Cambio de creencias en teorías modales

Tesis de Licenciatura

Gonzalo Zabala
gzabala@dc.uba.ar

Director: Dr. Ricardo Rodríguez

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Abril de 2003

Resumen

En el presente trabajo haremos una propuesta de dinámica de cambio sobre teorías expresadas en un lenguaje modal. Para ello propondremos una teoría de modelos para caracterizar un conjunto de creencias modales que nos permitirá generalizar en forma natural los resultados conocidos para lenguajes proposicionales.

Abstract

This thesis contains a proposal on change dynamic regarding theories expressed in a modal language. To that end we are proposing a theory of models to depict a set of modal beliefs that will enable as to generalize in a natural way the well-known results related to propositional languages.

A Iris, mi eterna compañera de banco.

Y a nuestros dos milagros, Laurita y Gastón.

Agradecimientos

A Ricardo, director de esta tesis, que fue un factor fundamental de la llegada a buen puerto de este trabajo, no sólo en lo intelectual, sino también en lo anímico y en lo operativo. Sólo su enorme voluntad y apoyo pudieron minimizar los problemas por los que pasé en este tiempo.

A mis padres y hermanos, que siempre estuvieron alentándome y colaborando conmigo, a pesar de los años que han pasado.

A Osvaldo, cuya amistad y hermosa charla me han permitido cientos de veces reflexionar sobre mis estudios.

Y especialmente a mis alumnos y exalumnos. Porque ellos son el motor constante de mis deseos de seguir aprendiendo.

Índice

1. Introducción

Las propuestas de desarrollar modelos de dinámica de cambio para extensiones de la lógica proposicional han surgido en diferentes contextos y motivaciones. Tenemos por ejemplo los resultados de Dubois y Prade que lo hacen para fórmulas graduadas (un par ordenado formado por una fórmula proposicional y un número real en el intervalo [0,1] que indica el grado de necesidad)[DP94]. También están las propuestas más "tradicionales" que enriquecen el lenguaje proposicional con operadores modales para capturar la noción de cambio en el lenguaje objeto. Sin embargo, esto último es la causa esencial por la cual se dan los llamados resultados de imposibilidad, al permitir que una fórmula exprese la acción de cambio sobre sí misma. Por ejemplo, Fuhrmann [Fuh89] se refiere a un modelo de cambio donde la interpretación de una fórmula $\Diamond\varphi$ incluida en una teoría T consiste en expresar que alguna de las posibles revisiones de T contiene a φ. En tales circunstancias se demuestra que es imposible que esas funciones de revisión satisfagan ciertos criterios de racionalidad que la mayoría de los autores consideran auspiciosos (más tarde nos referiremos a ellos como principios básicos de AGM [AGM85]). Este tipo de resultados han desalentado la generación de modelos de cambio para lenguajes modales.

El uso de lógicas modales para la modelización de sistemas en ciencias de la computación ha alcanzado una muy amplia aceptación. Por ejemplo, diversas lógicas se han propuesto para trabajar en la verificación de algoritmos, especialmente algoritmos concurrentes (PTL, Propositional Temporal Logic [Pnu77] ; TLA, Temporal Logic of Actions [Lam94]; CTL, Computational Tree Logic [CES86], etc.). Todas ellas están basadas en la premisa de que mostrar que un programa satisface su especificación expresada como una fórmula temporal o modal es equivalente a probar que la fórmula es verdadera en un estado (o conjunto de estados) o en un conjunto de corridas en el sistema de transición que modela el programa. Desde el punto de vista formal estas modelizaciones parten de una axiomatización de la lógica y ofrecen mecanismos de chequeo de modelos (model checking) o una teoría de prueba. En ambos casos la idea es explicitar cierto conocimiento implícito de una especificación.

Un problema diametralmente opuesto corresponde al hecho que el software sufre cambios constantes. Esto puede ser debido a errores que hay que corregir, a la necesidad de dar soporte a la evolución de la aplicación a medida que nuevos requerimientos aparecen o porque los viejos requerimientos cambian. La modelización de esos cambios permitiría ofrecer modelos formales para las tareas de mantenimiento y reusabilidad. Esto plantea la necesidad de disponer de caracterizaciones de la dinámica de cambio que se presentan en esos casos. Con esta motivación en mente es que nos proponemos dar algunos modelos generales y abstractos de cambio para lenguajes modales donde la interpretación de los operadores modales no se corresponde con la operación de cambio (como es usual en los trabajos mencionados anteriormente). Así veremos que en esas condiciones los teoremas de imposibilidad son evitados.

El modelo de cambio más conocido llamado AGM [AGM85], distingue tres tipos de operaciones de cambio:

- Expansión (+): incorporación de nuevo conocimiento en el conjunto de creencias que no contradice conocimiento anterior.
- Contracción (-): eliminación de cierto conocimiento, incluida la eliminación de todo conjunto de proposiciones que lo infiera.
- Revisión (*): incorporación de nuevo conocimiento que se contradice con conocimiento ya existente.

La axiomatización AGM no define en forma concreta ningún mecanismo de cambio, pero establece una serie de postulados racionales que debe cumplir cualquier operación. Por ejemplo, es necesario que el conocimiento que se incorpora sea verdadero en el nuevo estado epistémico. Por otra parte, tampoco define una representación determinada del conocimiento. Es decir, el resultado de una operación de cambio no debe depender del conjunto de creencias utilizado para representar el estado epistémico, sino de la información original y de la actualizada.

En el presente trabajo de tesis, propondremos mecanismos de cambio que satisfacen los criterios anteriores. Para ello tomaremos como estructura formal la de Modelo Centrado de Kripke ([Kri63]). Veremos que esa no será una restricción dado que comprobaremos que todo modelo clásico (no centrado) puede ser visto como una familia de modelos centrados. Por otra parte, este tipo de estructuras nos permitirá trasladar en forma natural los resultados ya conocidos de teoría de cambio "clásico" adaptando la semántica de esferas de Grove sobre mundos posibles. La estructura de modelo centrado nos permitirá definir la verdad de un conjunto de fórmulas (que representarán las creencias de un agente) como verdad en el mundo destacado en el modelo. De esa manera reemplazaremos la idea de modelo en la visión clásica, que venía dada por un "punto", por la idea de un "punto" más una estructura.

En resumen, el objetivo de esta tesis es presentar algunos mecanismos globales para realizar las tres operaciones de cambio en teorías sobre lenguajes modales. Para ello, primero presentaremos la estructura formal a utilizar, y demostraremos que nuestra definición de las operaciones de cambio en estos modelos respeta la caracterización conocida, como los postulados de AGM. Luego se plantearán algunas intuiciones sobre las características que deben tener las operaciones de cambio, y se presentará una propuesta para la definición de relaciones de orden entre estructuras de manera de seleccionar las estructuras que deben "incorporarse" o "caer" en operaciones de contracción y revisión. Esta elección estará determinada por el espíritu de mínimo cambio que subyace en las operaciones, es decir, que las mismas modifiquen lo menos posible el conjunto de conocimientos original. Por lo tanto, dicho orden debe determinar aquellas estructuras que al ser incorporadas perturben en la menor medida posible el conjunto de creencias. Nuestro enfoque será diametralmente opuesto al presentado por Gabbay, Rodrigues y Russo en [GRR99] donde el problema de cambio en una lógica modal cualquiera, se traduce a una operación de cambio en la lógica clásica de Primer Orden.

Hecha la presentación del mecanismo de cambio, se demuestra cómo este modelo no sufre la inconsistencia del modelo presentado en [Fuh89].

Por último, se presentan futuras líneas de trabajo a seguir a partir de estas propuestas y algunas aplicaciones concretas del mismo en diversos ámbitos.

2. Descripción del problema

2.1. Antecedentes

Antes de comenzar con la presentación de nuestra propuesta, es interesante ver trabajos previos sobre el tema, en los cuales se haya intentado introducir las proposiciones modales en el estado epistémico del agente y en los procesos de cambio.

En [Fuh89] encontramos una propuesta de cambios de creencias sobre lógica modal. En la misma se demuestra que, según una determinada definición de conjunto cerrado bajo operaciones modales, no existe conjunto de creencias que pueda incluir operadores modales y respetar los principios básicos de AGM.

