$  a  $b'$ . Ahora, cada terna de vértices consecutivos de  $C$  está contenida en una biclique distinta, puesto que los extremos de cada trío no son adyacentes (si no habría un camino  $C'$  de longitud menor a  $k$  de  $b$  a  $b'$ ). Tomemos entonces las bicliques que contienen a las siguientes ternas:  $(b, v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3, v_4), \dots, (v_{k-2}, v_{k-1}, b')$ . Luego cada una de estas se interseca con la anterior. Entonces los vértices correspondientes a estas bicliques forman un camino en  $KB(G)$  desde el vértice correspondiente a la biclique  $B$  al vértice correspondiente a la biclique  $B'$ . Luego  $KB(G)$  es conexo.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $KB(G)$  es conexo. Sean  $v$  y  $w$  vértices de  $G$  no adyacentes. Si existe una biclique que los contenga a ambos listo. Si no, existen  $B$  y  $B'$  bicliques de  $G$  distintas tales que  $v \in B$  y  $w \in B'$ . Luego, como  $KB(G)$  es conexo, existe un camino  $C = B, B_1, \dots, B_{k-1}, B'$  de longitud  $k$  de  $B$  a  $B'$  en  $KB(G)$ . Luego cada vértice de  $C$  representa un biclique distinta de  $G$ , donde la primera contiene a  $v$ , la última a  $w$  y cada una se interseca con la siguiente. Sean en  $G$  los vértices  $v_i \in B_i \cap B_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, k-1$  (consideramos  $B = B_0$  y  $B' = B_k$ ). Ahora, si cada  $v_i$  es adyacente al siguiente, luego

forman un camino de  $v$  a  $w$  en  $G$ . Supongamos que para algún  $i$ ,  $v_i$  no es adyacente a  $v_{i+1}$ . Entonces por construcción estos vértices están contenidos en la biclique  $B_{i+1}$ , por lo tanto existe un  $w_i$  adyacente a ambos. Concluimos entonces que tenemos un camino en  $G$  de  $v$  a  $w$  agregando vértices  $w_i$  cada vez que dos  $v_i$  consecutivos no sean adyacentes. Luego  $G$  es conexo.

**QED**

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.3. Antes del resultado veamos la siguiente definición. Diremos que un grafo es *2-conexo* si debemos quitarle al menos 2 vértices para que deje de ser conexo.

**Lema 3.2.2** *Sea  $G$  un grafo tal que  $G = KB(H)$  para algún grafo  $H$ . Luego  $G$  resulta ser 2-conexo. Además, si  $G$  tiene tres o más vértices entonces  $d(v) \geq 2$  para todo  $v \in V(G)$ .*

**Demostración:** Para la primera parte, basta ver que  $G$  no posee vértices de corte. Supongamos que  $v$  es vértice de corte de  $G$ . Sean ahora  $x$  e  $y$  vértices adyacentes a  $v$ , tales que no exista un camino entre ellos que no pase por  $v$ . Estos vértices existen puesto que  $v$  es de corte. Luego  $x, v, y$  forman un  $P_3$  inducido en  $G$  que no está contenido ni en un *diamante* ni en una *gema*, lo cual es absurdo por Teorema 3.1.3. Luego  $G$  no posee vértices de corte, por lo tanto, es 2-conexo.

Supongamos ahora que  $G$  tiene tres o más vértices. Supongamos que existe un vértice  $v$  de grado 1. Luego, existe otro vértice  $w$  adyacente a  $v$ . Ahora, como  $G$  tiene tres o más vértices, debe existir otro vértice  $x$  adyacente a  $w$  (ya que  $G$  es conexo) y no a  $v$ , puesto que  $d(v) = 1$ . Luego  $(v, w, x)$  inducen un  $P_3$  en  $G$  que contradice al Teorema 3.1.3 debido que no está contenido ni en un *diamante* ni en una *gema*. Concluimos que  $d(v) \geq 2$  como queríamos demostrar.

**QED**

A continuación presentaremos un resultado de suma importancia en la caracterización del comportamiento del grafo biclique iterado. Este resultado nos dice que dado un subgrafo inducido  $G$  de un grafo  $H$  entonces el grafo biclique de  $G$  es subgrafo (no necesariamente inducido) del grafo biclique de  $H$ . Lo notable de esto es que si el grafo biclique de  $G$  resultase completo entonces sería inducido en  $KB(H)$  por lo tanto podríamos aplicar nuevamente este resultado según veremos en el próximo capítulo.

**Lema 3.2.3** *Sea  $G \subseteq H$ , luego  $KB(G)$  es subgrafo de  $KB(H)$ .*

**Demostración:** Sean  $b_1, b_2, \dots, b_k$  las bicliques de  $G$ . Cada biclique  $b_i$ , o bien es biclique de  $H$ , o bien está contenida en una biclique  $B_i$  de  $H$  más grande, es decir, con más vértices y ejes. Cabe destacar que si  $B_i$  contiene a  $b_i$ , no puede contener a  $b_j$ , con  $j \neq i$ , puesto que  $b_i$  y  $b_j$  son bicliques de  $G$  que es subgrafo inducido de  $H$ . Luego tenemos que si  $b_i \cap b_j \neq \emptyset$  en  $G$  entonces  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  en  $H$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, k$  y si  $b_i \cap b_j = \emptyset$  en  $G$  entonces  $B_i \cap B_j = \emptyset$  o  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  en  $H$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, k$  ya que al estar contenidas en bicliques más grandes de  $H$ , dos que no se intersecaban en  $G$  pueden hacerlo en  $H$  (Figura 3.7). Por todo esto,  $KB(H)$  tiene al menos la misma cantidad de vértices que  $KB(G)$  (o más también, si es que los vértices de  $H$  que no están en  $G$  forman nuevas bicliques), donde los que son adyacentes en  $KB(G)$  también lo son en  $KB(H)$  y los que no son adyacentes en  $KB(G)$  pueden llegar a serlo en  $KB(H)$ . Luego  $KB(G)$  es subgrafo de  $KB(H)$ .

**QED**

En el siguiente ejemplo, Figura 3.7, podemos ver que  $G$  es subgrafo inducido de  $H$  y su grafo biclique,  $KB(G)$ , resulta ser subgrafo, no inducido, de  $KB(H)$ .

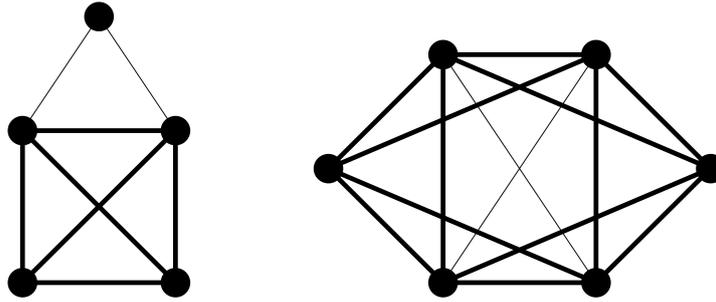


Figura 3.7:  $G = K_4 \subseteq H = \text{casa}$ , los ejes gruesos representan  $KB(G)$  que es subgrafo de  $KB(H)$

### 3.3. Distancias en $G$ y $KB(G)$

En esta sección definiremos la distancia entre bicliques. Además veremos la relación entre la distancia entre bicliques de un grafo  $G$  y la distancia entre los respectivos vértices en el grafo  $KB(G)$ . Luego, de acuerdo a la distancia entre dos bicliques de un grafo mostraremos la existencia de otras bicliques más. Daremos una nueva demostración para el Teorema 3.1.3 y demostraremos que el grafo *corona* no es grafo biclique, mostrando así que la condición del Teorema 3.1.3 no es suficiente.

Basándonos en la definición de distancia entre cliques de un grafo dada en [52], definiremos la distancia entre bicliques de un grafo de la siguiente forma:

**Definición 3.3.1** Sea  $G$  un grafo y  $B, B'$  bicliques de  $G$ . Definimos la distancia entre  $B$  y  $B'$  como  $d(B, B') = \min\{d(b, b') / b \in B \text{ y } b' \in B'\}$ .

A continuación presentaremos un resultado fundamental para dar otra demostración del Teorema 3.1.3 como también para demostrar que el grafo *corona* no es grafo biclique. Este resultado relaciona la distancia entre dos bicliques de un grafo  $G$  con la distancia entre los dos vértices asociados a esas bicliques en el grafo biclique  $KB(G)$ .

**Lema 3.3.2** Sea  $G$  un grafo y  $B, B'$  bicliques de  $G$ . Luego  $d_{KB(G)}(B, B') = \left\lceil \frac{d_G(B, B') + 1}{2} \right\rceil + 1$ .

**Demostración:** Sean  $v_0, v_k$  tales que  $v_0 \in B, v_k \in B'$  y  $d(v_0, v_k) = d_G(B, B') = k$ . Supongamos que  $k > 0$ , ya que si  $d_G(B, B') = 0$ , luego  $B$  y  $B'$  se intersecan en  $G$  por lo tanto  $B$  y  $B'$  serán vértices adyacentes en  $KB(G)$  lo cual resulta  $d_{KB(G)}(B, B') = \left\lceil \frac{0+1}{2} \right\rceil + 1 = 0 + 1 = 1$ .

Sea  $C_1 = v_0, v_1, \dots, v_k$  un camino en  $G$  de  $B$  a  $B'$  de longitud  $k$ . Tomemos ahora  $B_i \in V(KB(G))$  tales que  $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \subseteq B_i$  en  $G$  para  $i = 0, \dots, k-2$ . Estas bicliques  $B_i$  de  $G$  existen puesto que  $(v_i, v_{i+2}) \notin E(G)$  ya que sino habría un camino de longitud menor a  $k$  de  $B$  a  $B'$ . Luego  $B, B_0, B_2, B_4, \dots, B_{2j}, \dots, B'$  es un camino en  $KB(G)$  de  $B$  a  $B'$  de longitud  $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + 1$  por lo tanto como  $d_G(B, B') = k$  tenemos que  $d_{KB(G)}(B, B') \leq \left\lceil \frac{d_G(B, B') + 1}{2} \right\rceil + 1$ . Un esquema de esta primera desigualdad puede observarse en la siguiente figura (Fig. 3.8).

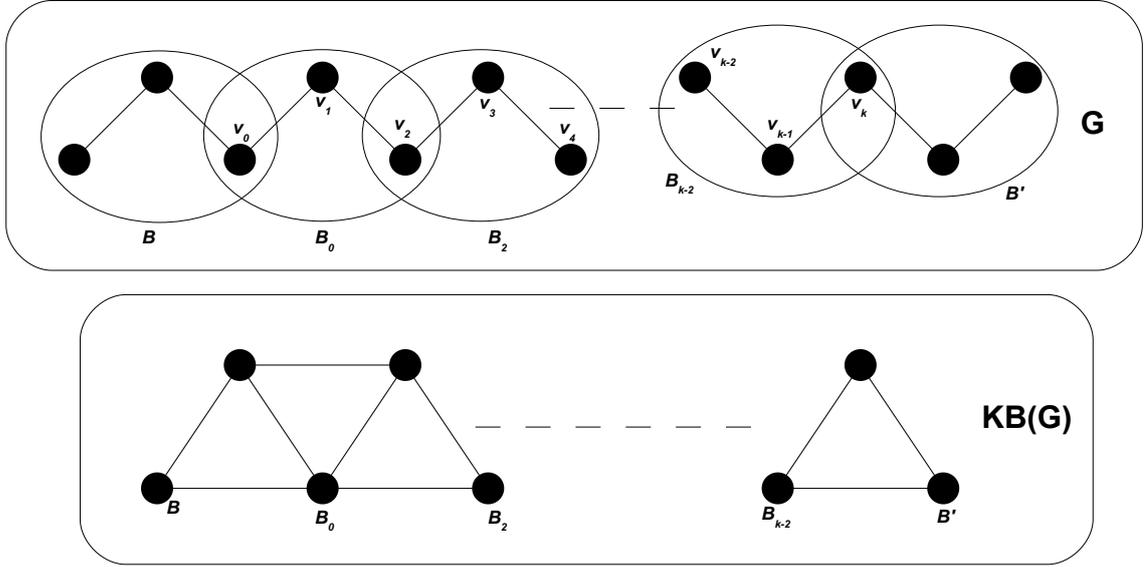


Figura 3.8: Primera desigualdad

Sea ahora  $C_2 = B_0, B_1, \dots, B_s$  un camino de longitud mínima en  $KB(G)$  de  $B = B_0$  a  $B' = B_s$  (En la Figura 3.9 vemos esta situación). Luego  $d_{KB(G)}(B, B') = s > 0$ . Sean ahora  $v_{2i} \in B_i \cap B_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, s-1$  en  $V(G)$ . De esta forma obtenemos los vértices  $v_0, v_2, \dots, v_{2s-2}$  de  $G$ . Ahora, para  $i = 1, \dots, s-1$ , o bien,  $v_{2i-2}$  es adyacente a  $v_{2i}$  o bien  $v_{2i-2}$  no es adyacente a  $v_{2i}$ . En el caso en que no sean adyacentes, existe un vértice  $v_{2i-1}$  adyacente a ambos puesto que  $v_{2i-2}$  y  $v_{2i}$  pertenecen a la biclique  $B_i$  de  $G$ . Entonces, el camino más largo de  $v_0$  a  $v_{2s-2}$  se da cuando estos pares de vértices consecutivos no son adyacentes. En tal situación, agregando entre cada par el vértice adyacente a ambos, tenemos que  $v_0, v_1, \dots, v_{2s-2}$  inducen un camino en  $G$  de  $B$  a  $B'$  de longitud  $2s-2$ . Ahora como  $B'$  puede o no contener al vértice  $v_{2s-3}$ , la longitud del camino es entonces  $2s-2+t$  donde  $t$  vale  $-1$  o  $0$  dependiendo de si  $B'$  contiene a  $v_{2s-3}$  o no. Luego,

$$d_G(B, B') \leq 2s - 2 + t, \quad \text{con } t = 0 \text{ o } -1$$

$$\frac{d_G(B, B') + 2 + t}{2} \leq s = d_{KB(G)}(B, B'), \quad \text{con } t = 0 \text{ o } 1$$

$$\frac{d_G(B, B') + t}{2} + 1 \leq d_{KB(G)}(B, B'), \quad \text{con } t = 0 \text{ o } 1$$

Finalmente obtenemos,

$$\left\lceil \frac{d_G(B, B') + 1}{2} \right\rceil + 1 \leq d_{KB(G)}(B, B')$$

Combinando ambas desigualdades llegamos a nuestro resultado.

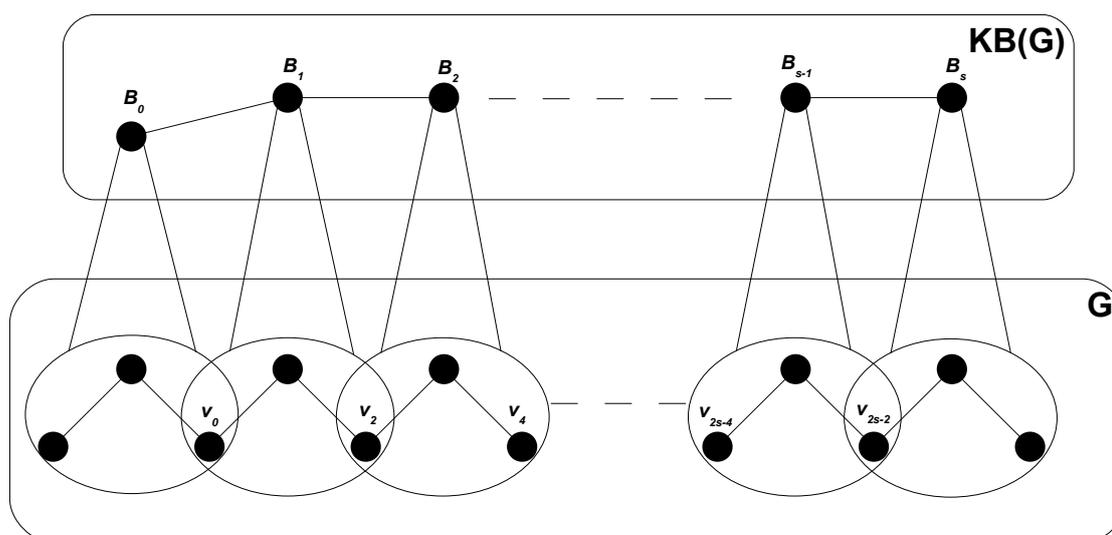


Figura 3.9: Segunda desigualdad

**QED**

Veamos ahora que, basándonos en la distancia entre dos bicliques de un grafo  $G$ , podemos asegurar la existencia de otras bicliques entre ellas, donde entre ellas significa que si la distancia entre las bicliques  $B$  y  $B'$  de  $G$  es  $k$  entonces las bicliques nuevas que encontramos están a una distancia a lo sumo  $k - 1$  de  $B$  y  $B'$  en  $G$ .

**Lema 3.3.3** *Sea  $G$  un grafo y  $B, B'$  bicliques de  $G$  tales que  $d_G(B, B') = 1$ , luego existen al menos dos bicliques más en  $G$  que se intersecan entre ellas y que también se intersecan con  $B$  y  $B'$ .*

**Demostración:** Sean  $v \in B$  y  $w \in B'$  adyacentes. Sean  $x \in B$  adyacente a  $v$  e  $y \in B'$  adyacente a  $w$  (Fig. 3.10).