Definición 1. *Levi. Para cualquier conjunto de creencias K, $Poss(K)$ es el conjunto más pequeño que contiene a K tal que:*

- $\Diamond\alpha \in Poss(K)$ *si* $\neg\alpha \notin K$
- $\neg\Diamond\neg\alpha \in Poss(K)$ *si* $\alpha \in K$

La lectura epistémica de esta definición es: si $\neg\alpha$ no está en K, entonces es posible que ocurra α ($\Diamond\alpha$). Por otra parte, si α está en K entonces no es posible que ocurra $\neg\alpha$ ($\neg\Diamond\neg\alpha$). Para introducir las sentencias modales en el conjunto de creencias se define:

Definición 2. *[Fuh89]. K es cerrado bajo Poss si* $Poss(K) \subseteq K$

Esta definición parece inocente, pero trae aparejado algunos problemas curiosos.

Observación 3. *Dados K_1 y K_2 cerrados bajo Poss, si $K_1 \subset K_2$, entonces K_2 es inconsistente.*
Demostración: Si $K_1 \subset K_2 \Rightarrow \exists\alpha \in K_2/\alpha \notin K_1 \Rightarrow \neg(\neg\alpha) \notin K_1 \Rightarrow \Diamond\neg\alpha \in Poss(K_1) \Rightarrow \Diamond\neg\alpha \in K_1 \Rightarrow \Diamond\neg\alpha \in K_2$. Y como $\alpha \in K_2$, $\neg\Diamond\neg\alpha \in K_2$. Y por lo tanto, K_2 es inconsistente.

En realidad, lo que podemos ver es que todo conjunto cerrado bajo $Poss$ es maximalmente consistente en relación a $Poss$. Es decir, es imposible que un conjunto cerrado bajo $Poss$ esté incluido estrictamente dentro de otro, si es que este último conserva consistencia. El problema surge de la definición de $Poss$, dado que para todo conjunto K cerrado bajo $Poss$, si tanto α como $\neg\alpha$ no pertenecen a K (algo absolutamente razonable en el estado epistémico de un agente), tenemos que $\Diamond\alpha \in K$ y $\Diamond\neg\alpha \in K$. Por lo tanto, si reviso K por α, dado que α pertenecerá a nuestro nuevo estado epistémico (postulado de éxito de AGM), también $\neg\Diamond\neg\alpha \in (K * \alpha)$ por estar cerrado bajo $Poss$. Y por ende, tenemos que abandonar $\Diamond\neg\alpha$ o caeríamos en una inconsistencia. De esta manera, no se cumpliría en la revisión el postulado de preservación de AGM, el cual propone que $\forall\alpha$, si $\alpha \notin K$ entonces $K \subseteq K * \alpha$. Lo mismo ocurriría si en vez de revisar por α hubiéramos revisado por $\neg\alpha$

Esta confrontación de los conjuntos cerrados bajo $Poss$ con algunos de los postulados de racionalidad básicos de AGM se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4. *Imposibilidad de Fuhrmann [Fuh89]. No existe K tal que cumpla las siguientes cinco condiciones:*

1. *Existe* $\alpha/\alpha \notin K y \neg\alpha \notin K$ *(incompletitud)*
2. $Poss(K) \subseteq K$ *(clausura bajo Poss)*
3. $\forall\alpha, \alpha \in K * \alpha$ *(exito)*
4. $\forall\alpha$, *si* $\neg\alpha \notin K$ *entonces* $K \subseteq K * \alpha$ *(preservación)*
5. *Si* α *es consistente,* $K * \alpha$ *lo es. (consistencia)*

A la luz de este resultado cabe preguntarse si es razonable tener un conjunto de creencias necesariamente completo en el sentido de $Poss$. Seguramente no, dado que desde el punto de vista epistémico nos lleva a la omnisciencia lógica de $Poss$. En la literatura aparecen tres alternativas para hacer compatibles las nociones de cambio con la inclusión de operadores modales en el lenguaje modal:

1. Las sentencias modales no pertenecen al conjunto de creencias. Es decir, los conjuntos de creencias no son cerrados bajo $Poss$. De esta

manera se pierden las operaciones de cambio sobre las proposiciones modales.

2. Aceptar las sentencias modales dentro del conjunto de creencias, pero no utilizar la definición 1 para determinar la pertenencia o no de las mismas al conjunto.

3. Utilizar la definición 1, pero rechazar la idea de que los conjuntos de creencias tengan los mismos postulados que los no modales. Por ejemplo, perder la preservación. Además, perderíamos la operación de expansión, dado que al tener conjuntos maximales, toda operación que incorpore una nueva proposición, necesariamente debe hacer caer a otra u otras proposiciones.

Nuestro trabajo puede enmarcarse en la segunda alternativa. Esencialmente modificaremos la forma de construir la extensión modal del conjunto de creencias. Es decir, no definiremos la pertenencia de las sentencias modales al conjunto de creencias de la misma manera que propone la definición 1. Por lo tanto, puede ocurrir que $\neg\alpha \notin K$ y sin embargo $\Diamond\alpha$ no pertenecer a la extensión modal. Del mismo modo para la segunda parte de la definición 1.

2.2. Presentación de nuestra propuesta

Presentaremos en esta sección el camino que desarrollaremos para encontrar un modelo que nos permita representar la dinámica de cambio sobre teorías modales. Quizás esta sección debería haber sido presentada antes de la sección anterior, pero consideramos que una mirada previa a una propuesta para el mismo problema que no ha prosperado, colaborará a que sea más clara esta descripción.

Nuestro trabajo debe encarar esencialmente tres problemas:

- La necesidad de representar conocimiento intencional.
- La definición de las operaciones de cambio sobre creencias que contienen conocimiento de tipo intencional.
- La definición de una función de selección para dichas operaciones de cambio.

Comenzaremos realizando una revisión de los conceptos fundamentales de la teoría de cambio que tomaremos como base para la definición de nuestra propuesta. Esto nos permitirá definir la forma en que representaremos el conocimiento en nuestro modelo, fundamentalmente los conocimientos intencionales. Como comentamos en la sección anterior, lo que produce la imposibilidad de Fuhrmann es la manera en que se determina la veracidad de las proposiciones modales.

Posteriormente, a partir de esta representación del conocimiento, definiremos cómo se realizarán las operaciones de cambio sobre el modelo presentado. Es imprescindible que estas operaciones no vayan en contra de los postulados de racionalidad propuestos por modelos anteriores de cambio. Por esta razón es que en la definición de las operaciones debemos tener en cuenta diversos aspectos del comportamiento del conjunto de creencias de un agente durante el proceso de cambio. Presentaremos entonces un conjunto de intuiciones que nos conducirán a la propuesta formal de cambio.

Dado que las operaciones de cambio se realizarán utilizando una función de selección, y teniendo fuertemente presente la idea de minimalidad en el cambio, definiremos nociones de distancia entre el conjunto de creencias actual del agente, y los posibles conjuntos de destino después de realizar las operaciones. De esta manera, podremos construir una función de selección que nos permita elegir de los posibles conjuntos de destino, aquél que respete las características deseables de las operaciones de cambio presentadas por modelos anteriores al nuestro.

Así, llegaremos al final de nuestro trabajo analizando si el modelo propuesto efectivamente respeta los caminos anteriores en el cambio de creencias. Si esto es así, obtendremos un modelo de cambio para teorías modales que es consistente con lo que se ha construido hasta el presente.

3. Modelo centrado

3.1. Definición

En esta sección haremos una revisión de los conceptos básicos necesarios para la comprensión del tema tratado, así como la notación a utilizar durante todo este escrito.

Definición 5. *Un lenguaje modal sentencial P consta de un vocabulario formado por un conjunto (posiblemente infinito) Ψ de letras sentenciales, un conjunto de conectores diádicos $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, otro de operadores monádicos $\{\neg, \Box, \Diamond\ \}$, los paréntesis $\{(,)\}$ y una constante $\perp$ (que se interpreta como lo falso).*

Al lenguaje sentencial P' que no contiene en su vocabulario a los operadores modales $(\Box, \Diamond)$ se lo denomina sublenguaje sentencial del lenguaje modal sentencial P.

Definición 6. *El conjunto de fórmulas de un lenguaje modal sentencial P, $FOR(P)$, es el menor conjunto X de sucesiones finitas de elementos del vocabulario de P tal que:*

1. $P \subseteq X$.
2. $\perp \in X$.
3. *Si* α *y* $\beta \in X$ *entonces* $(\alpha \# \beta) \in X$ *con* $\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
4. *Si* $\alpha \in X$ *entonces* $\#\alpha \in X$ *con* $\# \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$.

Definición 7. *Dado un lenguaje modal sentencial P, una lógica L es un conjunto de fórmulas sobre P tal que:*

1. *Todo teorema del sublenguaje sentencial de P pertenece a L.*
2. *L está cerrado bajo modus ponens, es decir, si $(\alpha \rightarrow \beta)$ y α pertenenecen a L, entonces β pertenece a L.*
3. *L está cerrado bajo sustitución, lo que significa, que si α pertenece a L , entonces para toda letra sentencial p y toda fórmula β, $\alpha(p/\beta)$ pertenece a L.*

4. *Respeta las siguientes equivalencias entre operadores binarios y unarios:*
   $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$, $\alpha \vee \beta \equiv (\neg\alpha \to \beta)$,
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, $\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$, $T \equiv \perp \to \perp$.

El conjunto de todas las fórmulas que se obtienen por sustitución a partir de los teoremas del sublenguaje sentencial de un lenguaje modal sentencial P dado, se notará L_p

Definición 8. *Los siguientes son casos particulares de lógicas:*

1. *Una lógica L es una* lógica clásica *si está cerrada bajo la regla: si $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in L$, entonces $(\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta) \in L$ (necesidad de equivalencia).*

2. *Una lógica L es una* lógica regular *si está cerrada bajo la regla: si $(\alpha \wedge \beta) \to \delta \in L$, entonces $(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box\delta \in L$.*

3. *Una lógica L es una* lógica normal *si está cerrada bajo la regla: si $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta \in L$, entonces $(\Box\alpha_1 \wedge \Box\alpha_2 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n) \to \Box\beta \in L$. (regla K).*

Definición 9. *Una lógica (en un lenguaje sentencial P) es consistente si es diferente de $FOR(P)$.*

En esta tesis nos ocuparemos de las lógicas normales por ser las más difundidas. Sin embargo es posible desarrollar adaptaciones para lógicas más débiles, tomando una semántica de modelos minimales [Che80].

Definición 10. *Dado un conjunto de fórmulas Σ, la base de conocimiento $KB(\Sigma)$ en un lenguaje modal sentencial P generada a partir de Σ es el conjunto de fórmulas más pequeño que contiene a Σ y a L_p, cerrado mediante la regla de modus ponens y la regla K (que es equivalente a la regla de necesitación y al Axioma K - [Che80] Teorema 4.3(1) pág. 115).*

Para dar cuenta de la semántica hemos decidido utilizar la idea de Modelos Centrados que brinda Kripke en [Kri63] y que puede ser enunciado de la siguiente manera:

Definición 11. *Un Modelo Centrado corresponde a la siguiente estructura $M_c = \langle W, *, \Re, \models \rangle$ donde:*

1. *W es un conjunto no vacío de índices llamados mundos posibles.*

2. *$* \in W$ es un mundo destacado llamado el centro del modelo.*

3. *$\Re$ es un relación en $W \times W$ con las siguientes propiedades:*

   - $(*, *) \in \Re$.
   - *$\forall w_1, w_2 \in W$ tal que $(w_1, w_2) \in \Re$, entonces $(*, w_2) \in \Re^*$ (clausura transitiva de $\Re$).*

4. *$\models: W \times Var \mapsto \{true, false\}$. Función que dada una variable proposicional y un mundo posible (un índice) devuelve el valor de verdad de la variable proposicional en ese mundo.*

La noción de verdad se extiende a toda la lógica modal L de la siguiente manera [1].

Dado $w \in W$ y $\varphi, \psi \in L$:

1. *$w \vDash \varphi \wedge \psi$ sii $w \vDash \varphi$ y $w \vDash \psi$.*

2. *$w \vDash \varphi \vee \psi$ sii $w \vDash \varphi$ ó $w \vDash \psi$.*

3. *$w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ sii $w \vDash \varphi$ entonces $w \vDash \psi$.*

4. *$w \vDash \neg\varphi$ sii $w \nvDash \varphi$.*

5. *$w \vDash \Box\varphi$ sii $\forall w' \in W$ si $(w, w') \in \Re$ entonces $w' \vDash \varphi$.*

6. *$w \vDash \Diamond\varphi$ sii $\exists w' \in W \;/\; (w, w') \in \Re$ y $w' \vDash \varphi$.*

Nota: Nos referiremos a *modelo centrado* como *estructura centrada* indistintamente.

Definición 12. *Dada la estructura centrada $M_c = \langle W, *, \Re, \models \rangle$ y una formula $\varphi \in L$, decimos que φ es verdadera en M_c (y escribimos $M_c \vDash \varphi$) si y sólo si $* \vDash \varphi$.*

[1] Donde se lee $w \vDash \alpha$ debe entenderse $w \vDash \alpha = \text{true}$, utilizando notación infija por comodidad

La definición anterior corresponde a asociar verdad en la estructura con verdad en el mundo centrado.

Definición 13. *Sea M la clase de todas las estructuras centradas y una fórmula α. Definimos $\|\alpha\| = \{M_c \in M : M_c \models \alpha\}$. De la misma manera, dado K conjunto de fórmulas, definimos $\|K\| = \{M_c \in M / \forall \alpha \in K, M_c \models \alpha\}$. Llamaremos* ***modelos de K*** *al conjunto de estructuras centradas $\|K\|$.*

Observación 14. *Dado K un conjunto de fórmulas inconsistente, i.e. $\perp \in K$, entonces $\|K\| = \emptyset$.*

Demostración: Dado que todas las estructuras M_c son consistentes, no existe M_c tal que $M_c \vDash \perp$. Por lo tanto, si $\perp \in K$, entonces $\|K\| = \emptyset$.

Definición 15. *Dado M_c, definimos $Th(M_c) = \{\alpha / M_c \models \alpha\}$. De la misma manera, dado N un conjunto de estructuras centradas, definimos $Th(N) = \bigcap Th(M_c), M_c \in N$. Por otra parte, $Th(\emptyset) = FOR(P)$.*

Definición 16. *Dado un conjunto de creencias K, llamamos* consecuencia lógica de *K ($Cn(K)$) a $K \cup \{\alpha / K \vdash \alpha\}$. Decimos que un conjunto K es cerrado bajo consecuencia lógica cuando $K = Cn(K)$.*

Definición 17. *Los conjuntos de creencias K con los que trabajamos son cerrados bajo consecuencia lógica. En particular, en nuestro modelo, $K = Th(\|K\|)$.*

Observación 18. *$Th(N) = Th(\|Th(N)\|)$.*

Demostración: Por la definición 15 sabemos que $Th(N)$ es cerrado bajo consecuencia lógica. Por lo tanto, si reemplazamos K por $Th(N)$ en la definición anterior, se demuestra la presente observación.

Observación 19. *Si H y K son cerrados bajo consecuencia lógica, $\|K\| \subseteq \|H\| \Leftrightarrow H \subseteq K$.*

Demostración:

- $\Rightarrow$) Dados los conjuntos de creencias K y H, si $\|K\| \subseteq \|H\|$, entonces por la definición 15 $Th(\|K\|) = \bigcap Th(M_c), M_c \in \|K\|$ y $Th(\|H\|) = (\bigcap Th(M_c), M_c \in \|K\|) \cap (\bigcap Th(M_c'), M_c' \in \|H\|, M_c' \notin \|K\|)$. Por lo tanto, $Th(\|H\|) \subseteq Th(\|K\|)$. Y por lo tanto, por la definición 17, $H \subseteq K$.

- $\Leftarrow$) Dados los conjuntos de creencias K y H, si $H \subseteq K$, dada la estructura M_c tal que $\forall \alpha \in K, M_c \vDash \alpha$, M_c también satisface todas las fórmulas de H. Por lo tanto, $\forall M_c \in \|K\|$, $M_c \in \|H\|$. Y por ende, $\|K\| \subseteq \|H\|$.

3.2. Equivalencia entre modelo centrado y modelo estándar

En general, la literatura tradicional sobre lógica modal, trabaja con la noción de modelo estándar (modelo no centrado), definido de la siguiente forma [Che80]:

Definición 20. *$M = \langle W, \Re, \vDash \rangle$ es un modelo estándar (o modelo no centrado) si y sólo si:*

- *W es un conjunto no vacío de índices llamados mundos posibles.*
- *$\Re$ es un relación en $W \times W$.*
- *$\models: W \times Var \mapsto \{true, false\}$. Función que dada una variable proposicional y un mundo posible (un índice) devuelve el valor de verdad de la variable proposicional en ese mundo.*

Dado $M = \langle W, \Re, \vDash \rangle$, escribiremos $M \vDash_w \alpha$ cuando dado $w \in W$, $w \vDash \alpha$.