Figura 3.10:  $B$  y  $B'$  están a distancia 1

Tenemos los siguientes casos:

- Si  $(x, w), (x, y), (v, y) \notin E$ , entonces los conjuntos de vértices  $(x, v, w)$  y  $(v, w, y)$  inducen subgrafos bipartitos completos que están contenidos en dos bicliques de  $G$  diferentes de  $B$  y  $B'$ .
- Si  $(x, w) \in E, (x, y), (v, y) \notin E$ , entonces  $(x, w, y)$  y  $(v, w, y)$  inducen subgrafos bipartitos completos que están contenidos en dos bicliques de  $G$  diferentes de  $B$  y  $B'$ . El caso  $(v, y) \in E, (x, y), (x, w) \notin E$  es análogo.
- Si  $(x, w), (y, v) \in E, (x, y) \notin E$ , entonces  $(x, v, y), (x, w, y)$  y  $(v, w)$  inducen subgrafos bipartitos completos que están contenidos en tres bicliques de  $G$  diferentes de  $B$  y  $B'$ . Los casos  $(x, w), (x, y) \in E, (v, y) \notin E$  y  $(x, y), (v, y) \in E, (x, w) \notin E$  resultan análogos.
- Si  $(x, w), (y, w), (x, y) \in E$ , entonces  $(x, y), (v, y), (v, w), (x, w)$  inducen subgrafos bipartitos completos que están contenidos en cuatro bicliques de  $G$  diferentes de  $B$  y  $B'$ .
- Si  $(x, y) \in E, (x, w), (v, y) \notin E$ , entonces el conjunto de vértices  $(x, v, w, y)$  induce un subgrafo bipartito completo que está contenido en una biclique de  $G$  diferente de  $B$  y  $B'$ . Ahora, como  $B$  es biclique existirá un vértice  $z$  adyacente a  $v$  (o a  $x$ ) que no está en la biclique que contiene a los vértices  $(x, v, w, y)$ . Si  $z$  no es adyacente a  $y$  ni a  $w$ , luego  $(z, v, w)$  (o  $(z, x, y)$ ) inducen otro subgrafo bipartito completo que está contenido en una biclique de  $G$  diferente de  $B$  y  $B'$ . Análogamente, tomando un vértice  $u \in B'$  obtenemos una tercera biclique. Si  $z$  es adyacente a  $w$  o adyacente a  $w$  y a  $y$  estamos en uno de los casos anteriores intercambiando  $x$  por  $z$ . Por último, cabe destacar que  $z$  no puede ser adyacente a  $y$  y no ser adyacente a  $w$ , puesto que si no tendríamos que  $(x, v, w, y, z)$  induce un subgrafo bipartito completo que contiene a  $z \in B$ . Esto no puede pasar porque  $z$  no pertenecía a la biclique que contiene a los vértices  $(x, v, w, y)$ .

QED

Como resultado inmediato del Lema 3.3.3, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.4** *Sea  $G$  un grafo y  $B, B'$  bicliques de  $G$  tales que  $B \cap B' = \emptyset$ . Supongamos que existe un eje  $e \in G$  con un extremo en  $B$  y otro en  $B'$ . Si  $B_1$  es la biclique que contiene al eje  $e$ , entonces existe otra biclique  $B_2 \neq B, B', B_1$  tal que  $B_2$  se interseca con  $B, B'$  y  $B_1$ .*

**Demostración:** Inmediata por Lema 3.3.3.

QED

El resultado siguiente también será de gran utilidad para demostrar el Teorema 3.1.3 como también para demostrar que el grafo *corona* no es grafo biclique. Este resultado es una generalización del Lema 3.3.3.

**Teorema 3.3.5** *Sea  $G$  un grafo y  $B, B'$  bicliques de  $G$  tales que  $d_G(B, B') = k > 1$ , luego existen al menos  $k + 1$  bicliques en  $G$  que distan a lo sumo  $k - 1$  de  $B$  y  $B'$ .*

**Demostración:** Sean  $v_0 \in B$  y  $v_k \in B'$  tales que  $d_G(v_0, v_k) = d_G(B, B') = k$  (Fig. 3.11).

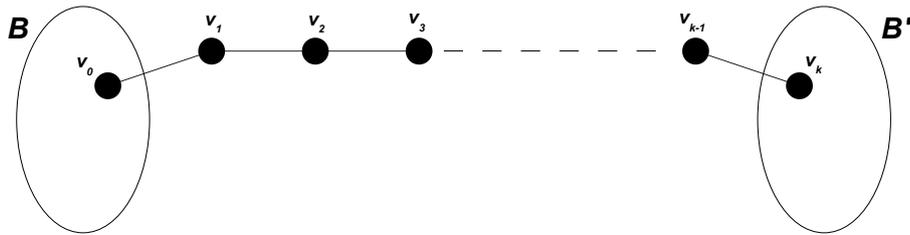


Figura 3.11:  $B$  y  $B'$  están a distancia  $k$

Luego, existe  $C = v_0, v_1, \dots, v_k$  camino de longitud  $k$  de  $B$  a  $B'$  (de  $v_0$  a  $v_k$ ). Claramente  $v_i$  no es adyacente a  $v_j$  para todo  $i = 0, \dots, k - 1$  y  $j \neq i + 1$  puesto que si no habría un camino de longitud menor. Luego, cada trío  $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2})$  está contenido en una biclique diferente de  $G$  para  $i = 0, \dots, k - 2$ . De esta forma tenemos  $k - 2$  bicliques que distan a lo sumo  $k - 1$  de  $B$  y  $B'$ . Veamos cuales son las dos que faltan. Sea un vértice  $x \in B$  tal que  $(x, v_0) \in E$ . Luego, si  $(x, v_1) \notin E$  entonces  $(x, v_0, v_1)$  inducen un subgrafo bipartito

completo que está contenido en una biclique de  $G$  diferente de  $B$ . Ahora si  $(x, v_1) \in E$  entonces  $(x, v_1, v_2)$  inducen un subgrafo bipartito completo que está contenido en una biclique de  $G$  diferente de  $B$ . Cabe aclarar que  $(x, v_i) \notin E$  para  $i \geq 2$  puesto que sino habría un camino de  $B$  a  $B'$  de longitud menor a  $k$ . Finalmente, la biclique restante la obtenemos de forma análoga tomando un vértice  $y \in B'$  tal que  $(y, v_k) \in E$ .

**QED**

Veamos ahora la demostración del Teorema 3.1.3 basada en distancias entre bicliques.

**Teorema 3.3.6** *Sea  $G$  un grafo tal que  $G = KB(H)$ , es decir,  $G$  es el grafo biclique de algún grafo  $H$ , luego todo  $P_3$  inducido en  $G$  está contenido en un diamante o gema inducidos en  $G$  (Fig 3.4).*

**Demostración:** Sea  $u, v, w$  un  $P_3$  inducido en  $G$  y sean  $U, V$  y  $W$  las bicliques de  $H$  asociadas a los vértices  $u, v$  y  $w$  de  $G$ . Veamos los siguientes casos:

- $V$  contiene una arista con extremos en  $U$  y  $W$ . Luego por el Corolario 3.3.4, existe otra biclique  $B$  en  $H$  distinta de  $U, V$  y  $W$  que se interseca con las tres. Luego, si  $b$  es el vértice asociado a la biclique  $B$ , obtenemos que  $(u, v, w, b)$  inducen un *diamante* en  $G$  que contiene al  $P_3$ .
- $V$  no contiene una arista con extremos en  $U$  y  $W$ . Por lo tanto, como  $V$  se interseca con  $U$  y con  $W$  tenemos que  $V$  contiene un  $P_3 = (a, b, c)$  tal que  $a \in U$  y  $c \in W$  (Fig. 3.12). Sea ahora un vértice  $x \in U$  adyacente a  $a$  y un vértice  $y \in W$  adyacente a  $c$ . Si  $x$  es adyacente a  $b$ , obtenemos que  $(x, b, c)$  inducen un subgrafo bipartito completo que está contenido en una biclique  $Z$  distinta de  $U, V$  y  $W$ , que se interseca con las tres. Luego, si  $z$  es el vértice asociado a la biclique  $Z$  tenemos que  $(u, v, w, z)$  inducen un *diamante* en  $G$  que contiene al  $P_3$ . El caso en que  $y$  es adyacente a  $b$  es análogo. Ahora, si  $x$  no es adyacente a  $b$  e  $y$  no es adyacente a  $b$ , tenemos que  $(x, a, b)$  y  $(b, c, y)$  inducen subgrafos bipartitos completos que están contenidos en bicliques distintas  $Z_1$  y  $Z_2$  respectivamente, distintas de  $U, V$  y  $W$ . Finalmente, estas dos bicliques se intersecan con  $V$  y más aún, una de ellas se interseca con  $U$  y no con  $W$  y la otra con  $W$  y no con  $U$ . Por lo tanto, si  $z_1$  y  $z_2$  son los vértices asociados en  $G$  a las bicliques  $Z_1$  y  $Z_2$ , concluimos que  $(u, v, w, z_1, z_2)$  inducen una *gema* en  $G$  que contiene al  $P_3$ .

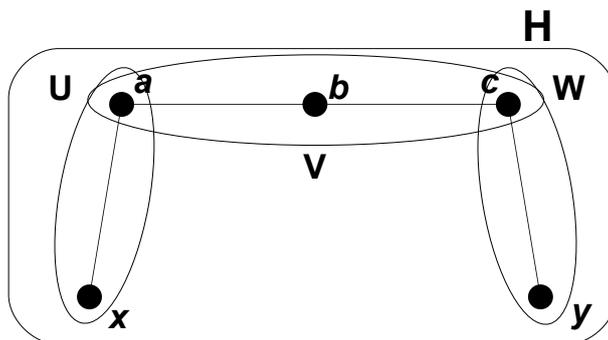


Figura 3.12: Bicliques  $U, V$  y  $W$  del grafo  $H$

De esta forma cubrimos todos los casos y el resultado queda demostrado.

**QED**

Ahora sí, veamos que el grafo *corona* (Fig. 3.13) es un grafo tal que todo  $P_3$  inducido está contenido en un *diamante* inducido de  $G$  pero  $G$  no es grafo biclique. Este resultado nos da un contraejemplo para la vuelta de los Teoremas 3.1.3 y 3.3.6.

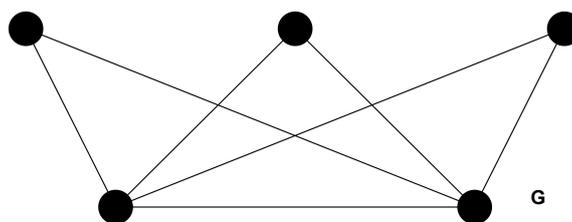


Figura 3.13: El grafo  $G$  no es grafo biclique y cumple que todo  $P_3$  está contenido en un *diamante*

**Proposición 3.3.7** *El grafo corona no es grafo biclique (Fig. 3.13).*

En lugar de demostrar esta proposición daremos un resultado más general. Este implica que la *corona* no es grafo biclique como así tampoco lo son muchos otros grafos.

**Proposición 3.3.8** Sea  $G = KB(H)$  para algún  $H$  donde  $G \neq$  diamante. Luego, no existen  $v_1, v_2 \in V(G)$  tales que  $N(v_1) = N(v_2) = K_2$ .

**Demostración:** Supongamos que existen  $v_1, v_2 \in V(G)$  tales que  $N(v_1) = N(v_2) = K_2$ . Luego,  $d_G(v_1, v_2) = 2$  y por lo tanto, si  $B$  es la biclique de  $H$  correspondiente a  $v_1$  y  $B'$  es la biclique de  $H$  correspondiente a  $v_2$  por el Lema 3.3.2,  $d_H(B, B') = 2$  o  $d_H(B, B') = 1$ . Veamos cada caso.

■ Caso  $d_H(B, B') = 2$

Luego tenemos alguna de las situaciones descritas en la Figura 3.14. Veamos que en ambas llegamos a un absurdo.

- Caso (a): Existe alguno de los ejes punteados, aunque no ambos simultáneamente, o no existe ninguno (Fig. 3.14a). Luego, suponiendo que el eje punteado que sale de  $B$  a  $v$  no existe, los vértices que se observan en  $B$  junto con el vértice  $v$  inducen un subgrafo bipartito completo que está contenido en una biclique que no se interseca con  $B'$ . Esto es absurdo puesto que  $v_1$  y  $v_2$  son vértices mellizos en  $G$ .
- Caso (b): En este caso llegamos a un absurdo puesto que se forman en  $H$  cuatro bicliques que se intersecan con  $B$  y  $B'$ . Tenemos una por cada elección de un vértice de  $B$ , uno de  $B'$  y  $v$  (Fig. 3.14b). Luego  $N(v_1) = N(v_2) \neq K_2$ .

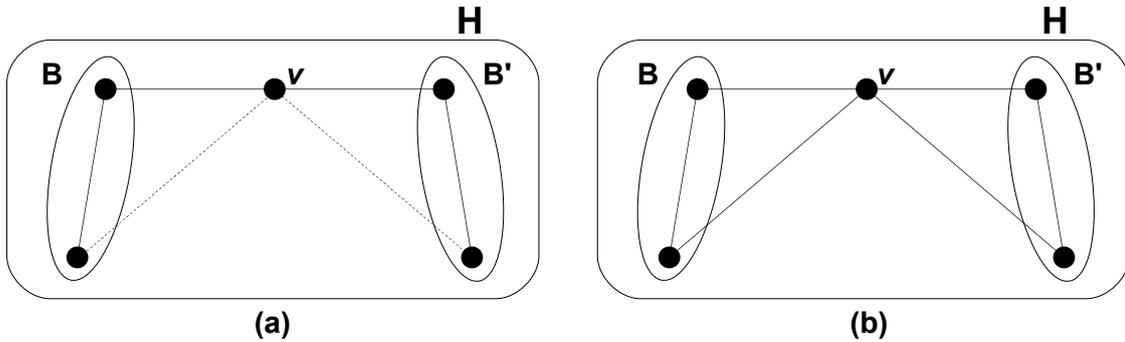


Figura 3.14: Distintas opciones para  $H$  si  $d_H(B, B') = 2$ , los ejes punteados pueden estar (no simultáneamente) o no

■ Caso  $d_H(B, B') = 1$

En este caso, por el Lema 3.3.3, existen al menos dos bicliques  $B_1, B_2$  en  $H$  que se intersecan con  $B$  y con  $B'$ . Claramente deben ser exactamente dos, puesto que en caso

contrario  $N(v_1) = N(v_2) \neq K_2$ . Ahora, observando la demostración del Lema 3.3.3, solo en los dos primeros casos hay exactamente dos bicliques que se intersecan con  $B$  y  $B'$  en  $H$ . La Figura 3.15 muestra las dos opciones posibles (sin los vértices  $z$ ,  $z_1$  y  $z_2$ ). Se respetaron los nombres del Lema 3.3.3, Figura 3.10.

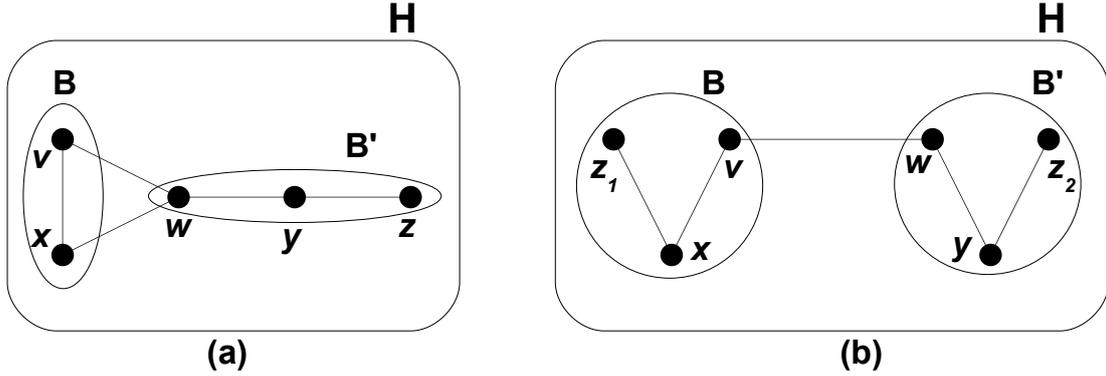


Figura 3.15: Únicas dos opciones para  $H$  con dos bicliques que se intersecan con  $B$  y  $B'$

- Caso (a): Como  $B'$  es biclique en  $H$ , debe existir un vértice  $z$  adyacente a  $y$  pero no adyacente a  $w$ . Ahora, según podemos ver en la Figura 3.15a,  $H$  posee cuatro bicliques tales que inducen un *diamante* en  $G$ . Como  $G \neq \text{diamante}$  debe existir otra biclique más en  $H$  que no se interseca ni con  $B$  ni con  $B'$ . Entonces, esta nueva biclique debe formarse con ejes de  $B_1 \cup B_2$  o con nuevos vértices adyacentes a  $B_1$  o a  $B_2$  (Fig. 3.15a). En ambos casos puede verse que esta nueva biclique se interseca o bien con  $B$ , o bien con  $B'$ , o bien con ambas simultáneamente ya que tanto  $B$  como  $B'$  tienen vértices en  $B_1$  y en  $B_2$ . Luego obtenemos de esta forma que  $B$  o  $B'$  poseen una vecindad más grande que  $K_2$  lo cual es un absurdo.
- Caso (b): Como  $B$  es biclique en  $H$ , debe existir un vértice  $z_1$  adyacente a  $x$ . De la misma forma, como  $B'$  es biclique en  $H$ , debe existir un vértice  $z_2$  adyacente a  $y$  (Fig. 3.15b). Análogamente al caso (a),  $H$  posee cuatro bicliques que inducen un *diamante* en  $G$ . Luego, debe existir otra biclique en  $H$  distinta de estas cuatro tal que no interseque ni con  $B$  ni con  $B'$ . Finalmente, por el mismo argumento que en el caso anterior, de existir esta nueva biclique o bien se intersecaría con  $B$  o bien se intersecaría con  $B'$  cosa que no puede suceder.

Como hemos cubierto todos los casos, luego no existen  $v_1, v_2 \in V(G)$  tales que  $N(v_1) = N(v_2) = K_2$ .

**QED**

Según podemos ver en la siguiente figura (Fig. 3.16), todos estos grafos cumplen que todo  $P_3$  inducido está contenido en un *diamante*, pero ninguno de ellos resulta ser grafo biclique por la Proposición 3.3.8, puesto que poseen dos (o más) vértices mellizos cuya vecindad es  $K_2$ .