La interpretación de $\Re$ en un modelo estándar puede variar, pero en general se puede pensar como relevancia o posibilidad relativa. Es decir, $w \Re w'$ significa que w' es relevante (o relativamente posible, o alcanzable) para el mundo w. El valor de verdad de las sentencias modales está determinado por $\Re$, de la misma manera que en los modelos centrados:

Definición 21. *Dado el mundo w en un modelo estándar $M = \langle W, \Re, P \rangle$:*

- *Dado $w \in W$, $M \vDash_w \Box \alpha$ si y sólo si para todo $w' \in M$ tal que $w \Re w'$, $M \vDash_{w'} \alpha$.*
- *Dado $w \in W$, $M \vDash_w \Diamond \alpha$ si y sólo si para algún $w' \in M$ tal que $w \Re w'$, $M \vDash_{w'} \alpha$.*

Como hemos planteado anteriormente, en nuestro caso utilizaremos modelos centrados, que a primera vista parecen más restrictivos que los modelos estándares. Reproduciremos a continuación la demostración de que el valor de verdad en un modelo estándar es equivalente al valor de verdad en un modelo centrado [Che80].

Definición 22. *Dado* $*$ *un mundo en un modelo estándar* $M = \langle W, \Re, \vDash \rangle$*,* $M_c = \langle W', *, \Re', \vDash' \rangle$ *es el modelo centrado generado por* $*$ *desde* M *si y sólo si:*

1. $W' = \{w \in M : *\Re^n w,$ *para algún* $n \geq 0\}$.
2. $\Re' = \Re \cap (W' \times W')$.
3. $\vDash' = \vDash \cap W'$.

Teorema 23. *Dado* $M_c = \langle W^*, *, \Re^*, \vDash^* \rangle$ *el modelo centrado generado por el mundo destacado* $*$ *a partir del modelo estándar* $M = \langle W, \Re, \vDash \rangle$*. Entonces, para todo* w *en* M_c *(en particular el mundo centrado):*

$$M \vDash_w \alpha \text{ si y solo si } M_c \vDash'_w \alpha$$

Demostración: Mediante inducción en la complejidad de α. Lo demostraremos cuando α (a) es atómica, (b) es $\perp$, (c) es un condicional $\delta \to \epsilon$, y (d) es una necesitación $\Box\delta$. Tomamos: w un mundo de M_c (en particular, el mundo centrado) .

a) α es atómica: $M \vDash_w \alpha \Leftrightarrow w \vDash \alpha \Leftrightarrow w \vDash^* \alpha$ (dado que $w \in W^*$) $\Leftrightarrow M_c \vDash^*_w \alpha$.

b) α es $\perp$: como $\perp$ no es verdadero en ningún mundo de ningún modelo, $M \vDash_w \perp$ si y sólo si $M_c \vDash^*_w \perp$.

Para los casos inductivos c) y d), tomaremos la hipótesis de que el teorema vale para todas las sentencias más cortas que α.

c)$M \vDash_w \delta \to \epsilon \Leftrightarrow$ Si $M \vDash_w \delta$ entonces $M \vDash_w \epsilon \Leftrightarrow$ Si $M_c \vDash^*_w \delta$ entonces $M_c \vDash^*_w \epsilon \Leftrightarrow M_c \vDash^*_w \delta \to \epsilon$.

d)$M \vDash_w \Box\delta \Rightarrow M_c \vDash^*_w \Box\delta$:
$M \vDash_w \Box\delta$. Entonces, para todo w' tal que $w\Re w'$, $M \vDash_{w'} \delta$. Por hipótesis

inductiva y dado que W^* es un subconjunto de W y $\Re^*$ es un subconjunto de $\Re$, para todo w' tal que $w\Re^*w'$, $M_c \vDash^*_{w'} \delta$. Por lo tanto, $M_c \vDash^*_w \Box\delta$.

$M_c \vDash^*_w \Box\delta \Rightarrow M \vDash_w \Box\delta$:
$M_c \vDash^*_w \Box\delta$. Entonces, para todo w' tal que $w\Re^*w'$, $M_c \vDash^*_{w'} \delta$. Por hipótesis inductiva, para el mismo w', $M \vDash_{w'} \delta$. Ahora, ¿podríamos tener un w'' tal que $M \nvDash_{w''} \delta$ y $w\Re w''$, de manera tal que $M \nvDash_w \Box\delta$?. Si $w \in W^*$ esto significa que $*\Re w$ y dado que $w\Re w''$, $w'' \in W^*$ y $*\Re^* w''$. Por lo tanto, $M_c \vDash^*_{w''} \delta$, y por hipótesis inductiva, $M \vDash_{w''} \delta$, con lo cual concluimos que lo preguntado es imposible. Por lo tanto, para todo w'' tal que $w\Re w''$, $M \vDash_{w''} \delta$. Y por lo tanto, $M \vDash_w \Box\delta$.

Por último, presentamos a continuación el siguiente teorema:

Observación 24. *Dado $M = \langle W, \Re, \vDash \rangle$ un modelo estándar y α una fórmula. Entonces $M \vDash \alpha$ si y sólo si $\forall w \in W$, $M \vDash_w \alpha$ si y sólo si $\forall w \in W, w \vDash \alpha$.*

Estos resultados nos permiten trasladar los resultados de completitud clásicos sobre modelos estándares en términos de modelos centrados.

4. Operaciones de cambio en el contexto modal

A continuación presentaremos cada una de las operaciones de cambio. En cada una de las operaciones propuestas, analizaremos si se cumplen o no los postulados básicos de AGM. Es importante aclarar que la teoría de cambio clásica no toma un compromiso fuerte con ningún lenguaje. Sólo asume ciertas propiedades básicas que el lenguaje sentencial que estamos utilizando también satisface. Por lo tanto, es de esperar que las operaciones de cambio se preserven en los lenguajes modales. Esta sección tiene como objetivo demostrar esta preservación.

4.1. Expansión

La expansión es una operación de cambio en la cual se incorpora información al estado epistémico del agente, **sin ninguna garantía de "equilibrio" en el nuevo estado epistémico**. Genéricamente podemos definir la expansión de la siguiente manera:

Definición 25. *Dados K conjunto de creencias y α, proposición a incorporar a K:*

$$K + \alpha = Th(\|K\| - \|\neg\alpha\|)$$

¿Qué ocurre si expandimos por α y $\neg\alpha \in K$? Dado que $\neg\alpha \in K$, todas las estructuras $\|K\|$ son $\neg\alpha$ estructuras. Por lo tanto, haríamos caer todas las estructuras modelos de K y por Definición 15, obtendríamos $FOR(P)$.

También podemos definir la expansión como lo hace Hansson en [Han99].

Definición 26. *Dados K conjunto de creencias y α, proposición a incorporar a K, el operador $\oplus$ de expansión proposicional para $\|K\|$ es:*

$$K \oplus \alpha = Th(\|K\| \cap \|\alpha\|)$$

Observación 27. *Es sabido que en un lenguaje proposicional ambas definiciones son equivalentes. En el caso modal, la equivalencia se preserva, y es trivial su verificación.*

A continuación, verificaremos que se cumplen los postulados de racionalidad propuestos por AGM.

(K+1) Clausura: Para cualquier conjunto de creencias K y cualquier sentencia α , $K + \alpha$ es un conjunto de creencias.

Dado un conjunto de creencias K, el mismo está definido por el conjunto de teoremas de las estructuras según la definición 17. Luego, por definición, $Th(\|K + \alpha\|)$ es un conjunto de creencias.

(K+2) Exito: $\alpha \in K + \alpha$

$\forall M_c, M_c \models \alpha$ o $M_c \models \neg\alpha$. Si $\|K + \alpha\| = \|K\| - \{M_c : M_c \models \neg\alpha\}$ entonces $\forall M_c \in \|K+\alpha\|, M_c \models \alpha$. Notar que si $\|K+\alpha\| = \emptyset$, $Th(\|K+\alpha\|) = FOR(P)$.

(K+3) Inclusión: $K \subseteq K + \alpha$

Si $\beta \in K \Rightarrow \forall M_c \in \|K\|, M_c \models \beta \Rightarrow \forall M_c \in \|K\| - \|\neg\alpha\|, M_c \models \beta \Rightarrow \beta \in K + \alpha$.

(K+4) Vacuidad: Si $\alpha \in K$ **entonces** $K + \alpha = K$

Dado que $\alpha \in K$ entonces $\{M_c \in \|K\| : M_c \models \neg\alpha\} = \emptyset$. Por lo tanto, dado que $\|K + \alpha\| = \|K\| - \|\neg\alpha\| = \|K\| - \{M_c \in \|K\| : M_c \models \neg\alpha\}$, $\|K + \alpha\| = \|K\| \Rightarrow Th(\|K + \alpha\|) = Th(\|K\|) \Rightarrow K + \alpha = K$.

(K+5) Monotonía: Si $H \subseteq K$ **entonces** $H + \alpha \subseteq K + \alpha$

$H \subseteq K \Rightarrow \|K\| \subseteq \|H\| \Rightarrow \|K\| - \{M_c : M_c \models \neg\alpha\} \subseteq \|H\| - \{M_c : M_c \models \neg\alpha\} \Rightarrow \|K + \alpha\| \subseteq \|H + \alpha\| \Rightarrow H + \alpha \subseteq K + \alpha$.

(K+6) Para todo conjunto K y proposición α, $K + \alpha$ es el conjunto más pequeño de creencias que satisface (K+1)..(K+5). $(K + \alpha \subseteq Cn(K \cup \{\alpha\})$.

Sólo consideraremos el caso no trivial, que es cuando $\neg\alpha \notin K$.
Si $\alpha \in K$, entonces por $K + 4$, $K = K + \alpha$. Y por otro lado, también $Cn(K \cup \{\alpha\}) = K$. Con lo cual se cumple el postulado.
Supongamos que este postulado no se cumple cuando $\alpha \notin K$. Es decir, existe

$\beta \in K + \alpha$ tal que $\beta \notin Cn(K \cup \{\alpha\})$. Que $\beta \in K + \alpha$ significa que para todo $M_c \in \|K + \alpha\|$, $M_c \vDash \beta$. Por lo tanto, tenemos dos casos:

- Si $\beta \in K$, entonces por monotonía, $\beta \in Cn(K \cup \{\alpha\})$.
- Si $\beta \notin K$, existen $M_c \in \|K\|$ tal que $M_c \vDash \neg\beta$. En este caso deberíamos analizar si para todo $M_c \in \|K\|$, $M_c \vDash (\alpha \to \beta)$. Dado que $\beta \in K + \alpha$, en todas las estructuras donde $M_c \vDash \alpha$ también $M_c \vDash \beta$. Por lo tanto, al expandir por α deben caer las $\neg\alpha$ estructuras, y en consecuencia, quedan β estructuras. En las α estructuras de $\|K\|$, vale $\alpha \to \beta$. Ahora, en las $\neg\alpha$ estructuras de $\|K\|$, necesariamente debe valer $\alpha \to \beta$, porque si valiera la negación de esta proposición, debería valer α. Por lo tanto, $(\alpha \to \beta) \in K$. Y de esa manera, $\beta \in Cn(K \cup \{\alpha\})$.

Conclusión: no existe β tal que $\beta \in K + \alpha$ y $\beta \notin Cn(K \cup \{\alpha\})$. Y de esta manera queda demostrado que el postulado $K + 6$ se cumple en el modelo propuesto.

Analicemos ahora la operación de contracción.

4.2. Contracción

Tanto en esta operación de cambio como en la revisión, necesitamos incorporar estructuras al conjunto de modelos de K. Por lo tanto, entrará en juego todo lo que expondremos en los capítulos 5 y 6 para definir qué estructura o estructuras son las que determinan el menor cambio posible. Genéricamente podemos decir que:

$$K - \alpha = Th(\|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha))$$

Siendo $\zeta_K : L \mapsto \mathcal{P}(M)$. La idea intuitiva es que esta función de selección $\zeta_K(\alpha)$ devuelva las α-estructuras que sean epistemológicamente más cercanas a K. La idea de cercanía la definiremos basada en una relación de orden entre estructuras con respecto a K. Para esto, la función de selección debe cumplir las siguientes propiedades:

1. $\zeta_K(\alpha) \subseteq \|\alpha\|$. Es decir, dado α la función de selección elige entre las α estructuras.
2. Si $\alpha \in K$ entonces $\zeta_K(\alpha) = \|K\|$. Es decir, dado un conjunto de estructuras, no hay conjunto más cercano que sí mismo.
3. Si $\neg\alpha \notin K$ entonces $\zeta_K(\alpha) \subseteq \|K\|$. Es decir, si un subconjunto de estructuras de $\|K\|$ satisfacen la fórmula dada, dichas estructuras son las más cercanas.
4. Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, entonces $\zeta_K(\alpha) = \zeta_K(\beta)$. Es decir, si dos fórmulas son equivalentes, ante el mismo K, la función de selección tiene que devolver las mismas estructuras.

En la sección 6 definiremos una función de selección que cumpla con las propiedades anteriores.

Verificaremos que se cumplen los postulados de racionalidad propuestos por AGM.

(K-1) Clausura (Closure): Para cualquier conjunto de creencias K y cualquier sentencia α , $K - \alpha$ es un conjunto de creencias.

Nuestro conjunto de creencias está definido por el conjunto de estructuras que satisfacen las fórmulas de K, lo que llamamos modelos de K. Dado que sólo hemos agregado estructuras a ese conjunto, $Th(\|K - \alpha\|)$ es un conjunto de creencias.

(K-2) Inclusión: $K - \alpha \subseteq K$.

Dado que $\|K - \alpha\| = \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha)$, entonces $\|K\| \subseteq \|K - \alpha\|$. Por lo tanto, por la observación 19, $K - \alpha \subseteq K$.

(K-3) Vacuidad: Si $\alpha \notin K$ entonces $K - \alpha = K$.

Por la tercera propiedad de la función de selección, si $\alpha \notin K$, $\zeta_K(\neg\alpha) \subseteq \|K\|$. Por lo tanto, $\|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha) = \|K\|$. Y en consecuencia, $K - \alpha = K$.

(K-4) Exito: Si $\nvdash \alpha$ entonces $\alpha \notin K - \alpha$.

Si $\alpha \notin K$, por el postulado anterior tenemos que $\alpha \notin K - \alpha$. Si $\alpha \in K$, dada la definición de contracción, agregamos a nuestro conjunto de estructuras una o más donde vale $\neg\alpha$. Por lo tanto, $\alpha \notin K - \alpha$.

(K-5) Recuperación: $K \subseteq (K - \alpha) + \alpha$**.**

Pedir lo anterior es lo mismo que pedir $\|(K-\alpha)+\alpha\| \subseteq \|K\|$. Supongamos que existe $M_c \in \|(K - \alpha) + \alpha\|$ que no pertenece a $\|K\|$. Dado que la expansión elimina $\neg\alpha$ estructuras, debe ser la contracción la que sumó esta nueva $\neg\alpha$ estructura. Pero por definición, para esa estructura M_c vale que $M_c \vDash \neg\alpha$. Por lo tanto, cuando realizamos una expansión por α, dado que las $\neg\alpha$ estructuras caen, esa estructura debe caer. De esa manera, no es posible que exista $M_c \in \|(K - \alpha) + \alpha\|$ que no pertenece a $\|K\|$.

(K-6) Extensionalidad: Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ **entonces** $K - \alpha = K - \beta$**.**

Por la cuarta propiedad de la función de selección.

Veamos ahora la operación de revisión.

4.3. Revisión

La operación de revisión permite modificar las actitudes epistémicas hacia las creencias, aceptando creencias que eran rechazadas o viceversa. Por otra parte, la operación debe mantener un estado epistémico consistente.

La operación queda definida genéricamente de la siguiente manera:

Definición 28. *$K * \alpha$ se define como*

1. $K + \alpha$ *si* $\neg\alpha \notin K$.
2. $Th(\zeta_K(\alpha))$ *si* $\neg\alpha \in K$.

Es interesante destacar que la definición dada es equivalente a la definición de revisión mediante la igualdad de Levi:

$$K * \alpha = (K - \neg\alpha) + \alpha$$

.

$K - \neg\alpha = Th(\|K\| \cup \zeta_K(\alpha))$. Si luego expando por α, deben caer todas las $\neg\alpha$ estructuras, que es exactamente lo mismo que hacer caer a todas las estructuras de $\|K\|$. Por lo tanto, $(K - \neg\alpha) + \alpha = Th(\zeta_K(\alpha))$.

Ahora analizaremos si se cumplen los postulados de racionalidad en la operación de revisión que hemos planteado:

(K*1) Clausura: Para cualquier conjunto de creencias K y cualquier sentencia α , $K * \alpha$ es un conjunto de creencias.

El conjunto es cerrado por definición.

(K*2) Exito: $\alpha \in K * \alpha$.