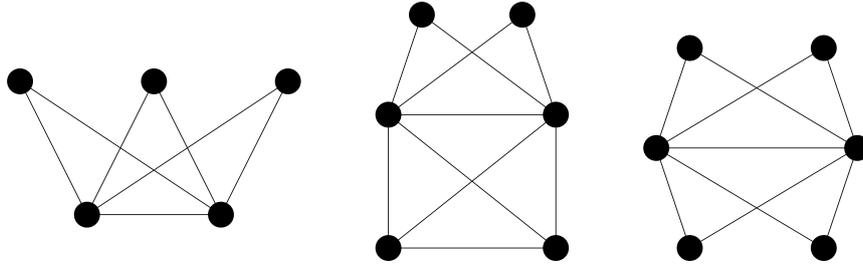


Figura 3.16: Grafos que no son grafos biclique según Proposición 3.3.8

### 3.4. Árboles

En esta sección estudiaremos los grafos biclique de los árboles. El primer resultado nos da información acerca de la cantidad de bicliques de un árbol dependiendo la cantidad de hojas.

**Proposición 3.4.1** *Si  $T$  es un árbol de  $n \geq 3$  vértices luego  $T$  tiene  $n - k$  bicliques, con  $k$  la cantidad de hojas de  $T$ .*

**Demostración:** Vamos a hacer inducción en  $n$ . Para el caso base  $n = 3$ ,  $T = P_3$ , luego  $T$  posee una única biclique y dos hojas, por lo tanto vale la propiedad. Sea  $T$  un árbol de  $n + 1$  vértices. Veamos que  $T$  posee  $n + 1 - k$  bicliques. Sea  $h$  una hoja de  $T$ . Luego  $T - \{h\}$  es un árbol de  $n$  vértices por lo tanto por hipótesis inductiva  $T - \{h\}$  posee  $n - k'$  bicliques con  $k'$  la cantidad de hojas de  $T - \{h\}$ . Sea  $v$  el vértice adyacente a  $h$  en  $T$ . Tenemos dos casos:

Caso 1: Si  $v$  es hoja en  $T - \{h\}$ , luego  $k = k'$  y  $T$  posee una biclique más que  $T - \{h\}$ , formada por  $h, v$  y el único vértice adyacente a  $v$  en  $T - \{h\}$  (si  $T$  es árbol las bicliques son todas de la forma  $K_{1,r}$ , con  $r \geq 2$ , ya que  $T$  es sin ciclos). Por lo tanto,  $T$  tiene  $n - k' + 1 = n + 1 - k' = n + 1 - k$  bicliques como queríamos probar.

Caso 2: Si  $v$  no es hoja en  $T - \{h\}$ , luego  $k - 1 = k'$  y  $T$  posee la misma cantidad de bicliques que  $T - \{h\}$ . Esto es puesto que  $v$ , al no ser hoja en  $T - \{h\}$ , forma una biclique

$B$  de la forma  $K_{1,r}$  con  $r \geq 2$ , donde  $v$  está en la partición de un único vértice. Luego en  $T$ ,  $B$  se extiende con  $h$  quedando de la forma  $K_{1,r+1}$ . Finalmente tenemos que  $T$  posee  $n - k' = n - (k - 1) = n - k + 1 = n + 1 - k$  bicliques.

QED

Del resultado anterior se desprende como corolario inmediato lo siguiente.

**Proposición 3.4.2** *El árbol de  $n$  vértices con mayor cantidad de bicliques es un camino de  $n$  vértices, es decir,  $P_n$ .*

**Demostración:** Directa por la Proposición 3.4.1, puesto que los caminos son los árboles con menor cantidad de hojas (solo dos).

QED

Una pregunta interesante es si para todo grafo biclique  $G$ , existe un vértice  $b$  tal que  $G - \{b\}$  es grafo biclique. Esto no es cierto en general. Por ejemplo, si  $H$  es un ciclo de  $k$  vértices para  $k \geq 7$ , es decir  $C_k$ , y  $G = KB(H)$ , no existe ningún vértice  $b$  con esa propiedad. Sin embargo, si nos restringimos a la clase de árboles, es decir, a los grafos  $G = KB(H)$  donde  $H$  es un árbol, esta clase verifica la propiedad.

En el siguiente ejemplo (Fig. 3.17) vemos al grafo  $C_7$ , luego a  $KB(C_7)$  y finalmente a  $KB(C_7) - \{b\}$ . En este último marcamos en ejes gruesos un  $P_3$  inducido que no está contenido ni en un *diamante* ni en una *gema*.

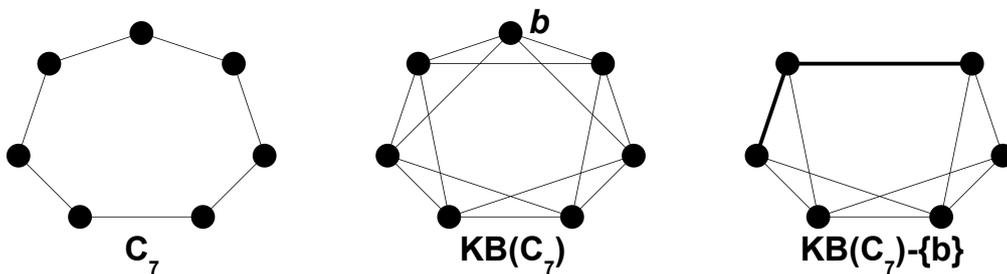


Figura 3.17:  $C_7$ ,  $KB(C_7)$  y  $KB(C_7) - \{b\}$ . En ejes gruesos indicamos un  $P_3$

Antes de presentar el resultado probaremos el siguiente lema que utilizaremos en la demostración.

**Lema 3.4.3** *Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices,  $n \geq 2$ . Luego  $T$  posee una hoja tal que su padre posee a lo sumo un único vértice adyacente de grado mayor a 1.*

**Demostración:** Inducción en  $n$ .

El caso base  $n = 2$ , trivialmente se cumple.

Sea  $T$  un árbol de  $n + 1$  nodos,  $n \geq 2$ . Sea  $h$  una hoja de  $T$ . Luego  $T' = T - \{h\}$  es un árbol de  $n$  vértices, entonces por hipótesis inductiva  $T'$  contiene una hoja  $h'$  que cumple la propiedad. Veamos los siguientes casos en  $T$ :

- $h$  es adyacente a  $h'$ . Luego como  $h'$  tiene un único vértice adyacente en  $T'$  y  $h'$  resulta ser el padre de  $h$  en  $T$ ,  $h$  cumple la propiedad en  $T$ .
- $h$  no es adyacente a  $h'$ . Sea  $p$  el padre de  $h$  y  $p'$  el padre de  $h'$ . Tenemos los siguientes casos;
  - $p = p'$ . Luego tanto  $h$  como  $h'$  cumplen la propiedad en  $T$ , ya que tienen el mismo padre y grado 1.
  - $p \neq p'$  y  $p$  no es adyacente a  $p'$ . En este caso  $h'$  cumple la propiedad en  $T$  ya que al considerar  $h$  en  $T$ , no modifica las adyacencias de  $p'$ .
  - $p \neq p'$  y  $p$  es adyacente a  $p'$ . Ahora en  $T$ , cambia el grado de  $p$  ( $d_T(p) \geq 2$ ) que es adyacente a  $p'$ , entonces si  $p'$  tiene solo a  $p$  como adyacente de grado mayor a 1 entonces  $h'$  sigue cumpliendo la propiedad en  $T$ . Veamos ahora qué sucede suponiendo que  $p'$  tiene otro vértice adyacente de grado mayor a 1. Si  $p$  tiene  $d_T(p) = 2$ , entonces  $h$  cumple la propiedad en  $T$ , puesto que su padre,  $p$ , tiene un único vértice adyacente distinto de  $h$  que es  $p'$ . Finalmente, si  $d_T(p) > 2$ , entonces  $h'$  sigue cumpliendo la propiedad en  $T$ , ya que como la cumplía en  $T'$ , entonces  $d_{T'}(p) \geq 2$  y  $p'$  es adyacente a  $p$ . Por lo tanto el padre de  $h'$  tiene un único vértice adyacente de grado mayor a 1 que es  $p$ .

Como hemos cubierto todos los casos el lema queda demostrado.

**QED**

Veamos ahora sí el resultado sobre árboles.

**Proposición 3.4.4** *Si  $G = KB(T)$  donde  $T$  es un árbol, entonces existe  $b \in V(G)$  tal que  $G - \{b\} = KB(\tilde{T})$  donde  $\tilde{T} \subseteq T$ .*

**Demostración:** Sea  $h$  una hoja de  $T$  con la propiedad del Lema 3.4.3 y sea  $p$  el padre de  $h$ . Consideremos la biclique  $B$  de  $T$ , donde  $B = X \cup Y$  con  $X = \{p\}$  e  $Y = N(p)$  ( $B$  resulta biclique puesto que las bicliques en árboles son isomorfas a  $K_{1,r}$  donde  $r$  es el tamaño de la vecindad del vértice de la otra partición). Claramente  $h \in Y$ . Consideremos el conjunto  $A \subseteq Y$  tal que  $A = \{w \in Y / d_T(w) = 1\}$  y tomemos el nuevo árbol  $\tilde{T} = T - A$  (Fig. 3.18), luego  $\tilde{T}$  posee las mismas bicliques que  $T$  salvo la biclique  $B$  ya que el vértice  $p$  (por como fue elegido  $h$ ) quedo con grado 1 en  $\tilde{T}$ . Si tomamos a  $b$  como el vértice de  $G$  correspondiente a la biclique  $B$  de  $T$  concluimos que  $KB(\tilde{T}) = G - \{b\}$ .

**QED**

A continuación presentamos un ejemplo del resultado anterior. En la Figura 3.18 podemos ver al árbol  $T$  y su grafo biclique  $KB(T)$ . Observemos la biclique  $B = \{p\} \cup \{h_1, h_2, v\}$ . Si quitamos los vértices  $h_1, h_2$  de  $T$  obtenemos  $T - \{h_1, h_2\}$  donde la biclique  $B$  no existe más. Cabe destacar que  $KB(T - \{h_1, h_2\})$  es el mismo grafo de  $KB(T) - \{B\}$ .

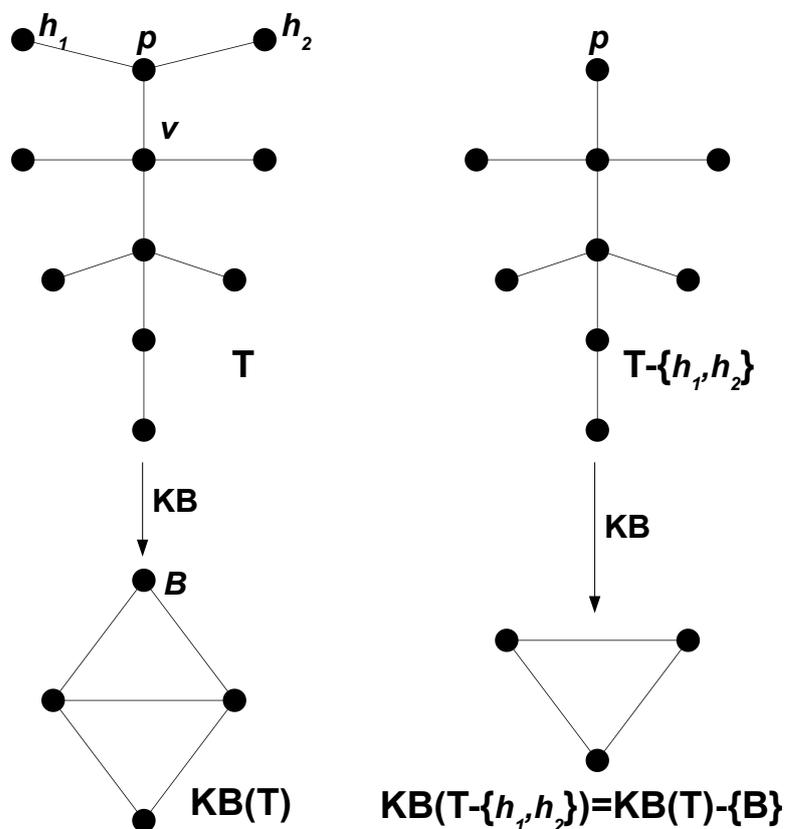


Figura 3.18: Grafos  $T$ ,  $KB(T)$ ,  $T - \{h_1, h_2\}$  y  $KB(T - \{h_1, h_2\}) = KB(T) - \{B\}$

Los siguientes resultados proporcionan un método para construir árboles de manera tal que su grafo biclique sea un completo, o un completo con un vértice adyacente a dos o tres vértices del completo.

**Proposición 3.4.5** *Si  $G = K_n$  entonces existe un árbol  $T$  tal que  $KB(T) = G$ .*

**Demostración:** Si  $n \geq 3$ , basta construir  $T$  de la siguiente forma (ejemplo Fig. 3.19). Pongamos un vértice  $v$  y luego agreguemos  $n - 1$  pares de vértices adyacentes. Finalmente unamos un vértice de cada par con  $v$ . Luego  $KB(T) = G = K_n$ , puesto que tenemos  $n$  bicliques en  $T$ , las cuales todas se intersecan en  $v$  y son  $n - 1$  bicliques de la forma  $K_{1,2}$  por cada par de vértices agregados y  $K_{1,n-1}$  donde  $v$  es el universal de la biclique. Para los casos  $n = 2$  y  $n = 1$  basta tomar  $T$  como  $P_4$  y  $P_3$  respectivamente.

QED

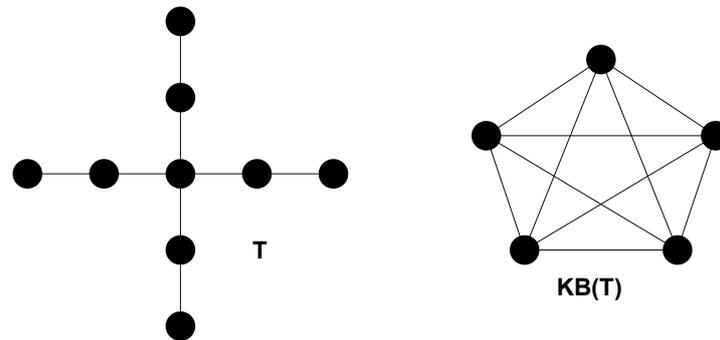


Figura 3.19: Árbol  $T$  y el grafo biclique de  $T$ ,  $KB(T) = K_5$

**Proposición 3.4.6** *Si  $G = K_n$  junto con un vértice adyacente a 2 vértices del completo entonces existe un árbol  $T$  tal que  $KB(T) = G$ .*

**Demostración:** Basta construir el árbol como en la Proposición 3.4.5 y agregar un par de vértices adyacentes y unir uno de ellos a cualquiera de los adyacentes al vértice central del árbol como se ve en la Figura 3.20.

**QED**

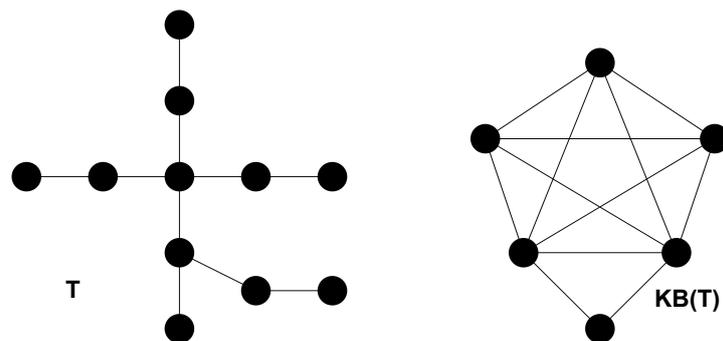


Figura 3.20: Árbol  $T$  y el grafo biclique de  $T$ ,  $KB(T) = K_5 + v$  adyacente a dos del completo

**Proposición 3.4.7** *Si  $G = K_n$  junto con un vértice adyacente a 3 vértices del completo entonces existe un árbol  $T$  tal que al agregarle un eje  $e$  resulta  $KB(T + \{e\}) = G$ .*

**Demostración:** Basta construir el árbol como en la Proposición 3.4.6 y agregar un eje que conecte al vértice al cual le fue unido el par de vértices agregados (según la proposición 3.4.6) con cualquier vértice del árbol de grado 1 que no sea el que fue recientemente agregado como se ve en la Figura 3.21.

QED

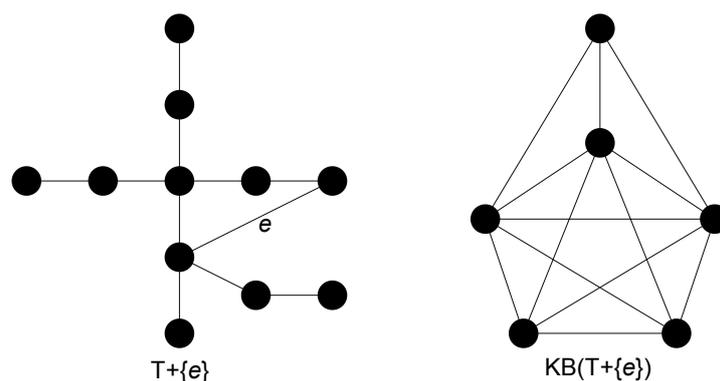


Figura 3.21: Grafo  $T + \{e\}$  y el grafo biclique de  $T + \{e\}$ ,  $KB(T + \{e\}) = K_5 + v$  adyacente a tres del completo

### 3.5. Cocktail Parties y completos

En [55], Prisner determinó una cota superior para la cantidad de bicliques en grafos bipartitos y en grafos en general. Para esto, presentó una familia de grafos, llamada **Cocktail Party**, para la cual esta cota es alcanzada.

En esta sección estudiaremos esta familia de grafos y su comportamiento bajo el operador biclique iterado.

El grafo *Cocktail Party* de orden  $j$ , denotado por  $CP(j)$ , es un grafo bipartito con bipartición  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $|V_1| = |V_2| = j$ , donde  $v_i \in V_1$  es adyacente a  $w_k \in V_2$  para todo  $i \neq k$  (Fig. 3.22).