Según la definición 28, si $\neg\alpha \notin K$, la operación de revisión es igual a $K + \alpha$, y por (K+1) sabemos que $\alpha \in K + \alpha$. En el caso que $\neg\alpha \in K$, por definición 28 $K * \alpha = Th(\zeta_K(\alpha))$. Por la primera propiedad de la función de selección, $\zeta_K(\alpha) \subseteq \|\alpha\|$. Por lo tanto, $Th(\|\alpha\|) \subseteq Th(\zeta_K(\alpha))$ y por ende, $\alpha \in K * \alpha$.

(K*3) Inclusión: $K * \alpha \subseteq K + \alpha$.

Según la definición 28, si $\neg\alpha \notin K$, la operación es igual a $K + \alpha$. Si $\neg\alpha \in K$, entonces $K + \alpha = FOR(P)$, y por lo tanto, $K * \alpha \subseteq FOR(P)$.

(K*4) Vacuidad: Si $\neg\alpha \notin K$ entonces $K * \alpha = K + \alpha$.

Por definición 28.

(K*5) Consistencia: Si $\nvdash \neg\alpha$ entonces $K * \alpha \neq FOR(P)$.

La única manera de que una operación lleve a $FOR(P)$, es que no queden estructuras modelos de K. Según la definición 28 $K*\alpha$ queda definido por un nuevo conjunto de α estructuras. A menos que $\vdash \neg\alpha$, existen α-estructuras (de las cuales alguna o algunas serán las más cercanas). Y por lo tanto, tendremos un conjunto de estructuras que definan al nuevo conjunto de creencias.

(K*6) Extensionalidad: Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ entonces $K * \alpha = K * \beta$.

Si $\neg\alpha \notin K$, entonces $\neg\beta \notin K$. Por lo tanto $K*\alpha = K+\alpha = K+\beta = K*\beta$. Si $\neg\alpha \in K$, el postulado se cumple por la cuarta propiedad de la función de selección.

De esta manera, hemos visto que el modelo que hemos propuesto respeta los postulados fundamentales de AGM.

5. Intuiciones sobre la mecánica de las operaciones de cambio en el modelo presentado

A continuación describiremos las intuiciones que nos conducirán a definir las funciones de cercanía y relaciones de orden entre estructuras del capítulo 6. Veremos que la noción de distancia entre un modelo centrado M_c y otro M'_c está dada por la diferencia entre las proposiciones (modales o no) que satisface M_c con respecto a M'_c. Lo que deseamos presentar en esta sección son las diferencias entre las estructuras que definen esta distancia. Por ejemplo, si la distancia está dada en proposiciones del tipo $\Diamond\alpha$ veremos que la diferencia puede radicar sólo en los pares que pertenecen a $\Re$. La idea subyacente a nuestra propuesta en las operaciones de cambio, es que el cambio mínimo está dado por la minimalidad en la diferencia entre estructuras.

Dada una estructura $M_c = \langle W, *, \Re, \models \rangle$, las proposiciones verdaderas en dicha estructura definen su valor de verdad de la siguiente manera:

- Las proposiciones no modales, a partir del mundo centrado *, sin considerar las relaciones $\Re$ de dicho mundo. Como podemos ver en la definición 11, cuando se extiende el lenguaje modal a todo el modelo, podemos ver en los puntos 1 a 4 que las proposiciones no modales no atómicas se satisfacen a partir del mundo y no de la relación del mismo con los demás mundos posibles. Y por la definición 12 es el mundo centrado de la estructura el que determina la veracidad de las variables y fórmulas proposicionales no modales.
- Las proposiciones modales, a partir de $\Re$. Como podemos ver en la definición 11, en los puntos 5 y 6 se define que el valor de verdad de las proposiciones no modales estará dado por la relación definida por $\Re$ entre el mundo que analizamos y los otros mundos posibles. También la definición 12 determina que son las relaciones del mundo centrado, y las propiedades de $\Re$ (simetría, transitividad) las que definen el valor de verdad de las proposiciones modales.

Por lo tanto, nuestras propuestas de cambio deben considerar ambos aspectos.

Veamos a continuación, operación por operación, cómo creemos que deben realizarse los cambios.

5.1. Expansión

En la expansión, tanto para las proposiciones modales como para las no modales, la operación es exactamente igual: expandir por α es eliminar las $\neg\alpha$ estructuras, sea α modal o no.

5.2. Contracción

5.2.1. Proposiciones no modales

Hemos definido la contracción por una proposición no modal p incorporando una o más $\neg p$ estructuras, determinadas por la función de selección correspondiente. Esto nos plantea entonces un dilema: ¿Qué criterio de selección utilizaremos en dicha función? Eso lo desarrollaremos con detenimiento en la sección 6. Por ejemplo, dado $M_c = \langle W, *, \Re, \models \rangle$. Supongamos que $M_c \vDash \alpha$ pero no existe $w \in W$, $w \neq *$, tal que $w \vDash \alpha$ y $\Re(*, w)$. Por lo tanto, si hacemos caer a α modificando el mundo centrado sin modificar las relaciones, también caerá $\Diamond\alpha$. Si modificara $\Re$, agregando un mundo relacionado a $*$ que satisfaga α, podríamos conservar $\Diamond\alpha$. O tal vez es razonable que $\Diamond\alpha$ caiga dado que su único sostén es α en el mundo centrado. Es por eso que la selección por cercanía que presentaremos contempla en forma subyacente, al querer preservar la mayor cantidad de proposiciones del modelo anterior, no sólo las proposiciones no modales del mundo centrado, sino también las relaciones que definen las proposiciones con operadores modales.

5.2.2. Proposiciones modales con operador $\Box$ ($\Box\alpha$)

En este caso, basta con que la o las estructuras a incorporar difieran sólo en $\Re$ con respecto a las estructuras pertenecientes a $\|K\|$ de manera tal que no satisfagan $\Box\alpha$. Para esto, el mundo centrado de cada una de estas estructuras incorporadas debe satisfacer las mismas proposiciones no modales de K, pero tener al menos un mundo relacionado con el mundo centrado donde no valga α de manera tal que no valga $\Box\alpha$. Por lo demás, conservar las demás relaciones permitiría realizar el mínimo cambio posible.

5.2.3. Proposiciones modales con operador $\Diamond$ ($\Diamond\alpha$)

Las estructuras a incorporar en este caso, son aquellas en las que no se satisfaga α en ninguno de los mundos relacionados por $\Re$ con el mundo centrado. Y además, dado que $*\Re*$, el mundo centrado tampoco debe ser un α mundo. Es por eso que esta operación depende de diversos factores:

- Si $\alpha \notin K$, entonces existe $M_c \in \|K\|/M_c \vDash \neg\alpha$. Entonces, como $\Diamond\alpha \in K$, el mundo centrado de esa o esas estructuras deben tener mundos relacionados r donde $r \vDash \alpha$. Tomaremos como las estructuras más cercanas para incorporar a aquellas donde eliminar estas últimas relaciones sea el menor cambio posible.
- Si $\alpha \in K$, entonces debo agregar un $M_c/M_c \vDash \neg\alpha$ y que no tenga mundo relacionado donde valga α. En este caso la función de cercanía deberá evaluar tanto el mundo centrado como las relaciones.

5.3. Revisión

En esta operación, dada una proposición φ modal o no modal, la función de selección es idéntica a la utilizada en la contracción para determinar las estructuras a incorporar, sólo que en este caso, la función no será aplicada a la negación de la fórmula sino a su afirmación. Además, en la contracción conservamos las estructuras de $\|K\|$. En este caso, salvo que la operación sea trivial (que $\neg\varphi \notin K$), las estructuras previas caen por completo, y sólo las devueltas por la función de selección son las que se incorporan en los modelos de $K * \varphi$. Veamos entonces qué criterios subyacen a la función de selección en esta operación:

5.3.1. Proposiciones no modales

En este caso, lo primero que debemos analizar es el mundo centrado de cada una de las estructuras a incorporar. En el mismo debe valer la proposición por la cual se hace la revisión. Pero además, posiblemente debamos modificar $\Re$ para mantener proposiciones modales que de otra forma caerían. Por ejemplo, dado $M_c = \langle W, *, \Re, \models\rangle$ tal que $M_c \vDash \neg\alpha$. En ese caso $\Diamond\neg\alpha \in K$. Ahora, si $\nexists w \in W$, $w \neq *$, $/(*, w) \in \Re, w \vDash \neg\alpha$ al realizar la revisión por α caería $\Diamond\neg\alpha$. Si modificamos la relación de todas las estructuras que incorporamos de manera tal que cada una de ellas presente al menos un mundo relacionado con el centro donde valga $\neg\alpha$, logramos que $\Diamond\neg\alpha$ no caiga. También podríamos considerar que la caída de $\Diamond\neg\alpha$ es razonable, dado que la única razón para que se sostuviera es la veracidad de $\neg\alpha$ en el mundo centrado. La definición de la función de selección que daremos posteriormente definirá cuál de los dos caminos se tomará.