**Teorema 3.5.1** ([55]) *Sea  $G$  un grafo bipartito de  $n$  vértices. Luego, si  $X$  es la cantidad de bicliques de  $G$ , entonces  $X \leq 2^{\frac{n}{2}} - 2$ . La cantidad de bicliques del grafo  $CP(j)$  es exactamente  $2^j - 2$  y ningún otro grafo bipartito de  $2j$  vértices cumple esta propiedad.*

Observemos que la familia de bicliques del grafo  $CP(j)$  es:

$\{B \mid B = \{v_i \in V_1\}_{i \in I} \cup \{w_k \in V_2\}_{k \in K} \text{ donde } I \subseteq \{1, \dots, j\} \text{ y } K = \{1, \dots, j\} - I\}$ . Podemos ver que, fijado un subconjunto  $S$  de vértices de  $V_1$ , queda determinada una biclique de  $CP(j)$  donde el subconjunto de vértices de  $V_2$  es aquel formado por los vértices de  $V_2$  cuyos índices no están en  $S$ . Luego, como  $V_1$  posee  $2^j$  subconjuntos, restándole el subconjunto vacío y el formado por todos los vértices, concluimos que la cantidad de bicliques de  $CP(j)$  es  $2^j - 2$ .

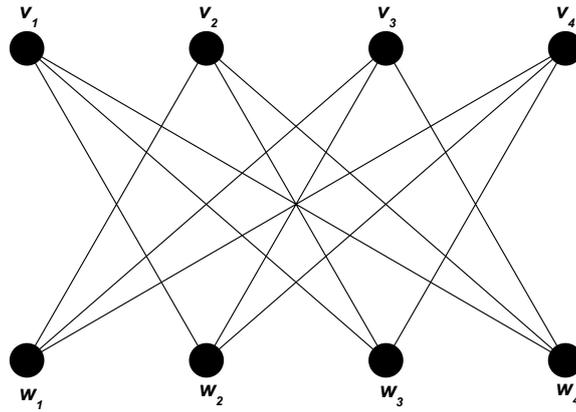


Figura 3.22: Cocktail party de orden 4,  $CP(4)$

Cabe destacar que el grafo  $CP(j)$  se puede pensar como el análogo al grafo  $O_j$  definido en el capítulo 2, en el sentido que los conjuntos de vértices que forman las bicliques en  $CP(j)$  resultan ser los mismos que los conjuntos de vértices que forman las cliques en  $O_j$ , donde este último posee dos cliques más tomando como conjunto de vértices cada partición de los vértices. Por lo tanto,  $CP(j)$  posee  $2^j - 2$  bicliques y  $KB(CP(j)) = O_{2^j-1}$ , mientras que  $O_j$  posee  $2^j$  cliques y  $K(O_j) = O_{2^j-1}$ . Ambos grafos poseen una cantidad exponencial de bicliques y cliques respectivamente. En la siguiente figura (Fig. 3.23) podemos observar a los grafos  $G_1 = CP(4)$  y  $G_2 = O_4$ .

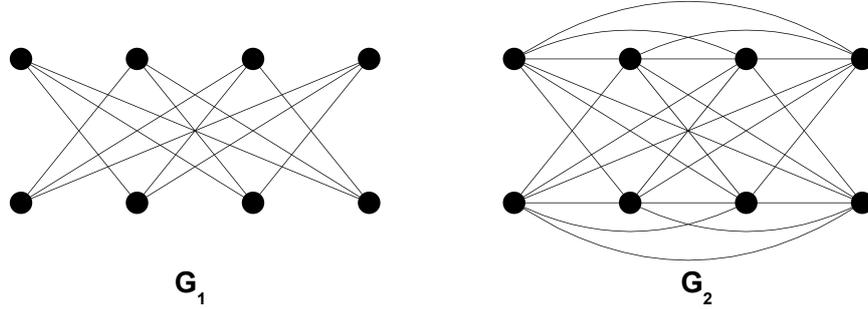


Figura 3.23:  $G_1 = CP(4)$  y  $G_2 = O_4$

Presentamos también los siguientes resultados relacionados.

**Teorema 3.5.2** ([55]) *Sea  $G$  un grafo de  $n$  vértices. Luego  $G$  posee a lo sumo  $n^{\frac{5}{2}}(\phi^n + o(1))$  bicliques.*

Cabe mencionar que en la demostración del Teorema 3.5.2 aparece el número de oro  $\phi$ .

**Teorema 3.5.3** ([55]) *Sea  $G$  un grafo bipartito con bipartición  $V_1, V_2$  tal que  $G$  no contiene como subgrafo inducido al grafo  $CP(j)$  para algún  $j$ . Luego  $G$  posee a lo sumo  $(|V_1| \cdot |V_2|)^{j-1}$  bicliques.*

En el siguiente resultado probamos que el complemento del grafo biclique de un  $CP(j)$  es isomorfo al complemento bipartito de un Cocktail Party de orden mayor.

**Proposición 3.5.4** *Sea  $CP(j)$ ,  $j \geq 3$ . Luego  $KB^c(CP(j))$  es isomorfo a  $CP^{cb}(2^{j-1} - 1)$ .*

**Demostración:**  $CP(j)$  posee  $2^j - 2$  bicliques, por lo tanto,  $KB(CP(j))$  posee  $2^j - 2$  vértices al igual que su complemento. Ahora,  $CP(2^{j-1} - 1)$  posee  $2(2^{j-1} - 1) = 2^j - 2$  vértices también al igual que su complemento bipartito y  $CP^{cb}(2^{j-1} - 1)$  es el grafo unión de  $2^{j-1} - 1$  completos de 2 vértices. Veamos que  $KB^c(CP(j))$  resulta ser también ese grafo. Esto es inmediato puesto que cada biclique  $B$  de  $CP(j)$  se interseca con todas las otras salvo a su opuesta, es decir, a la que resulta inducida por  $V(CP(j)) - B$  (ver Fig. 3.22), luego en  $KB(CP(j))$  cada vértice es adyacente a todos salvo a uno. Por lo tanto, en el complemento cada vértice es adyacente a un único vértice. Luego  $KB^c(CP(j))$  resulta ser la unión de  $\frac{2^j - 2}{2} = 2^{j-1} - 1$  completos  $K_2$  lo cual implica que  $KB^c(CP(j))$  es isomorfo a  $CP^{cb}(2^{j-1} - 1)$ .

QED

A continuación caracterizamos las bicliques del grafo  $KB(CP(j))$ .

**Lema 3.5.5** *Las bicliques de  $KB(CP(j))$ ,  $j \geq 3$ , son todas isomorfas a  $K_{2,2}$ .*

**Demostración:** Como vimos anteriormente, en  $KB(CP(j))$  cada vértice es adyacente a todos salvo a uno. Luego fijado un vértice  $v$ , tomamos un adyacente  $w$ . Ahora tenemos lo siguiente;  $v$  no es adyacente a un único  $x$ ,  $w$  no es adyacente a un único  $y$ ,  $v$  es adyacente a  $y$ ,  $w$  es adyacente a  $x$  y  $x$  es adyacente a  $y$ . Luego  $(v, w, x, y)$  inducen un subgrafo bipartito isomorfo a  $K_{2,2}$  contenido en una biclique isomorfa la cual no puede ser más grande, es decir, no puede tener más vértices, puesto que todo otro vértice es adyacente a ellos cuatro.

QED

En base al resultado anterior, podemos calcular la cantidad de bicliques de  $KB(CP(j))$  de la siguiente forma.

**Lema 3.5.6** *La cantidad de bicliques de  $KB(CP(j))$ ,  $j \geq 3$ , es igual a  $2^{2j-3} - 3 \cdot 2^{j-2} + 1$ .*

**Demostración:**  $KB(CP(j))$  tiene  $2^j - 2$  vértices. Según vimos antes, cada vértice es adyacente a todos menos a uno y las bicliques de  $KB(CP(j))$  son isomorfas a  $K_{2,2}$ .

Fijado un vértice  $v$  y su único vértice no adyacente  $w$  de los  $2^j - 2$  totales, restan  $2^j - 4$  vértices más. Al elegir un vértice  $x$  de ellos, queda determinado su único vértice  $z$  no adyacente. De esta forma tenemos  $(2^j - 2) \cdot (2^j - 4) = 2^{2j} - 3 \cdot 2^{j+1} + 8$  posibles elecciones. Claramente hay casos repetidos. Exactamente cada biclique se repite las siguientes 8 veces:

1.  $(v, w, x, z)$
2.  $(v, w, z, x)$
3.  $(w, v, x, z)$
4.  $(w, v, z, x)$
5.  $(x, z, v, w)$
6.  $(x, z, w, v)$
7.  $(z, x, v, w)$
8.  $(z, x, w, v)$

Luego la cantidad de bicliques distintas son  $\frac{2^{2j}-3\cdot 2^{j+1}+8}{8} = 2^{2j-3} - 3\cdot 2^{j-2} + 1$  como queríamos demostrar.

**QED**

Como corolario de los resultados anteriores podemos expresar la cantidad de bicliques del grafo  $KB(CP(j+2))$  en función de la cantidad de bicliques de los grafos  $CP(j+1)$  y  $CP(j)$ .

**Corolario 3.5.7** *Sea  $CP(j)$ ,  $j \geq 3$ . Sean  $X$  la cantidad de bicliques de  $KB(CP(j+2))$ ,  $Y$  la cantidad de bicliques de  $CP(j+1)$  y  $Z$  la cantidad de bicliques de  $CP(j)$ . Luego  $X = (Y+1) \cdot (Z+1)$ .*

**Demostración:** Trivial combinando el Teorema 3.5.1 y el Lema 3.5.6.

**QED**

En el resto de esta sección estudiaremos las bicliques y los grafos biclique de los grafos completos. Los resultados expuestos a continuación nos serán de gran utilidad para caracterizar a los Cocktail Party en base a los completos y principalmente para demostrar resultados en el próximo capítulo.

El siguiente Lema es directo, puesto que cada eje de un grafo completo es una biclique.

**Lema 3.5.8** *La cantidad de bicliques de  $K_n$  es igual a  $\frac{n(n-1)}{2}$ .*

Veamos ahora una caracterización de las bicliques de  $KB(K_n)$ . Más aún, podemos calcular la cantidad de bicliques distintas a las que pertenece un vértice de ese grafo. Este resultado nos servirá para probar la caracterización de grafos divergentes bajo el operador biclique dada en el próximo capítulo.

**Lema 3.5.9** *Sea  $G = K_n$ ,  $n \geq 4$ , y sea  $KB(G)$  su grafo biclique. Entonces, todas las bicliques de  $KB(G)$  son isomorfas a  $K_{2,2}$ , donde cada vértice está en  $(n-2) \cdot (n-3)$  bicliques distintas.*

**Demostración:** Tomemos un eje de  $G$ ,  $e = (v, w)$ . Este eje no es adyacente en  $G$  a ningún eje que pertenezca a un completo de  $n-2$  vértices (Fig. 3.24). Sea  $e' = (v', w')$  un eje del  $K_{n-2}$  al cual  $e$  no es adyacente. Como  $G$  es completo, existen  $e_1 = (v, v')$ ,  $e_2 = (v, w')$ ,  $e_3 = (v', w)$  y  $e_4 = (w, w')$  en  $G$ . Luego, considerando estos ejes como vértices de  $KB(G)$  vemos que  $B_1 = \{e, e'\} \cup \{e_1, e_4\}$  y  $B_2 = \{e, e'\} \cup \{e_2, e_3\}$  son subgrafos bipartitos

completos y son  $K_{2,2}$ . Veamos ahora que son maximales (y por lo tanto bicliques). Para esto veamos que no puede haber bicliques más grandes, lo cual resulta inmediato puesto que si tomamos tres o más ejes no adyacentes en  $G$ , no existe ningún otro que sea adyacente a todos simultáneamente (cada eje de  $G$  es biclique). Veamos ahora que cada vértice de  $KB(G)$  está en  $(n-2) \cdot (n-3)$  bicliques distintas. Por cada eje  $e$  de  $G$  (vértice de  $KB(G)$ ) tenemos que no es adyacente a  $K_{n-2}$ , es decir, a  $\frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2}$  ejes y por cada uno de estos  $e$  formaba dos bicliques distintas lo que implica que  $e$ , como vértice de  $KB(G)$ , está en  $(n-2) \cdot (n-3)$  bicliques distintas de  $KB(G)$ .

QED

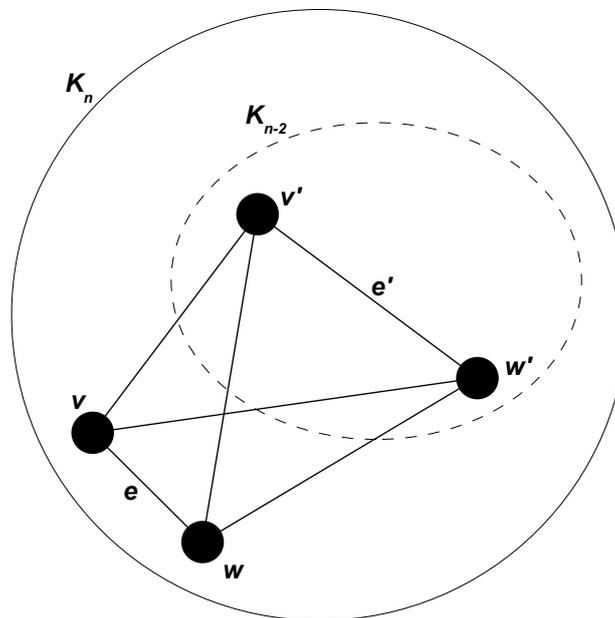


Figura 3.24: El eje  $e$  y el eje  $e'$  que pertenece a un completo de  $n-2$  vértices no incidentes a  $e$

Veamos ahora otro resultado que nos servirá en el próximo capítulo para demostrar uno de los teoremas principales de este trabajo.

**Lema 3.5.10** *Sea  $K_n \subseteq G$ ,  $n \geq 4$ , y sean  $e, e'$  ejes del  $K_n$ , no adyacentes entre sí. Sean  $B$  y  $B'$  bicliques de  $G$  tales que  $B$  contiene a  $e$  y  $B'$  contiene a  $e'$ . Si  $B \cap B' \neq \emptyset$  entonces existe un vértice  $v \in B \cap B'$  tal que  $v$  es adyacente solamente a uno de los extremos de cada eje  $e$  y  $e'$ .*

**Demostración:** Puesto que las bicliques  $B$  y  $B'$  se intersecan y no en los extremos de los ejes  $e, e'$  (ya que no son adyacentes entre sí), debe existir un vértice  $v$  que esté en  $B$  y

$B'$ , distinto de los extremos de los ejes. Ahora, sin perder generalidad,  $v \in B$  es adyacente solamente a uno de los extremos del eje  $e$  (sino formaría un triángulo y  $B$  no sería biclique) entonces como  $B'$  es biclique y contiene a  $v$  y al eje  $e'$  luego  $v$  debe ser adyacente también a uno solo de los extremos de  $e'$  ya que los vértices de  $e'$  son adyacentes (Fig. 3.25).

QED

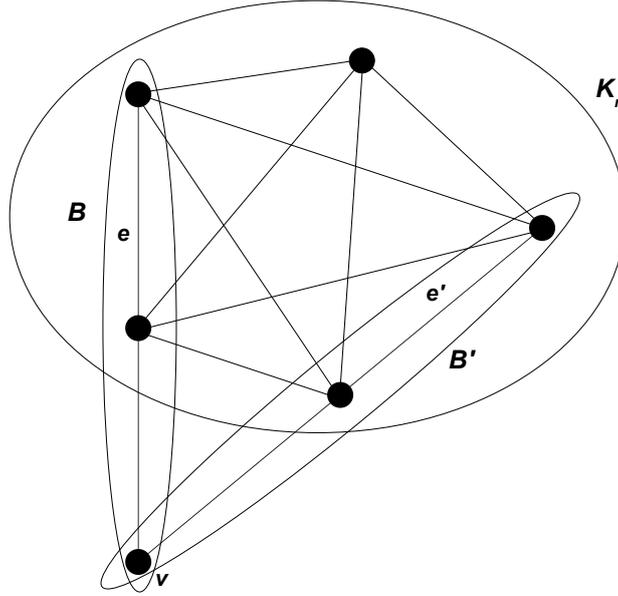


Figura 3.25: Los ejes  $e$  y  $e'$  no son adyacentes y las bicliques  $B$  y  $B'$  que los contienen se intersectan en el vértice  $v$

A continuación presentamos un resultado que relaciona la cantidad de bicliques del grafo  $KB(K_n)$  con la cantidad de ejes de su complemento y calcula exactamente dicha cantidad.

**Lema 3.5.11** *Sea  $K_n$ ,  $n \geq 4$ , y sea  $X$  la cantidad de bicliques de  $KB(K_n)$ . Luego  $X = |E(KB^c(K_n))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ .*

**Demostración:**  $KB(K_n)$  es un grafo regular que posee  $\frac{n(n-1)}{2}$  vértices. Por el Lema 3.5.9 las bicliques de  $KB(K_n)$  son todas isomorfas a  $K_{2,2}$  y un vértice  $v \in KB(K_n)$  no es adyacente exactamente a  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  vértices, ya que un eje de  $K_n$  es no adyacente a un completo de  $n-2$  vértices que tiene  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  ejes. Luego el grado de un vértice  $v$  en  $KB^c(K_n)$  es  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ . Por lo tanto,

$$2 \cdot |E(KB^c(K_n))| = \sum_{v \in KB^c(K_n)} d_{KB^c(K_n)}(v) = \sum_{v \in KB^c(K_n)} \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$2 \cdot |E(KB^c(K_n))| = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

Despejando obtenemos que

$$|E(KB^c(K_n))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

Veamos ahora que hay esa cantidad de bicliques en  $KB(K_n)$ .

Tenemos que  $KB(K_n)$  posee  $\frac{n(n-1)}{2}$  vértices y nuevamente por el Lema 3.5.9, cada vértice está en  $(n-2)(n-3)$  bicliques distintas. Luego existen  $\frac{\frac{n(n-1)}{2}(n-2)(n-3)}{4}$  bicliques distintas ya que cada biclique posee 4 vértices. Finalmente obtenemos que  $KB(K_n)$  posee  $\frac{\frac{n(n-1)}{2}(n-2)(n-3)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$  bicliques.

**QED**

El siguiente resultado caracteriza al grafo biclique iterado dos veces de un  $CP(j)$  en base al grafo biclique de un completo de  $2^{j-1} - 1$  vértices.

**Lema 3.5.12**  $KB^2(CP(j))$  es isomorfo a  $KB(K_{2^{j-1}-1})$  para  $j \geq 3$ .

**Demostración:** Veamos primero que tienen la misma cantidad de vértices.  $KB^2(CP(j))$ , por el Lema 3.5.6, tiene  $2^{2j-3} - 3 \cdot 2^{j-2} + 1$  vértices y  $KB(K_{2^{j-1}-1})$  tiene  $\frac{(2^{j-1}-1)(2^{j-1}-2)}{2} = 2^{2j-3} - 3 \cdot 2^{j-2} + 1$  vértices.

Veamos ahora que son isomorfos. Consideremos el grafo  $KB(CP(j))$ . Por la Proposición 3.5.4,  $KB^c(CP(j))$  es isomorfo a  $CP^{cb}(2^{j-1} - 1)$ . Por lo tanto  $KB(CP(j))$  resulta ser isomorfo al grafo  $CP(2^{j-1} - 1)$  salvo por las biparticiones que forman dos completos de  $2^{j-1} - 1$  vértices (Ver Fig. 3.26). Sean  $v_1, v_2, \dots, v_{2^{j-1}-1}$  y  $w_1, w_2, \dots, w_{2^{j-1}-1}$ , los vértices de cada partición de  $KB(CP(j))$ , donde cada  $v_i$  es adyacente a todo  $w_j$  si  $i \neq j$ . Luego, tenemos que el conjunto de los  $v_i$  forman un completo de  $2^{j-1} - 1$  vértices y el conjunto de los  $w_i$  forman otro completo de  $2^{j-1} - 1$  vértices. Ahora, por el Lema 3.5.5, las bicliques de  $KB(CP(j))$  son todas isomorfas a  $K_{2,2}$ , y son de la forma  $\{v_i, w_i\} \cup \{v_j, w_j\}$  para  $i \neq j$ . Por lo tanto podemos observar que cada biclique de  $KB(CP(j))$  queda determinada por cada eje de una misma partición, es decir, el eje  $(v_i, v_j)$  determina a la biclique  $\{v_i, w_i\} \cup \{v_j, w_j\}$ . Por esto, cada biclique de  $KB(CP(j))$  se interseca con otra biclique si los ejes que determinan cada biclique son adyacentes. Luego, considerando la partición de los  $v_i$ , como esta forma un completo  $2^{j-1} - 1$  vértices donde cada eje determina una biclique tenemos que dos bicliques son adyacentes si los correspondientes ejes son adyacentes (Ver Fig. 3.26). Equivalentemente, en  $K_{2^{j-1}-1}$ , cada eje es biclique, y dos bicliques se intersecan si los correspondientes ejes son adyacentes. Finalmente  $KB^2(CP(j))$  resulta isomorfo a  $KB(K_{2^{j-1}-1})$ .

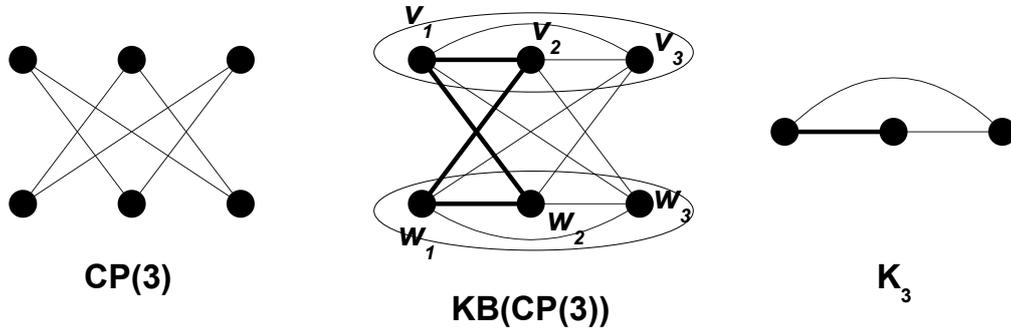


Figura 3.26: Grafos  $CP(3)$ ,  $KB(CP(3))$  y  $K_3$ . En ejes gruesos una biclique de  $KB(CP(3))$  y su equivalente en  $K_3$

**QED**

En la Figura 3.26, veamos que  $KB^2(CP(j))$  resulta isomorfo a  $KB(K_{2^{j-1}-1})$  para  $j = 3$ . Tenemos al grafo  $CP(3)$  y su grafo biclique  $KB(CP(3))$ . Podemos ver que cada partición de este último posee  $2^{3-1} - 1 = 3$  vértices que forman un completo. Vemos en ejes gruesos, en  $KB(CP(3))$ , la biclique  $\{v_1, w_1\} \cup \{v_2, w_2\}$ . Observemos que esta queda determinada por el eje  $(v_1, v_2)$ . Finalmente, para que el isomorfismo quede más claro, marcamos en ejes gruesos la biclique análoga en  $K_3$ .

### 3.6. Grafos Biclique

A continuación presentamos todos los grafos biclique desde 1 hasta 6 vértices. Estos (salvo los triviales) han sido encontrados utilizando un algoritmo (de tiempo exponencial) basado en la caracterización expuesta en la primera sección 3.1 de este capítulo (Teorema 3.1.1). También se ha utilizado esta caracterización para comprobar que un grafo dado no es grafo biclique. Es importante resaltar que esta sección nos resulta de interés debido al difícil trabajo computacional que se requiere para decidir si un grafo es grafo biclique o no. Por este motivo, no hemos alcanzado a exponer los grafos biclique de 7 o más vértices.

Podemos verificar en todos ellos que se cumple la propiedad citada en los Teoremas 3.1.3 y 3.3.6, es decir, que todo  $P_3$  inducido está contenido en un *diamante* o *gema* inducidos.



Figura 3.27: Único grafo biclique de 1 vértice



Figura 3.28: Único grafo biclique de 2 vértices. También resulta ser el único grafo biclique bipartito

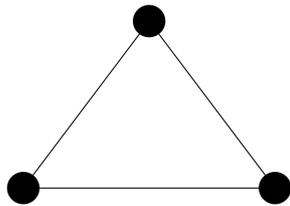


Figura 3.29: Único grafo biclique de 3 vértices

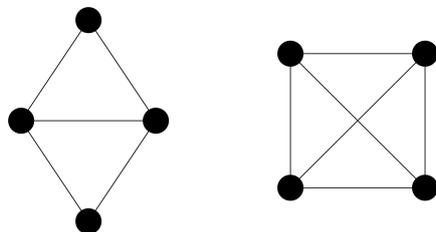


Figura 3.30: Únicos grafos biclique de 4 vértices

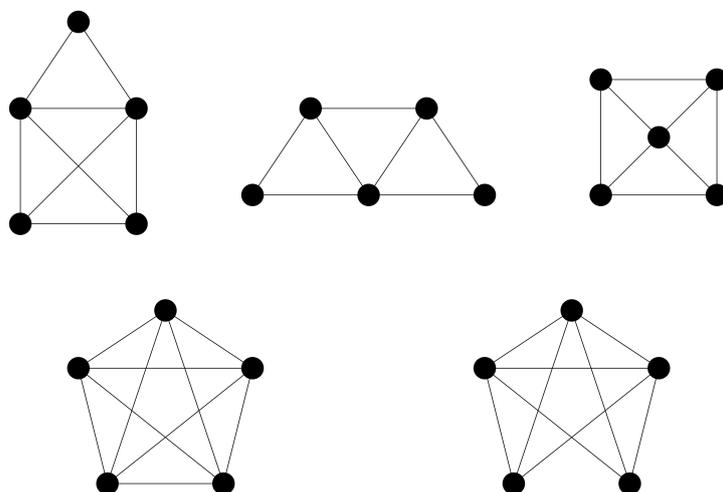


Figura 3.31: Únicos grafos biclique de 5 vértices

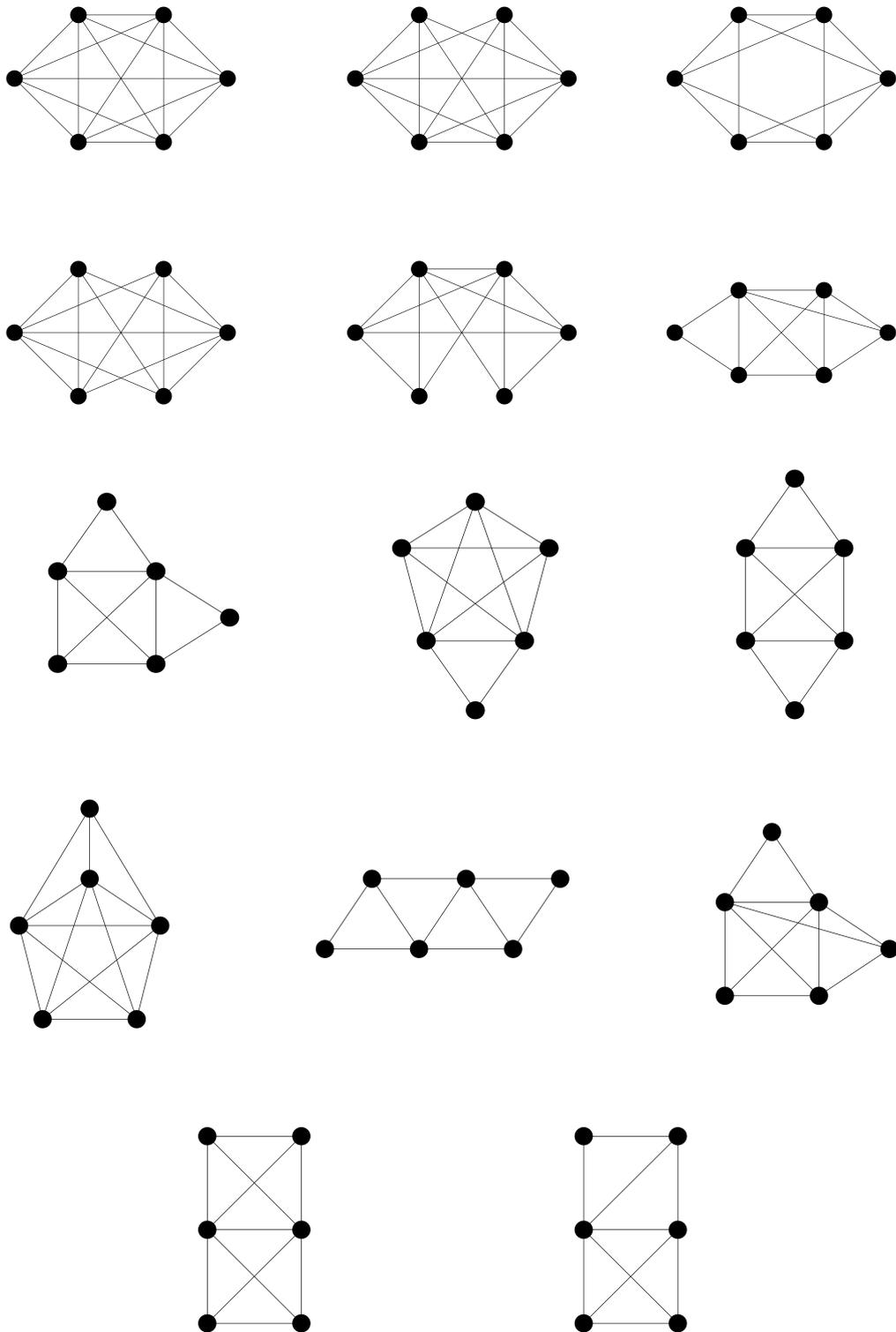


Figura 3.32: Únicos grafos biclique de 6 vértices

# Capítulo 4

## Operador Biclique Iterado

En este capítulo estudiaremos al grafo biclique iterado de un grafo. Veremos resultados acerca de la convergencia y divergencia del **operador biclique** aplicado sucesivas veces a un grafo. Finalmente daremos una caracterización de grafos convergentes y grafos divergentes para el caso general. Este resultado conduce a un algoritmo de tiempo polinomial para el problema de decisión acerca del comportamiento de un grafo bajo el operador  $KB$  cuando la cantidad de iteraciones tiende a infinito.

### 4.1. Introducción

Análogamente al capítulo 2, podemos pensar al grafo biclique de un grafo  $G$  como un operador que transforma a  $G$  en el grafo de intersección de todas las bicliques de  $G$ . En otras palabras definimos al *operador  $KB$*  como una función  $KB : \text{Grafos} \rightarrow \text{Grafos}$  que transforma al grafo  $G$  en el grafo  $KB(G)$ . Luego, podemos definir recursivamente al *operador biclique iterado* de la siguiente forma:

- $KB^0(G) = G$
- $KB^i(G) = KB(KB^{i-1}(G))$  para  $i \geq 1$

Al igual que en el estudio del grafo clique iterado, surgen los interrogantes acerca de decidir el comportamiento (convergencia, divergencia o ciclos) de un grafo cuando la cantidad de iteraciones tiende infinito, como también poder determinar la complejidad computacional asociada al problema anterior. A lo largo de este capítulo iremos respondiendo estas preguntas.

En el siguiente ejemplo, Fig. 4.1, podemos observar a un grafo convergente bajo el operador  $KB$ , puesto que para  $i \geq 2$ ,  $KB^i(G) = K_3$ .

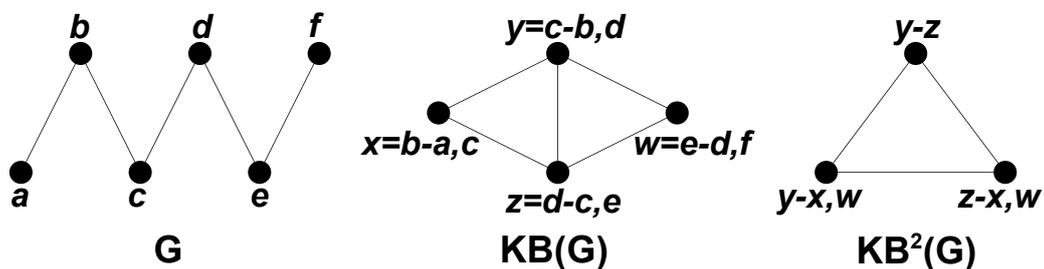


Figura 4.1:  $G$  converge bajo el operador  $KB$

El grafo  $G$  de la Figura 4.2, resulta ser divergente bajo el operador  $KB$ . Observemos que  $KB(G)$  es el grafo *casa*. En secciones posteriores veremos la importancia de este grafo para determinar el comportamiento de un grafo bajo el operador biclique.

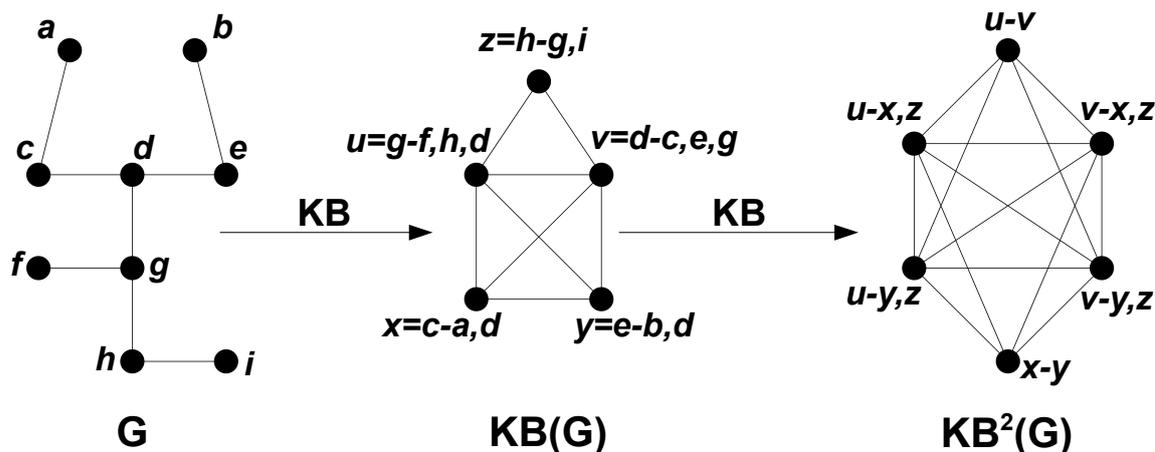


Figura 4.2:  $G$  diverge bajo el operador  $KB$

## 4.2. Propiedades del operador biclique

En esta sección mostraremos algunos resultados sobre el operador biclique. Estos serán fundamentales para la posterior caracterización. El siguiente teorema es esencial en la caracterización de los grafos convergentes y divergentes.

**Teorema 4.2.1** *Sea  $G$  un grafo tal que  $K_n \subseteq G$ ,  $n \geq 4$ , luego  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$  o  $K_{(n-2) \cdot (n-3)} \subseteq KB^2(G)$ .*

**Demostración:** Sea  $v$  un vértice de  $G$  fuera del  $K_n$  pero adyacente a él. Sea  $k$  la cantidad de vértices del  $K_n$  adyacentes a  $v$ . Veamos entonces los siguientes casos.

- $1 < k < n - 1$ : Sean  $v_1, v_2, \dots, v_k$  los vértices del  $K_n$  adyacentes al vértice  $v$  y sean  $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$  los vértices del  $K_n$  no adyacentes a  $v$ . Sea  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  y  $B = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ . Ahora  $A \cup B = K_n$  por lo tanto entre  $A$  y  $B$  hay  $k(n - k)$  ejes. Sea  $e_{i,j}$  el eje incidente al vértice  $v_i$  de  $A$  y al vértice  $v_j$  de  $B$  para  $1 \leq i \leq k$  y  $k + 1 \leq j \leq n - k$ . Luego, como  $v$  es adyacente a cada vértice de  $A$ , para cada elección de  $i$  y  $j$  tenemos que  $v$  junto con  $e_{i,j}$  está contenido en una biclique de  $G$  donde claramente cada una de estas es distinta de las demás puesto que  $A \cup B = K_n$ . Finalmente tenemos  $k(n - k)$  bicliques distintas en  $G$  tales que todas se intersecan al menos en  $v$ , lo cual implica que  $K_{k(n-k)} \subseteq KB(G)$ . La Figura 4.3 describe la situación. Ahora, sea la función  $F : [2, n - 2] \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $F(k) = k(n - k)$ , o distribuyendo,  $F(k) = -k^2 + kn$ . Siendo  $F$  una función cuadrática cóncava hacia abajo,  $F$  alcanza sus mínimos en los extremos del intervalo, es decir, para  $k = 2$  y  $k = n - 2$ , dándonos en ambos casos el mismo resultado. Finalmente concluimos que  $K_{2(n-2)} = K_{2n-4} \subseteq K_{k(n-k)} \subseteq KB(G)$ .