5.3.2. Proposiciones modales con operador $\Diamond$ ($\Diamond\alpha$)

El caso no trivial de $K * \Diamond\alpha$ es aquel donde $\neg\Diamond\alpha \in K$. Por lo tanto, necesitamos que en cada estructura del nuevo conjunto de modelos, exista al menos un mundo relacionado al mundo centrado donde valga α. Es decir, dada $M_c \in \|K\|$ tal que $M_c = \langle W, *, \Re, \models\rangle$ las estructuras más cercanas serán $M'_c = \langle W, *, \Re', \models\rangle$, donde en cada M'_c tendremos un mundo w tal que $*\Re w$ y $w \vDash \alpha$. Podríamos ver al nuevo conjunto de estructuras como una copia de cada una de las estructuras anteriores, agregando un α mundo relacionado para realizar el mínimo cambio incorporando la proposición modal.

5.3.3. Proposiciones modales con operador $\Box$ ($\Box\alpha$)

En este caso, la revisión es una operación más profunda. Las estructuras que debemos seleccionar deben ser α estructuras donde en todo mundo relacionado con el mundo centrado valga α. Por lo tanto, $M_c = \langle W, *, \Re, \models\rangle$ será reemplazado por el más cercano $M'_c = \langle W, *', \Re', \models\rangle$ donde $*' \vDash \alpha$ y $\forall w \in W/(*, w) \in \Re', w \vDash \alpha$.

Presentadas las intuiciones anteriores, pasaremos a definir los elementos necesarios para establecer una relación de orden y funciones de cercanía entre estructuras.

6. Propuestas para nociones de cercanía y orden entre estructuras

Como planteamos en los capítulos anteriores, tanto en las operaciones de contracción como de revisión es necesario contar con algún mecanismo que nos permita seleccionar las estructuras que, al ser incorporadas al conjunto de estructuras del agente, provoquen el mínimo cambio en su conjunto de creencias. Para esto tenemos que poder definir un orden entre estructuras que refleje la cercanía con respecto a una o más estructuras determinadas. Y también plantearemos una definición de orden entre estructuras con respecto a un conjunto de estructuras.

Este no es un tema nuevo dentro de los modelos de cambios de creencias. En general, el objetivo siempre es el mismo: poder definir una función de selección que nos permita realizar la contracción o revisión con el mínimo cambio posible. Haremos una revisión de las nociones ya existentes y luego presentaremos una función de cercanía y una relación de orden propias. Utilizaremos en todos los casos el concepto de estructura como modelo de un conjunto de proposiciones modales y no modales K. Llamamos M al conjunto de todas las estructuras.

6.1. Concepto de cercanía de Spohn sobre el sistema de esferas de Grove

Un sistema de esferas S^K para una teoría K es un subconjunto de $\mathcal{P}(M)$, tal que contenga a M, totalmente ordenado bajo inclusión de conjuntos, siendo $\|K\|$ el mínimo elemento de S^K en una relación de $\subseteq$. Un sistema de esferas S^K está bien fundado si la relación $\subseteq$ establece un orden bien fundado en S^K, es decir, si no tiene secuencias decrecientes infinitas.
Spohn suma a estos conceptos una función ordinal $k : M \mapsto O$ que decora con ordinales los mundos de las esferas de Grove. La define de la siguiente manera:

Observación 29. *Para todo sistema de esferas bien fundado S^K existe una función ordinal k_K tal que:*

$$k_K(M_c) < k_K(M'_c) \text{ sii } (\exists S_1, S_2 \in S^K)(M_c \in S_1, M'_c \in S_2 \text{ y } S_1 \subset S_2), \text{ y}$$

$k_K(M_c) = k_K(M'_c)$ *sii* $(\forall S_i \in S^K)(M_c \in S_i \Leftrightarrow M'_c \in S_i)$

Podemos extender k a los subconjuntos de M de la siguiente manera: definimos $k_K : \mathcal{P}(M) \mapsto O$ como:

$$k_K(X) = \begin{cases} min\{k_K(M_c) : M_c \in X\} & \text{, if } X \neq \emptyset \\ 0 & \text{, if } X = \emptyset \end{cases}$$

Como vemos, esta propuesta de orden y cercanía basadas en los conceptos de Grove y Spohn provee una noción de distancia de teorías a estructuras: Si $k_K(M_c) < k_K(M'_c)$ M_c está más cerca que M'_c o es más consistente con respecto a la teoría K.

6.2. Concepto de cercanía de Katsuno y Mendelzon

Katsuno y Mendelzon en [KM91] presentan una operación de cambio, de nombre *update*, que consiste en actualizar la base de conocimientos cuando el mundo descripto por la misma sufre cambios. En la definición del operador de update, se describen dos reglas que caracterizan el cambio mínimo en dicha operación. Para demostrar que el operador cumple con esas reglas, se define un orden entre interpretaciones, que es el que nos interesa presentar para acercarnos al concepto de orden y cercanía de este trabajo.

Para comenzar, los autores consideran en [KM91] un lenguaje proposicional finito L, denotando al conjunto de todas las letras proposicionales de L con el símbolo Ξ. Como el lenguaje es finito, se puede representar a una base de creencias con una fórmula ψ. Una *interpretación* de L es una función de Ξ a $\{T, F\}$. Un modelo de una fórmula proposicional ψ es una interpretación que hace a ψ verdadera en el sentido usual. $Mod(\psi)$ denota el conjunto de todos los modelos de ψ. Si la base de creencias ψ es inconsistente, $Mod(\psi) = \emptyset$. Una fórmula proposicional ψ se dice completa si para cualquier fórmula proposicional μ, ψ implica μ o ψ implica $\neg\mu$.

Llamemos Υ el conjunto de todas las interpretaciones de L. Un preorden $\leq$ sobre Υ es una relación reflexiva y transitiva sobre Υ. Definimos $<$ como $I < I'$ si y sólo si $I \leq I'$ y $I' \nleq I$. El preorden es total si para todo

$I, J \in \Upsilon$, $I \leq J$ o $J \leq I$. Consideremos una función que asigna a cada fórmula proposicional ψ un preorden $\leq_\psi$ sobre Υ. Decimos que este orden es *fiable* (también utilizan el término *persistente*) si se dan las siguientes condiciones:

- Si $I, I' \in Mod(\psi)$ entonces $I \not<_\psi I'$.
- Si $I \in Mod(\psi)$ y $I' \notin Mod(\psi)$ entonces $I <_\psi I'$.
- Si $\psi \equiv \phi$ entonces $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Por último, Katsuno y Mendelzon definen el conjunto minimal de un conjunto de interpretaciones con respecto a una fórmula. Dado $M \in \Upsilon$. Una interpretación I es minimal en M con respecto a $\leq_\psi$ si $I \in M$ y no hay $I' \in M$ tal que $I' <_\psi I$. Se define $Min(M, \leq_\psi)$ como el conjunto de todas las $I \in M$ tal que I es minimal en M con respecto a $\leq_\psi$.

En este modelo se asume un lenguaje proposicional clásico con un número finito de variables proposicionales, determinando un número finito de mundos posibles W. Por lo tanto, dado que W es nombrable, toda teoría es finitamente axiomatizable por una fórmula proposicional, y por lo tanto, todo preorden $\preceq$ en W es bien fundado. Katsuno y Mendelzon formalizan de esta manera una noción de cercanía entre mundos posibles, definiendo una función que mapea cada mundo w con un preorden total $\preceq_w$, tal que $v \preceq_w u$ si y sólo si v está al menos tan cerca de w como lo está u. Este orden determina que la operación de updating de w por A se realizará con los $A - mundos$ minimales en $\preceq_w$. Por otro lado, se requiere que cada $\preceq_w$ satisfaga la siguiente condición de centrado: Si $v \preceq_w w$ entonces $v = w$.