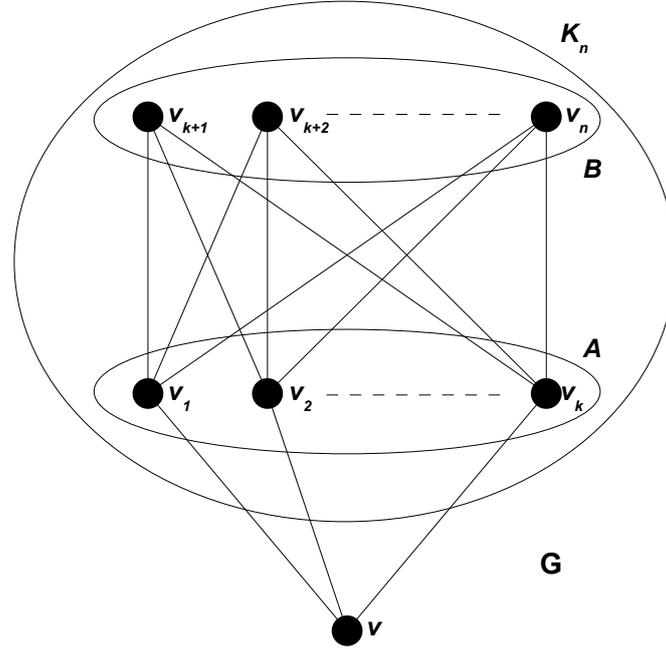


Figura 4.3: El vértice  $v$  unido a  $k$  vértices del  $K_n$ . En el gráfico  $A = K_k$  y  $B = K_{n-k}$ , por claridad se omitieron los ejes

- Si no existe  $v$  tal que  $1 < k < n - 1$ , tenemos que  $k = 1$ ,  $k = n - 1$ ,  $k = n$  o bien  $G = K_n$ . Veamos que en todos estos casos se cumple que  $K_{(n-2).(n-3)} \subseteq KB^2(G)$ . Consideremos  $B_1, B_2, \dots, B_s$  bicliques de  $G$  tales que cada  $B_i$  contiene un eje del  $K_n$  y no hay dos bicliques que contengan al mismo eje. Luego  $s = \frac{n(n-1)}{2}$ . Sea  $H \subseteq KB(G)$  el subgrafo inducido por los vértices de  $KB(G)$  correspondientes a las bicliques  $B_1, B_2, \dots, B_s$ . Veamos que  $H$  es isomorfo a  $KB(K_n)$  con lo cual por el Lema 3.5.9 y Lema 3.2.3  $K_{(n-2).(n-3)} \subseteq KB(H) \subseteq KB^2(G)$ . Supongamos que no son isomorfos, por lo tanto existen 2 vértices de  $H$  adyacentes que no son adyacentes en  $KB(K_n)$ . Ahora, por el Lema 3.5.10 si  $B_i$  y  $B_j$  son bicliques distintas de  $G$  que contienen a los ejes  $e_i$  y  $e_j$  del  $K_n$  tales que  $e_i$  y  $e_j$  no son adyacentes, pero  $B_i$  se interseca con  $B_j$ , entonces existe un vértice  $v$  en  $B_i \cap B_j$ , fuera del  $K_n$ , adyacente a un extremo de cada eje. Como no existía un vértice  $v$  adyacente a  $k$  vértices del  $K_n$  tal que  $1 < k < n - 1$  luego  $k = n - 1$  o  $k = n$ . En cualquiera de estos casos llegamos a un absurdo puesto que si  $k = n - 1$  alguna de las dos bicliques  $B_i$  o  $B_j$  están formadas solo por el eje del  $K_n$  y si  $k = n$  ambas bicliques son solamente los ejes  $e_i$  y  $e_j$  del  $K_n$ . Luego  $H$  es isomorfo a  $KB(K_n)$  por lo tanto  $K_{(n-2).(n-3)} \subseteq KB(H) \subseteq KB^2(G)$  como queríamos demostrar.

QED

Como corolario tenemos el siguiente teorema, el cual resalta la importancia de los grafos completos (en particular del grafo  $K_5$ ) en la decisión acerca de la divergencia del operador  $KB$ . Este teorema, al igual que los dos siguientes, dan condiciones suficientes para la divergencia de un grafo.

**Teorema 4.2.2** *Sea  $G$  un grafo tal que  $K_n \subseteq G$ ,  $n \geq 5$ , luego el operador biclique iterado aplicado a  $G$  diverge.*

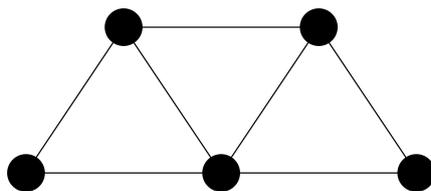
**Demostración:** Veamos que si  $K_n \subseteq G$ ,  $n \geq 5$ , entonces el  $\lim_{s \rightarrow \infty} |V(KB^s(G))| = \infty$ . Por el Teorema 4.2.1 si  $K_n \subseteq G$  entonces  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$  o  $K_{(n-2) \cdot (n-3)} \subseteq KB^2(G)$ . Podemos suponer que estamos siempre en la condición  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$  si  $K_n \subseteq G$ , puesto que vale para todo  $n \geq 6$  que  $2(2n-4) - 4 \leq (n-2) \cdot (n-3)$ . Es decir, si  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$ , entonces aplicando nuevamente el Teorema 4.2.1  $K_{2(2n-4)-4} \subseteq KB^2(G)$  y como vale  $K_{2(2n-4)-4} \subseteq K_{(n-2) \cdot (n-3)}$  para todo  $n \geq 6$  el menor crecimiento de vértices se da en esa situación. Ahora, el caso  $n = 5$  queda contemplado en lo anterior, puesto que si  $G$  contiene a  $K_5$  entonces o bien  $KB(G)$  contiene a  $K_6$  o bien  $KB^2(G)$  contiene a  $K_6$  y de ahí en adelante utilizamos lo mencionado anteriormente.

Tenemos que si  $K_n \subseteq G$ , entonces  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$ . De la misma forma,  $K_{2n-4} \subseteq KB(G)$  entonces  $K_{2(2n-4)-4} = K_{4n-12} \subseteq KB^2(G)$ . Iterando nuevamente, llegamos a que  $K_{8n-28} \subseteq KB^3(G)$ . Luego podemos obtener el término general de esta sucesión que nos dará una cota inferior para la cantidad de vértices en la iteración  $s$ . Si  $G$  contiene a  $K_n$  con  $n \geq 5$ , luego  $|V(KB^s(G))| \geq 2^s n - 4(2^s - 1)$  con  $s \geq 0$ . Reagrupando esta última expresión obtenemos que  $|V(KB^s(G))| \geq 2^s(n-4) + 4$  con  $s \geq 0$ . Ahora, como  $n \geq 5$ , si  $s$  tiende a infinito, entonces  $2^s(n-4) + 4 \leq |V(KB^s(G))|$  tiende a infinito como queríamos demostrar.

**QED**

Los siguientes teoremas resultan también importantes puesto que dan condiciones suficientes para la divergencia de un grafo y además relacionan (según veremos más adelante) la divergencia del operador en  $G$ , con el grafo  $KB(G)$ .

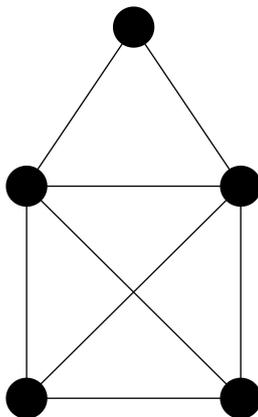
**Teorema 4.2.3** *Sea  $G$  un grafo tal que  $gema \subseteq G$ , luego el operador biclique iterado aplicado a  $G$  diverge.*

Figura 4.4: El grafo *gema*

**Demostración:** Consideremos en  $G$  el subgrafo inducido por *gema*, luego si aplicamos el operador biclique a la *gema* obtenemos que  $KB(\textit{gema}) = K_5$ , entonces por el Lema 3.2.3  $K_5 \subseteq KB(G)$  y por lo tanto por el Teorema 4.2.2, el operador biclique diverge.

QED

**Teorema 4.2.4** Sea  $G$  un grafo tal que *casa*  $\subseteq G$ , luego el operador biclique iterado aplicado a  $G$  diverge.

Figura 4.5: El grafo *casa*

**Demostración:** Análoga al teorema anterior puesto que  $K_5 \subseteq KB(\textit{casa})$ .

QED

Estos resultados son importantes puesto que analizando si  $KB(G)$  contiene un  $K_5$ , *gema* o *casa* como subgrafos inducidos, llegaremos a una caracterización sobre la divergencia o convergencia del operador.

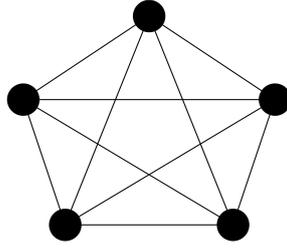


Figura 4.6: El grafo completo de 5 vértices,  $K_5$

Antes de llegar a la caracterización veamos un resultado que nos dice que remover un vértice mellizo de un grafo no altera a su grafo biclique. Esto resulta ser de gran importancia para caracterizar a los grafos convergentes.

**Lema 4.2.5** *Sea  $G$  y  $v \in V$  un vértice mellizo. Luego  $KB(G) = KB(G - \{v\})$ .*

**Demostración:** Sea  $H = G - \{v\}$  y sea  $w$  un vértice mellizo de  $v$ . Sean  $B_1, B_2, \dots, B_k$  bicliques de  $G$  tales que no contienen a los vértices  $v$  y  $w$ . Claramente  $B_1, B_2, \dots, B_k$  serán bicliques de  $H$ . Consideremos ahora  $B$  y  $B'$ , bicliques de  $G$  tales que contienen a ambos vértices  $v$  y  $w$ . Luego  $B$  y  $B'$  son adyacentes como vértices de  $KB(G)$ . Ahora en  $H$ , si consideramos  $\tilde{B} = B - \{v\}$  y  $\tilde{B}' = B' - \{v\}$ , resultan ser bicliques en  $H$  y adyacentes como vértices en  $KB(H)$  ya que  $w$  está en ambas.  $\tilde{B}$  y  $\tilde{B}'$  son bicliques puesto que en  $G$  no puede haber bicliques que contengan a  $v$  y no a  $w$  o viceversa. Esto vale ya que que el eje  $(v, w) \notin E$  y  $N_G(v) = N_G(w)$ , por lo tanto, si una biclique  $B = V_1 \cup V_2$  contiene a  $v$  contiene a  $w$  en la misma partición que a  $v$  ( $B$  no será maximal sino). Esto último también garantiza que en  $H$  no se forman bicliques nuevas. Concluimos finalmente que  $KB(G) = KB(H)$ .

**QED**

Veamos ahora, en base el resultado anterior la siguiente definición.

**Definición 4.2.6** *Sea  $G$  un grafo. Cada conjunto maximal de vértices mellizos  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , lo contraemos a un único vértice  $z$ , tal que  $N(z) = N(v_1) = N(v_2) = \dots = N(v_k)$ . Llamamos **contraccion**( $G$ ) al grafo que resulta de contraer todos los conjuntos maximales de vértices mellizos de  $G$ . Observemos que el grafo **contraccion**( $G$ ) no tiene mellizos (Ver Fig. 4.7).*

Podemos obtener, en base al Lema 4.2.5, la siguiente observación que resulta ser una generalización de ese resultado.

**Proposición 4.2.7** Sea  $G$  un grafo y sea  $\text{contraccion}(G)$  su contracción. Entonces,  $KB(G) = KB(\text{contraccion}(G))$ .

**Demostración:** Inmediata mediante sucesivas aplicaciones del Lema 4.2.5.

**QED**

En la siguiente figura (Fig. 4.7) podemos observar a los grafos  $G$ ,  $G'$  y  $G''$ . El grafo  $G'$  es el resultado de contraer los vértices mellizos de  $G$ ,  $v$  y  $v'$  en  $z_1$ . El grafo  $G''$  resulta de contraer los vértices mellizos  $u$  y  $u'$  de  $G'$  en  $z_2$ . Podemos observar que los grafos bicliques  $KB(G)$ ,  $KB(G')$  y  $KB(G'')$  son isomorfos. Finalmente cabe destacar que  $G'' = \text{contraccion}(G)$ .

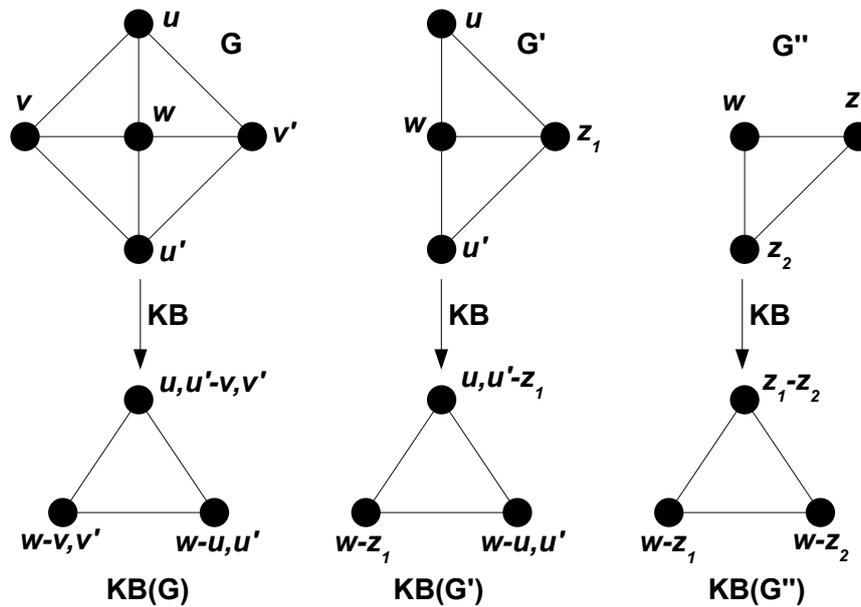
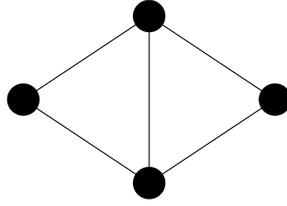


Figura 4.7: El grafo  $G$ , sus contracciones de mellizos y los grafos bicliques de cada uno

Veamos ahora que la **contraccion** de un grafo biclique mantiene la propiedad de que todo  $P_3$  inducido está contenido en un *diamante* o *gema* inducidos. Esto será de mucha utilidad en el resultado que le sigue.

**Lema 4.2.8** Sea  $G = \text{contraccion}(KB(H))$ . Luego todo  $P_3$  inducido en  $G$  está contenido en un *diamante* o *gema* inducidos en  $G$ .

Figura 4.8: El grafo *diamante*

**Demostración:** Sean  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  los conjuntos maximales de vértices mellizos en  $KB(H)$ . Consideramos que si  $v$  es un vértice de  $KB(H)$  sin mellizos entonces existe  $1 \leq i \leq k$  tal que  $Z_i = \{v\}$ . Claramente, todo par de vértices  $v, w \in Z_i$  cumplen que  $N(v) = N(w)$  para todo  $i$  con  $1 \leq i \leq k$ , y para todo  $i, j$ , tales que  $1 \leq i \neq j \leq k$  vale que  $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ .

Ahora, sea  $P_3$  inducido en  $G$  (de no existir,  $G$  es un grafo completo y vale el lema). Sean  $z_i, z_j, z_l$  los vértices del  $P_3$  tales que corresponden a las contracciones de los conjuntos  $Z_i, Z_j, Z_l$  en  $KB(H)$ . Claramente  $Z_i \neq Z_j \neq Z_l$ . Luego, en  $KB(H)$  existen tres vértices  $v, w, x$  tales que  $v \in Z_i, w \in Z_j$  y  $x \in Z_l$ . Estos tres vértices  $v, w, x$  inducen un  $P_3$  en  $KB(H)$ , y entonces por los Teoremas 3.1.3 y 3.3.6 está contenido en un *diamante* o *gema*.

Supongamos que  $P_3$  está contenido en un *diamante*. Luego existe un vértice  $u$  en  $KB(H)$  adyacente a  $v, w$  y  $x$ . Sea  $Z_m$  el conjunto de vértices mellizos que contiene a  $u$ , donde  $m \neq i, j, l$ . Luego si  $z_m$  es el vértice correspondiente al conjunto  $Z_m$  en  $G$ , tenemos que  $z_i, z_j, z_l, z_m$  inducen un *diamante* en  $G$  que contiene al  $P_3$ .

El caso en que  $P_3$  está contenido en una *gema* es análogo pero usando dos vértices de  $KB(H)$  en lugar de uno.

**QED**

Una pregunta que nos surge a partir del Lema 4.2.8, es si la **contracción** de un grafo biclique resulta ser grafo biclique. Esta pregunta no la hemos respondido, sin embargo, presentamos las siguientes conjeturas. Cabe destacar que la segunda conjetura es consecuencia directa de la primera.

**Conjetura 4.2.9** Sea  $G$  un grafo biclique y  $v \in V$  un vértice mellizo, luego  $G - \{v\}$  también es grafo biclique.

**Conjetura 4.2.10** Si  $G$  es grafo biclique entonces **contracción**( $G$ ) también lo es.

El siguiente resultado es fundamental para caracterizar a los grafos convergentes, está basado en el Lema 4.2.8 y utiliza la siguiente observación que resulta consecuencia inmediata del Lema 4.2.8 y de la definición de **contracción**.

**Observación 4.2.11** Es importante resaltar que si un grafo  $G$  posee como subgrafo inducido a una gema, casa o  $K_5$  entonces el grafo  $\mathbf{contraccion}(G)$  también los tendrá y análogamente la recíproca. Esto vale puesto que en cada uno de estos grafos ningún vértice es mellizo de los otros, cosa que no ocurre si  $G$  posee solo diamantes. Por ejemplo, en la Figura 4.7,  $G$  y  $G'$  poseen diamantes pero los grafos  $\mathbf{contraccion}(G)$  y  $\mathbf{contraccion}(G')$  no puesto que en ambos casos resultan ser un triángulo ( $G''$ ).

Veamos ahora si, el siguiente lema.

**Lema 4.2.12** Sea  $KB(H)$  el grafo biclique de algún grafo  $H$ , tal que  $KB(H)$  no contiene a  $K_5$ , gema o casa como subgrafos inducidos. Sea  $G = \mathbf{contraccion}(KB(H))$ . Luego  $G = K_n$  para algún  $n = 1, \dots, 4$ .

**Demostración:** Supongamos que  $G$  es distinto a  $K_n$ , para  $n = 1, \dots, 4$ . Como  $G = \mathbf{contraccion}(KB(H))$  para algún  $H$ , donde  $KB(H)$  no contiene a  $K_5$ , gema o casa como subgrafos inducidos (y por Observación 4.2.11,  $G$  tampoco los contiene), luego  $G$  contiene un  $P_3$  como subgrafo inducido. Por el Lema 4.2.8,  $P_3$  está contenido en un *diamante*. Sean  $u, v, w, x$  los vértices que inducen el *diamante* en  $G$  (Fig. 4.9).

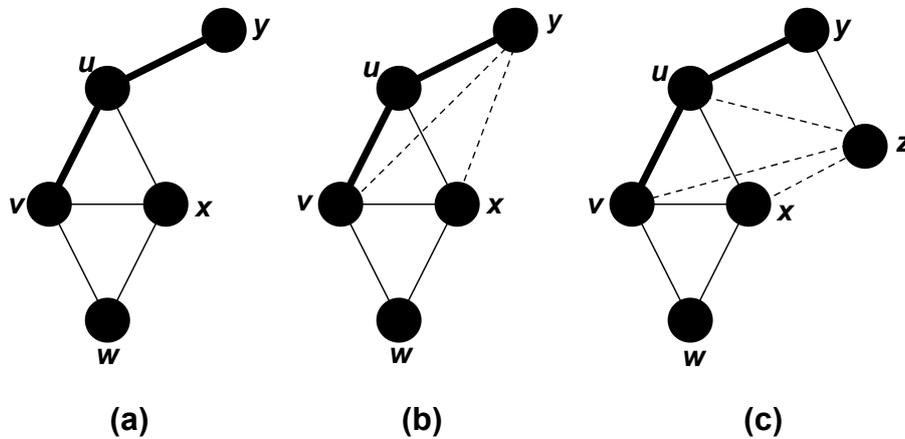


Figura 4.9: Diamante  $u, v, w, x$  y los distintos casos

Sean  $u, w$  los vértices no adyacentes del *diamante*. Como  $G$  no tiene mellizos luego  $u$  tiene que ser adyacente a un vértice  $y$  de  $G$  tal que  $w$  no es adyacente (Fig. 4.9a). Ahora,  $v, u, y$  forman un  $P_3$  inducido en  $G$  a menos que  $y$  sea adyacente a  $v$  o adyacente a  $v$  y a  $x$ , en cuyos casos se formarían una *gema* o una *casa* respectivamente, inducidas por  $u, v, w, x, y$  en  $G$ , lo cual sería absurdo (Fig. 4.9b). Ahora, como todo  $P_3$  inducido en  $G$  está en un *diamante* o *gema* por el Lema 4.2.8,  $y$  no puede ser adyacente a  $x$  puesto que se formaría un *gema* en

$G$ . Entonces  $v, u, y$  tiene que estar en un *diamante*, por lo tanto  $y$  será adyacente a algún  $z$  (Fig. 4.9c). Luego, para que ese  $P_3$  este en un *diamante*,  $z$  tiene que ser adyacente a  $u$  y  $v$ . Si  $z$  no es adyacente a  $x$  los vértices  $u, v, w, x, z$  inducen una *gema*, lo cual no puede suceder. Entonces  $z$  es adyacente a  $x$  pero ahora esos mismos vértices inducen una *casa* en  $G$  y nuevamente obtenemos un absurdo (Fig. 4.9c). Como hemos cubierto todos los casos concluimos que  $G$  es algún  $K_n$ , para  $n = 1, \dots, 4$ .

QED

### 4.3. Caracterización del operador $KB$ iterado

Llegamos ahora a caracterizar la convergencia o divergencia del operador la cual se basa en el siguiente teorema que resulta central en este trabajo.

**Teorema 4.3.1** *Sea  $G$  un grafo. Luego vale alguna de las siguientes:*

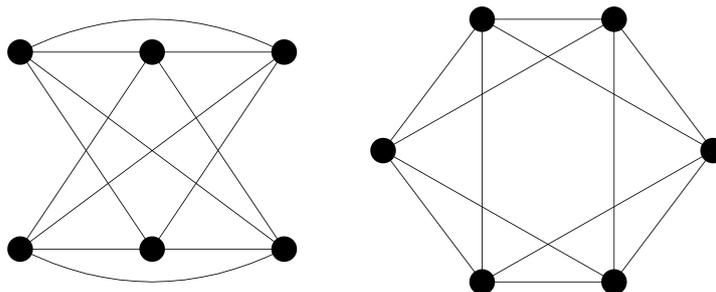
1.  $KB(G)$  contiene a  $K_5$ .
2.  $KB(G)$  contiene a *gema* como subgrafo inducido (implica  $KB^2(G) \supseteq K_5$ ).
3.  $KB(G)$  contiene a *casa* como subgrafo inducido (implica  $KB^2(G) \supseteq K_5$ ).
4.  $KB(G) = K_1$ .
5.  $KB^2(G) = K_1$ .
6.  $KB^2(G) = K_3$ .
7.  $KB^2(G) = O_3$  (implica  $KB^3(G) = K_3$ ).

**Demostración:** Consideremos  $KB(G)$ . Supongamos que no ocurre **1**, **2** ni **3**, es decir,  $KB(G)$  no contiene a  $K_5$ , *gema* o *casa* respectivamente como subgrafos inducidos. Luego por Lema 4.2.12, vale que  $\text{contraccion}(KB(G))$  es  $K_1, K_2, K_3$  o  $K_4$ . Veamos ahora cada uno de los casos, para esto utilizaremos la Proposición 4.2.7.

- Caso  $K_1$ : Trivial, pues  $KB(G)$  sería  $K_1$ , luego, ocurre **4**.
- Caso  $K_2$ : Luego,  $KB^2(G) = KB(\text{contraccion}(KB(G))) = KB(K_2) = K_1$ , por lo tanto, ocurre **5**.
- Caso  $K_3$ : Luego,  $KB^2(G) = KB(\text{contraccion}(KB(G))) = KB(K_3) = K_3$ , por lo tanto, ocurre **6**.

- Caso  $K_4$ : Luego,  $KB^2(G) = KB(\text{contraccion}(KB(G))) = KB(K_4) = O_3$ , por lo tanto, ocurre **7** (con lo cual  $KB^3(G) = K_3$ ).

QED

Figura 4.10: Dos representaciones del grafo  $O_3$ 

Como corolarios del teorema anterior obtenemos los siguientes resultados.

El primero de ellos nos da los dos únicos posibles comportamientos del grafo biclique iterado. Es importante resaltar que, a diferencia del grafo clique iterado, el operador biclique iterado no cicla.

**Teorema 4.3.2** *El operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  o bien converge o bien diverge.*

**Demostración:** Por el Teorema 4.3.1 si ocurre **1**, **2** o **3** podemos concluir utilizando los Teoremas 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 que el operador biclique diverge. Si ocurre **4**, **5**, **6** o **7** o bien llegamos a  $K_1$  o bien llegamos a  $K_3$  obteniendo como resultado que el operador converge.

QED

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para la divergencia del operador biclique.

**Teorema 4.3.3** *El operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  diverge si y solamente si ocurre **1**, **2** o **3**.*

**Demostración:** Supongamos que no ocurre **1**, **2** ni **3**, es decir,  $KB(G)$  no contiene ni una *gema*, *casa* o  $K_5$  como subgrafos inducidos. luego por Teorema 4.3.1, ocurre **4**, **5**, **6** o **7** por lo tanto el operador converge en cualquiera de los casos a  $K_1$  o  $K_3$ . Luego vale la implicación. Para la vuelta, si ocurre **1**, **2** o **3** por los Teoremas 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 el operador diverge.

**QED**

Como corolario del Teorema 4.3.3 obtenemos el siguiente resultado similar, que resalta la importancia del grafo  $K_5$  a la hora de decidir acerca de la divergencia del operador.

**Corolario 4.3.4** *El operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  diverge si y solamente si  $KB(G)$  o  $KB^2(G)$  contienen a  $K_5$ .*

**Demostración:** Por el Teorema 4.3.3, si el operador biclique diverge entonces ocurre **1**, **2** o **3**. Luego, aplicando el operador en los casos **2** o **3** se llega al resultado. La vuelta es análoga a la del Teorema 4.3.3.

**QED**

Como consecuencia del Teorema 4.3.1, también obtenemos un resultado sobre el número de pasos en que el operador converge. Probamos que si el operador biclique converge, entonces lo hace como máximo en 3 iteraciones.

**Teorema 4.3.5** *Si el operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  converge, lo hace a lo sumo en 3 pasos a  $K_3$  o  $K_1$ , y más aún, en 3 iteraciones como máximo, el grafo biclique iterado es  $K_1$  o  $K_3$ .*

**Demostración:** Por los Teoremas 4.3.1 y 4.3.3, si  $G$  converge entonces ocurre **4**, **5**, **6** o **7**. En todos los casos, o bien converge a  $K_1$  o bien converge a  $K_3$  y la mayor cantidad de iteraciones se da cuando ocurre **7**, dándonos como máximo 3 pasos.

**QED**

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para la convergencia del operador biclique.

**Teorema 4.3.6** *El operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  converge si y solamente si  $\text{contraccion}(KB(G))$  es isomorfo a  $K_n$  para  $n = 1, \dots, 4$ .*

**Demostración:** Si  $G$  converge por el Teorema 4.3.3,  $KB(G)$  no contiene a los grafos  $K_5$ , *gema* ni *casa* como subgrafos inducidos. Luego, por el Lema 4.2.12,  $\text{contraccion}(KB(G))$  es isomorfo a  $K_n$  para  $n = 1, \dots, 4$ , como queríamos demostrar. Para la vuelta, si el grafo  $\text{contraccion}(KB(G))$  es  $K_1$  o  $K_3$  no hay nada que demostrar, si  $\text{contraccion}(KB(G))$  es  $K_2$ , en una iteración más llegamos a  $K_1$  y finalmente si  $\text{contraccion}(KB(G))$  es  $K_4$ , en dos iteraciones más llegamos a  $K_3$ . En todos los casos obtenemos que operador biclique converge como queríamos demostrar.

**QED**

A continuación veremos el siguiente resultado, el cual nos permitirá conseguir un algoritmo de tiempo polinomial para decidir el comportamiento de un grafo cualquiera bajo el operador biclique.

**Corolario 4.3.7** *Sea  $G$  un grafo de  $n$  vértices. Si  $G$  posee más de  $2n$  bicliques, entonces el operador biclique diverge.*

**Demostración:** Veamos que si  $G$  posee más de  $2n$  bicliques, entonces existe un vértice que pertenece al menos a 5 bicliques. Esto resulta inmediato, puesto que si todos los vértices pertenecen a como máximo 4 bicliques, como cada biclique posee al menos dos vértices tendríamos que la cantidad de bicliques de  $G$  sería como máximo  $2n$ , lo cual contradice la hipótesis. Luego, como existe un vértice que pertenece a 5 o más bicliques de  $G$ ,  $K_5 \subseteq KB(G)$ , por lo tanto, por el Teorema 4.2.2 el operador biclique diverge.

**QED**

Como resultado más fuerte que el Corolario 4.3.7, conjeturamos lo siguiente.

**Conjetura 4.3.8** *Si  $G$  posee 7 o más bicliques, entonces el operador biclique diverge.*

A partir del Teorema 4.3.3 podemos pensar en un algoritmo para decidir acerca de la divergencia o convergencia del operador biclique iterado aplicado a un grafo  $G$  cualquiera. La idea es construir el grafo biclique  $KB(G)$  y luego verificar si este posee alguno de los tres subgrafos prohibidos (*gema*, *casa* o  $K_5$ ). Sin embargo, este procedimiento posee un problema. Si recordamos los resultados de Prisner citados en el capítulo 4 (Teoremas 3.5.1 y 3.5.2), la cantidad de bicliques de un grafo puede ser exponencial en función de la cantidad de vértices [55], por lo cual el algoritmo no sería de gran utilidad puesto que requeriría tiempo exponencial para calcular todas las bicliques y construir  $KB(G)$ . Sin embargo, por el Corolario 4.3.7, si un grafo posee más de  $2n$  bicliques, entonces el operador biclique diverge. Por lo tanto, en lugar de calcular todas las bicliques de  $G$ , podemos calcular las

bicliques de  $G$  mientras que ningún vértice esté en más de 5 bicliques distintas (ya que de ser así,  $KB(G)$  poseería a  $K_5$  como subgrafo inducido, lo cual implicaría la divergencia del operador biclique). En caso contrario, nos garantizamos que generaremos a lo sumo  $2n$  bicliques. De esta forma podemos construir  $KB(G)$  en tiempo polinomial (ya que la cantidad de bicliques es polinomial) y verificar luego si alguno de los tres subgrafos prohibidos está contenido en  $KB(G)$ . En base a este razonamiento concluimos que decidir acerca de la divergencia o convergencia del operador en un grafo puede hacerse en tiempo polinomial y a continuación presentamos un algoritmo polinomial que determina el comportamiento del operador biclique aplicado a un grafo cualquiera.

**Algoritmo 4.3.9** *Algoritmo para decidir sobre la convergencia o divergencia del operador biclique aplicado a un grafo  $G$  de  $n$  vértices.*

1. Numerar los vértices de  $G$  de 1 a  $n$ .
2.  $A \leftarrow$  arreglo  $A$  de  $n$  posiciones inicializadas en 0.
3.  $L \leftarrow \emptyset$ .
4. Mientras  $G$  contiene bicliques que no estén en  $L$  repetir.
  5.  $B \leftarrow$  biclique de  $G$  según numeración creciente de vértices.
  6.  $L \leftarrow L \cup \{B\}$ .
  7. Para cada vértice  $v \in B$  incrementar  $A$  en 1 según su numeración.
  8. Si alguna posición de  $A$  es igual a 5 informar que el operador diverge y parar.
  9. Fin Mientras.
10. Construir  $KB(G)$  con  $L$ .
11. Verificar si  $KB(G)$  posee una gema, una casa o  $K_5$ . En el caso afirmativo informar que el operador diverge y parar, caso contrario informar que el operador converge y parar.

**Teorema 4.3.10** *El algoritmo determina correctamente el comportamiento del operador biclique iterado aplicado a  $G$  con complejidad temporal  $O(n^5)$ .*

**Demostración:** El algoritmo es correcto trivialmente por los corolarios anteriores.

Veamos la complejidad del algoritmo. Los pasos 1 y 2 pueden hacerse en  $O(n)$  temporal. El ciclo principal se ejecuta en peor caso  $2n$  veces puesto que a lo sumo cada vértice es incrementado en  $A$  hasta 4 y cada biclique posee al menos 2 vértices. El paso 5, según [10, 11], puede hacerse en  $O(n^3)$  y como esta complejidad domina a los pasos 6 y 7, concluimos que la complejidad del ciclo es  $O(n^4)$ . A continuación, construir el grafo  $KB(G)$  puede hacerse en  $O(n^3)$  ya que en peor caso  $G$  posee  $2n$  bicliques. Finalmente, verificar si  $KB(G)$  contiene a la gema, a la casa o a  $K_5$  puede hacerse en  $O(n^5)$  puesto que los tres grafos poseen 5 vértices y  $KB(G)$  posee  $O(n)$  vértices.

**QED**

Cabe destacar que de ser cierta la Conjetura 4.3.8, solo deberíamos construir el grafo  $KB(G)$  si la cantidad de bicliques de  $G$  es 5 o 6 puesto que si  $G$  posee a lo sumo 4, converge, y si posee 7 o más, diverge. Este resultado haría que el algoritmo presentado anteriormente tenga complejidad temporal  $O(n^3)$  ya que si  $KB(G)$  posee 5 o 6 vértices, verificar si es, o posee, alguno de los tres grafos es  $O(1)$ .

## 4.4. Clases de grafos estudiadas

Para terminar este capítulo presentamos resultados sobre convergencia y divergencia de las clases de grafos presentadas en el capítulo 4.

Comencemos caracterizando la divergencia y convergencia en árboles. Como vimos anteriormente, si bien no podemos probar la Conjetura 4.3.8 para el caso general, al restringirnos a la clase de árboles obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.1** *Sea  $T$  un árbol. Luego  $T$  posee más de 5 bicliques si y solo si el operador biclique iterado aplicado a  $T$  diverge.*

**Demostración:**  $\Rightarrow$ ) Por construcción, veremos que si  $T$  posee más de 5 bicliques, entonces debe contener al menos uno de los grafos de la Figura 4.11c como subgrafos inducidos.

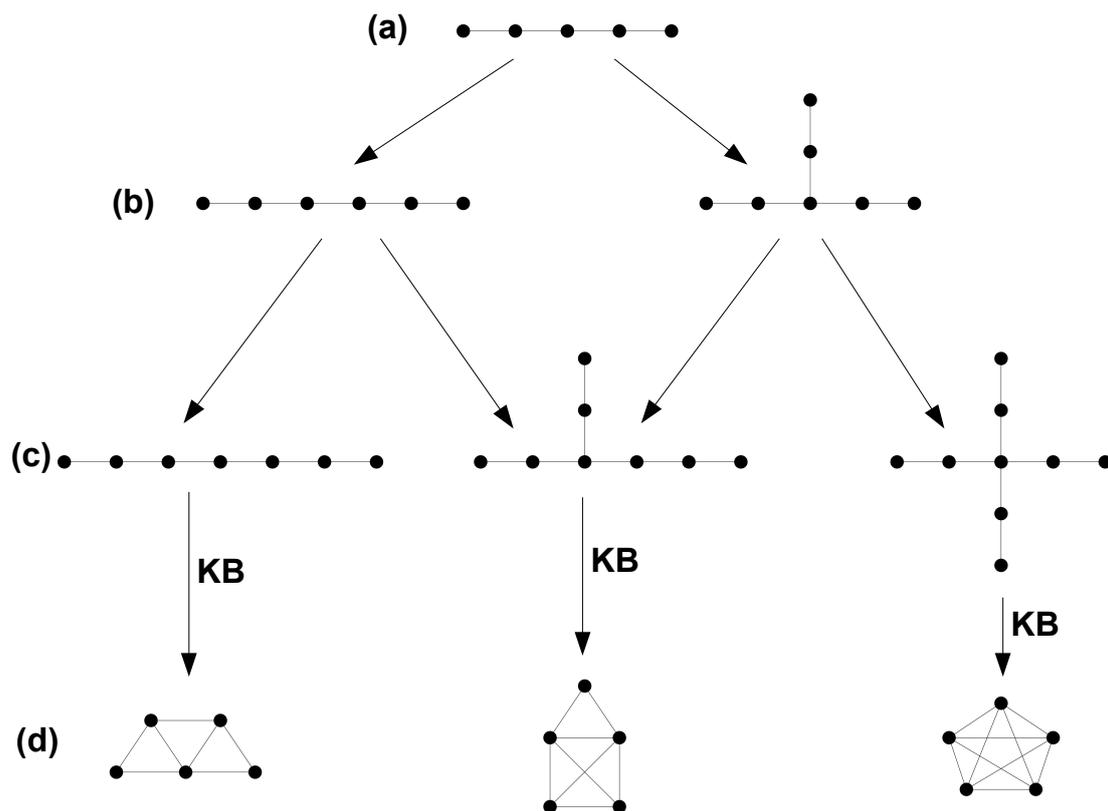


Figura 4.11: Construcción de árboles con 5 bicliques (a,b,c), y sus grafos biclique (d)

Si  $T$  posee 3 bicliques debe contener al grafo de la Figura 4.11a. Extendiendo este grafo, para que  $T$  posea 4 bicliques, obtenemos los dos grafos de la Figura 4.11b. Finalmente, extendiendo estos últimos, llegamos a que si  $T$  tiene 5 bicliques debe contener a alguno de los de la Figura 4.11c. En cualquiera de los tres casos, según el Teorema 4.3.3, el operador diverge puesto que  $KB(T)$  contendrá una *gema*, una *casa* o un  $K_5$  respectivamente (Figura 4.11d).

$\Leftarrow$ ) Como  $T$  diverge, por Teorema 4.3.3,  $KB(T)$  contiene una *gema*, una *casa* o un  $K_5$ . Como los tres grafos tienen 5 vértices luego  $T$  posee al menos 5 bicliques.

**QED**

Cabe destacar que en árboles el algoritmo para decidir acerca de la convergencia o divergencia del operador presentado anteriormente posee costo temporal menor que en un grafo cualquiera. Esto es debido a que no debemos construir el grafo biclique del árbol, ya que basta verificar si posee 5 bicliques para informar que diverge. Finalmente la complejidad temporal resulta  $O(5n^3) = O(n^3)$ , puesto que debemos encontrar al menos 5 bicliques y hallar cada una cuesta según [10, 11],  $O(n^3)$ .

Es inmediato mencionar que en los grafos completos  $K_n$ , el operador biclique diverge si y solo si  $n \geq 5$ .

Para finalizar, análogamente a los completos, los grafos Cocktail Party de orden  $j$ ,  $CP(j)$  divergen para  $j \geq 4$  puesto que según el Lema 3.5.12,  $KB^2(CP(j))$  es isomorfo a  $KB(K_{2^{j-1}-1})$ . Por lo tanto a partir de  $j = 4$ ,  $KB^2(CP(j))$  va a contener a  $K_7$ . El único que converge es  $CP(3)$  y lo hace a  $K_3$ .

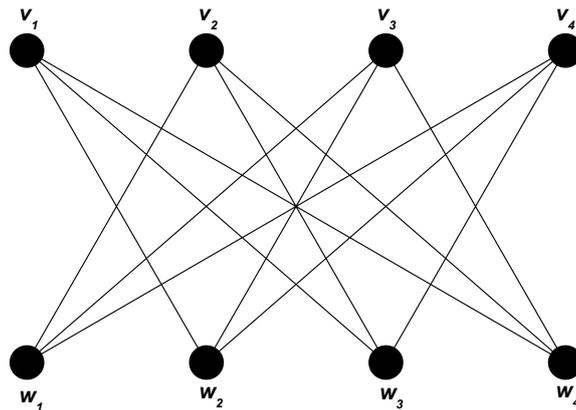


Figura 4.12: Cocktail Party de orden 4,  $CP(4)$

# Capítulo 5

## Conclusiones

Una biclique de un grafo  $G$  es un subgrafo bipartito completo maximal de  $G$ . El grafo biclique de  $G$ ,  $KB(G)$ , es el grafo de intersección de todas las bicliques de  $G$ .

En este trabajo, estudiamos propiedades sobre el grafo biclique, y en particular, estudiamos el grafo biclique de algunas clases de grafos, como árboles, grafos completos, y los grafos Cocktail Party.

El grafo biclique puede pensarse como un operador que transforma al grafo  $G$  en el grafo  $KB(G)$ . En este trabajo definimos el grafo biclique iterado de  $G$ ,  $KB^k(G)$ , como el grafo que resulta de aplicar  $k$  veces el operador  $KB$ . En otras palabras,  $KB^0(G) = G$  y para  $k \geq 1$ ,  $KB^k(G) = KB(KB^{k-1}(G))$ . Caracterizamos los distintos posibles comportamientos del grafo biclique iterado cuando la cantidad de iteraciones tiende a infinito, obteniendo como resultado que el grafo biclique iterado, a diferencia del grafo clique iterado, o bien converge o bien diverge, no admitiendo ciclos.

Resolvimos también el problema de reconocimiento de grafos de cada clase, presentando un algoritmo de tiempo polinomial que decide si un grafo es convergente o divergente bajo el operador biclique.

Este problema no está resuelto para el operador clique iterado. Sin embargo, existen resultados parciales sobre reconocimiento del comportamiento del operador, restringido a ciertas clases.

Es interesante destacar que en general, las demostraciones, las propiedades y los resultados relativos a las bicliques de un grafo suelen ser más complejos que aquellos relativos a cliques (por ejemplo, reconocimiento de grafos biclique). Sin embargo, en este trabajo mostramos que, contrario a lo que se esperaba, se pueden obtener resultados más generales y con estructuras más simples que los análogos relativos a cliques. Esto es realmente sorprendente y alentador.

## 5.1. Problemas abiertos y trabajo futuro

A continuación presentamos algunos problemas abiertos y posible trabajo futuro.

1. Estudiar nuevas propiedades del grafo biclique.
2. Encontrar condiciones necesarias para que un grafo sea grafo biclique.
3. Estudiar la complejidad asociada al problema de reconocimiento de grafos biclique. Probar que es NP-completo o encontrar un algoritmo polinomial de reconocimiento.
4. Dada una clase de grafos  $\mathcal{H}$ , decidir a qué clase pertenece la imagen a través del operador biclique, es decir,  $KB(\mathcal{H})$ .

A continuación, presentamos algunas conjeturas, a ser estudiadas en el futuro:

1. Si  $G$  es grafo biclique con mellizos, luego  $G - \{\text{mellizo}\}$  es grafo biclique.
2. Si  $G$  es grafo biclique, luego  $\text{contraccion}(G)$  es grafo biclique.
3. Sea  $G$  un grafo. Si  $G$  posee al menos 7 bicliques, entonces el operador biclique iterado aplicado a  $G$  diverge.
4. Dar condiciones por las cuales el grafo de *Hajös* no es grafo biclique (Fig 5.1) .

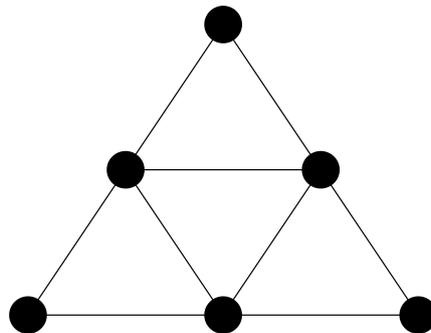


Figura 5.1: Grafo de *Hajös*

# Bibliografía

- [1] L. Alcón, L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, and M. Gutierrez. Clique graph recognition is NP-complete. In *Graph-theoretic concepts in computer science*, volume 4271 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 269–277. Springer, Berlin, 2006.
- [2] L. Alcón and M. Gutierrez. A new characterization of clique graphs. *Mat. Contemp.*, 25:1–7, 2003. The Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (Rio de Janeiro, 2002).
- [3] J. Amilhastre, M. C. Vilarem, and P. Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. *Discrete Appl. Math.*, 86(2-3):125–144, 1998.
- [4] H.-J. Bandelt and E. Prisner. Clique graphs and Helly graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 51(1):34–45, 1991.
- [5] S. Benzer. On the topology of genetic structure. In *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, volume 45, pages 1607–1620, 1959.
- [6] K. S. Booth and G. S. Lueker. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using  $PQ$ -tree algorithms. *J. Comput. System Sci.*, 13(3):335–379, 1976. Working Papers presented at the ACM-SIGACT Symposium on the Theory of Computing (Albuquerque, N. M., 1975).
- [7] C. F. Bornstein and J. L. Szwarcfiter. On clique convergent graphs. *Graphs Combin.*, 11(3):213–220, 1995.
- [8] G. Confessore, P. Dell’Olmo, and S. Giordani. An approximation result for the interval coloring problem on claw-free chordal graphs. *Discrete Appl. Math.*, 120(1-3):73–90, 2002. Sixth Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999).
- [9] M. Dawande, P. Keskinocak, J. M. Swaminathan, and S. Tayur. On bipartite and multipartite clique problems. *J. Algorithms*, 41(2):388–403, 2001.
- [10] V. M. F. Dias, C. M. H. de Figueiredo, and J. L. Szwarcfiter. Generating bicliques of a graph in lexicographic order. *Theor. Comput. Sci.*, 337(1-3):240–248, 2005.

- [11] V. M. F. Dias, C. M. H. de Figueiredo, and J. L. Szwarcfiter. On the generation of bicliques of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 155(14):1826–1832, 2007.
- [12] F. Escalante. Über iterierte Clique-Graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.
- [13] M. E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Dismantlings and iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 282(1-3):263–265, 2004.
- [14] D. R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math.*, 15:835–855, 1965.
- [15] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [16] P. C. Gilmore and A. J. Hoffman. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canad. J. Math.*, 16:539–548, 1964.
- [17] M. C. Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. With a foreword by Claude Berge, Computer Science and Applied Mathematics.
- [18] M. Groshaus. *Bicliques, cliques, neighborhoods y la propiedad de Helly*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2006.
- [19] M. Groshaus and J. L. Szwarcfiter. Biclique-Helly graphs. *Graphs Combin.*, 23(6):633–645, 2007.
- [20] M. Groshaus and J. L. Szwarcfiter. An algorithm for recognizing bipartite conformal hypergraphs. Manuscript, 2008.
- [21] M. Groshaus and J. L. Szwarcfiter. Biclique graphs and biclique matrices. Manuscript, 2008.
- [22] M. Groshaus and J. L. Szwarcfiter. On hereditary Helly classes of graphs. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 10(1):71–78, 2008.
- [23] G. Hajös. Über eine Art von Graphen. *Internat. Math. Nachr.* 11, Problem 65, 1957.
- [24] R. C. Hamelink. A partial characterization of clique graphs. *J. Combinatorial Theory*, 5:192–197, 1968.
- [25] S. Hazan and V. Neumann-Lara. Fixed points of posets and clique graphs. *Order*, 13(3):219–225, 1996.
- [26] P. Hell and J. Huang. Interval bigraphs and circular arc graphs. *J. Graph Theory*, 46(4):313–327, 2004.

- [27] D. S. Hochbaum. Approximating clique and biclique problems. *J. Algorithms*, 29(1):174–200, 1998.
- [28] W. L. Hsu. Maximum weight clique algorithms for circular-arc graphs and circle graphs. *SIAM J. Comput.*, 14(1):224–231, 1985.
- [29] W. L. Hsu. A simple test for interval graphs. In *Graph-theoretic concepts in computer science (Wiesbaden-Naurod, 1992)*, volume 657 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 11–16. Springer, Berlin, 1993.
- [30] W.-L. Hsu and T.-H. Ma. Fast and simple algorithms for recognizing chordal comparability graphs and interval graphs. *SIAM J. Comput.*, 28(3):1004–1020 (electronic), 1999.
- [31] H. Kaplan and Y. Nussbaum. A simpler linear-time recognition of circular-arc graphs. In *Algorithm theory—SWAT 2006*, volume 4059 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 41–52. Springer, Berlin, 2006.
- [32] V. Klee. Research Problems: What Are the Intersection Graphs of Arcs in a Circle? *Amer. Math. Monthly*, 76(7):810–813, 1969.
- [33] N. Korte and R. H. Möhring. An incremental linear-time algorithm for recognizing interval graphs. *SIAM J. Comput.*, 18(1):68–81, 1989.
- [34] F. Larrión and V. Neumann-Lara. A family of clique divergent graphs with linear growth. *Graphs Combin.*, 13(3):263–266, 1997.
- [35] F. Larrión and V. Neumann-Lara. Clique divergent graphs with unbounded sequence of diameters. *Discrete Math.*, 197/198:491–501, 1999. 16th British Combinatorial Conference (London, 1997).
- [36] F. Larrión and V. Neumann-Lara. Locally  $C_6$  graphs are clique divergent. *Discrete Math.*, 215(1-3):159–170, 2000.
- [37] F. Larrión and V. Neumann-Lara. On clique divergent graphs with linear growth. *Discrete Math.*, 245(1-3):139–153, 2002.
- [38] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Whitney triangulations, local girth and iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 258(1-3):123–135, 2002.
- [39] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Clique convergent surface triangulations. *Mat. Contemp.*, 25:135–143, 2003. The Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (Rio de Janeiro, 2002).
- [40] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Clique divergent clockwork graphs and partial orders. *Discrete Appl. Math.*, 141(1-3):195–207, 2004.

- [41] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Graph relations, clique divergence and surface triangulations. *J. Graph Theory*, 51(2):110–122, 2006.
- [42] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarreal-Flores. Equivariant collapses and the homotopy type of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 308:3199–3207, 2008.
- [43] C. G. Lekkerkerker and J. C. Boland. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fund. Math.*, 51:45–64, 1962/1963.
- [44] R. M. McConnell. Linear-time recognition of circular-arc graphs. *Algorithmica*, 37(2):93–147, 2003.
- [45] T. A. McKee and F. R. McMorris. *Topics in intersection graph theory*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [46] H. Müller. On edge perfectness and classes of bipartite graphs. *Discrete Math.*, 149(1-3):159–187, 1996.
- [47] H. Müller. Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time. *Discrete Appl. Math.*, 78(1-3):189–205, 1997.
- [48] V. Neumann-Lara. Clique divergence in graphs. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, volume 25 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 563–569. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [49] D. V. Pasechnik. Bipartite sandwiches: bounding the size of a maximum biclique. *ArXiv Mathematics e-prints*, July 1999.
- [50] D. V. Pasechnik. Bipartite sandwiches: semidefinite relaxations for maximum biclique. In *6th Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999)*, volume 3 of *Electron. Notes Discrete Math.*, page 5 pp. (electronic). Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [51] R. Peeters. The maximum edge biclique problem is NP-complete. *Discrete Appl. Math.*, 131(3):651–654, 2003.
- [52] M. A. Pizaña. *Gráficas Iteradas de Clanes*. PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana, 2002.
- [53] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 103(2):199–207, 1992.
- [54] E. Prisner. Bicliques in graphs. II. Recognizing  $k$ -path graphs and underlying graphs of line digraphs. In *Graph-theoretic concepts in computer science (Berlin, 1997)*, volume 1335 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 273–287. Springer, Berlin, 1997.

- [55] E. Prisner. Biclques in graphs. I. Bounds on their number. *Combinatorica*, 20(1):109–117, 2000.
- [56] F. S. Roberts and J. H. Spencer. A characterization of clique graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 10:102–108, 1971.
- [57] F. W. Stahl. Circular genetic maps. *Journal of Cellular Physiology*, 70 (Suppl. 1):1–12, 1967.
- [58] K. Stouffers. Scheduling of traffic lights—a new approach. *Transportation Res. 2*, pages 199–234, 1968.
- [59] E. Szpilrajn-Marczewski. Sur deux propriétés des classes d’ensembles. *Fund. Math.*, 33:303–307, 1945.
- [60] J. L. Szwarcfiter. A survey on clique graphs. In *Recent advances in algorithms and combinatorics*, volume 11 of *CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC*, pages 109–136. Springer, New York, 2003.
- [61] A. Tucker. Characterizing circular-arc graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:1257–1260, 1970.
- [62] A. Tucker. Matrix characterizations of circular-arc graphs. *Pacific J. Math.*, 39:535–545, 1971.
- [63] A. Tucker. Structure theorems for some circular-arc graphs. *Discrete Math.*, 7:167–195, 1974.
- [64] A. Tucker. Circular arc graphs: new uses and a new algorithm. In *Theory and applications of graphs (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)*, pages 580–589. Lecture Notes in Math., Vol. 642. Springer, Berlin, 1978.
- [65] A. Tucker. An efficient test for circular-arc graphs. *SIAM J. Comput.*, 9(1):1–24, 1980.
- [66] Z. Tuza. Covering of graphs by complete bipartite subgraphs: complexity of 0-1 matrices. *Combinatorica*, 4(1):111–116, 1984.
- [67] A. C. M. van Rooij and H. S. Wilf. The interchange graph of a finite graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 16:263–269, 1965.
- [68] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 54(1):150–168, 1932.
- [69] M. Yannakakis. Node- and edge-deletion NP-complete problems. In *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978)*, pages 253–264. ACM, New York, 1978.