6.3. Concepto de cercanía de Becher y Areces

En [BA99], Becher y Areces redefinieron el modelo de update en un modelo basado en funciones ordinales. Dado que $\preceq_w$ es un preorden total bien fundado, podemos definir la función de la siguiente manera: $v \preceq_w u$ si y sólo si $k_w(v) \leq k_w(u)$. De esta manera se redefine la operación de update basándose en dicha función. A esta operación se la denomina *lazy update*. En el modelo de Katsuno y Mendelzon, una teoría es un conjunto de posibles escenarios. La operación de update busca por cada escenario que forma la teoría, el más cercano que incorpore la nueva información, y determina la teoría resultante como la información que es común a todos estos nuevos escenarios. Sin embargo, no todos los escenarios resultantes tienen el mismo grado de plausibilidad. Becher y Areces sugieren que un escenario es más plausible que otro, cuando se encuentra a menor distancia de la teoría que se está modificando. Para esto, determinan la siguiente definición de distancia:

Definición 30. ***(Distancia entre dos puntos)*** *Dado un modelo de update basado en funciones ordinales $M = \langle W, k_w : w \in W) \rangle$. Se define la función distancia $d : W \times W \mapsto O$ entre pares de mundos como el valor de w en $k_v : d(v, w) = k_v(w)$.*

También se extiende la definición anterior a distancia entre conjuntos, como el resultado de una doble minimización.

Definición 31. ***(Distancia entre dos conjuntos*** *Dado d una función de distancia obtenida del modelo ordinal de update $\langle W, k_w : w \in W \rangle$. Dado X, Y subconjuntos de W. Dada $f : W \mapsto O$ cualquier función positiva (mayor que 0). Se define:*

$$d(X,Y) = \begin{cases} min_{x \in X} min_{y \in Y} \{d(x,y)\} & \text{, if } X, Y \neq \emptyset. \\ min_{y \in Y} \{f(y)\} & \text{, if } X = \emptyset, Y \neq \emptyset. \\ 0 & \text{, if } Y = \emptyset. \end{cases}$$

A partir de esta definición, Becher y Areces definen la operación de *lazy update*, que funciona como un eslabón en el salto entre update y revisión.

6.4. Concepto de cercanía de Lehmann, Magidor y Schlechta

En [LMS99], los autores presentan la operación de revisión utilizando el concepto de pseudo-distancia.Este concepto difiere del de distancia en que sus valores no son necesariamente reales, no está definida la adición de valores y no se cumple necesariamente la simetría. Todo lo que se necesita es un conjunto de valores totalmente ordenados como se definen a continuación:

Recordemos que una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto de modelos X es un preorden, si y sólo si $\leq$ es reflexiva y transitiva. Si $\leq$ es total

($\forall x, y \in X, x \leq y$ or $y \leq x$), entonces $\leq$ es un preorden total y que una relación binaria $<$ sobre X es un orden total si y sólo si $>$ es transitiva e irreflexiva ($x \not< x$ para todo $x \in X$, y para todo $x, y \in X, x < y$ or $y > x$ or $x = y$).

Observación 32. *Si $\leq$ es un preorden total en X, $\simeq$ es la correspondiente relación de equivalencia definida por $x \simeq y$ si y sólo si $x \leq y$ e $y \leq x$, $[x]$ es la clase de $\simeq$-equivalencia de x, y definimos $[x] < [y]$ si y sólo si $x \leq y$, pero no $y \leq x$, entonces $<$ es un orden total sobre $\{[x] : x \in X\}$.*

Definición 33. *Definimos la función $d : U \times U \mapsto Z$ llamada pseudodistancia en U si y sólo si Z está totalmente ordenado por una relación $<$ acíclica y transitiva. Si además, Z tiene primer elemento y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$, decimos que d respeta identidad. Por último, si $d(a, b) = d(b, a)$, la función es simétrica.*

A continuación presentamos la noción de cercanía basada en la función de distancia dada. Para esto se define la operación $A|_d B$ siendo A y B conjunto de modelos, que nos dará como resultado los modelos de B más cercanos a A según la función de distancia d.

Definición 34. *Dado $d : U \times U \mapsto Z$ y $A, B \subseteq U$, $A|_d B = \{b \in B : \exists a_b \in A, \forall a' \in A, \forall b' \in B. d(a_b, b) \leq d(a', b')\}$.*

6.5. Concepto de cercanía de Dalal

Mukesh Dalal [Dal88] utiliza como método de comparación el número de letras proposicionales en que difieren dos interpretaciones. Veamos algunas definiciones previas necesarias para presentar los conceptos de Dalal.

Definición 35. *Sean I y J dos interpretaciones. Entonces la diferencia entre I y J se define como $Dif(I, J) = (I - J) \cup (J - I)$. Luego $I_1 \leq_J I_2$ si y sólo si $Dif(I_1, J) \subseteq Dif(I_2, J)$.*

Dada la distancia entre modelos, veamos la distancia entre un modelo y un conjunto de modelos.

Definición 36. *Sea N un conjunto de interpretaciones y J una interpretación. Entonces la diferencia entre N y J se define como $Dif(N, J) = \cup_{I \in N} Dif(I, J)$.*

Por último, antes de presentar la definición de Dalal, veamos la distancia entre conjunto de modelos.

Definición 37. *Sean N_1 y N_2 conjuntos de interpretaciones. Entonces, la diferencia entre N_1 y N_2 se define como $Dif(N_1, N_2) = \cup_{I \in N_2} Dif(N_1, I)$.*

Como dijimos anteriormente, Dalal compara modelos por las letras proposicionales en las que difieren entre sí. Esta medida de distancia induce un ordenamiento entre interpretaciones de la siguiente manera: la distancia entre dos interpretaciones I y J $Dist(I, J)$ corresponde exactamente a $Dif(I, J)$. Luego se define la distancia entre los modelos de Φ y una interpretación I como la menor distancia entre I y las interpretaciones J que son modelos de Φ:

$$Dist(Mod(\Phi), I) = Min_{J \in Mod(\Phi)}(Dif(J, I))$$

6.6. Selección de los modelos más cercanos a un conjunto de modelos

Hemos visto diversas nociones de distancia entre mundos o estructuras. Pero sólo en el caso de Becher y Areces, y de Dalal, se presenta una propuesta sobre la forma de definir la distancia desde un modelo a un conjunto de modelos. Nuestro interés está dado en que tanto la operación de contracción como la operación de revisión utilizan una función de selección para determinar los modelos a incorporar. Esa función de selección puede utilizar en forma subyacente un concepto de cercanía entre el conjunto de modelos de K y los modelos que serán incorporados. Es por eso que deseamos ver cómo las nociones de distancia presentadas pueden ser utilizadas para una función de selección de este tipo.

Usar la noción de distancia para la función de selección puede expresarse en la contracción por α como la búsqueda de los $\neg\alpha$ modelos más cercanos y en la revisión por α, la de los α modelos más cercanos. En la literatura relacionada con el cambio de creencias hay diversas propuestas de uso de la noción de distancias. Dos de las más populares son las siguientes (llamamos φ a la fórmula por la cual se contrae o revisa):

- Dado un orden entre modelos, por cada modelo del conjunto, tomar el φ-modelo más cercano y definir el conjunto con la unión de todos esos modelos. Es decir, dado N un conjunto de modelos y φ, para cada $M \in N$ hallar M' tal que $M' \vDash \varphi$ y $\forall M''$ tal que $M'' \vDash \varphi$, $M' \preceq_N M''$

- Dado un orden entre modelos a partir de un conjunto de modelos, tomar los φ-modelos minimales de ese orden. Si el orden no es total, obtendremos un conjunto de modelos. El conjunto resultado sería la unión de esos modelos.

Además, luego de haber realizado esta selección de los modelos más cercanos, podemos aplicar otras funciones que permitan refinar aún más dicha selección.

Habiendo hecho una revisión sobre los diversos conceptos de cercanía y orden entre modelos, pasaremos a presentar nuestra propuesta para definir un orden que nos permita realizar la función de selección para las operaciones de contracción y revisión.

6.7. Nuestra propuesta de cercanía y orden entre modelos centrados

En nuestro caso, nuestro objetivo es definir una función de cercanía que determine la distancia sobre dos aspectos: la diferencia entre mundos centrados y la diferencia entre las relaciones del mundo centrado con los otros mundos, lo que define la valuación de las proposiciones modales. Es nuestra intención presentar una definición lo suficientemente abierta de manera tal que se pueda construir sobre ella funciones más precisas que se ajusten al modelo que se desee definir.

Definamos en primer caso la relación de equivalencia entre dos estructuras centradas:

Definición 38. *Dados* $M_c = \langle W, *, \Re, \vDash \rangle$ *y* $M'_c = \langle W, *', \Re', \vDash' \rangle$, $M_c \simeq M'_c$ *si y sólo si* $Th(M_c) = Th(M'_c)$.

Demos ahora una noción de diferencia entre estructuras centradas:

Definición 39. *Dados* $M_c = \langle W, *, \Re, \vDash \rangle$ *y* $M'_c = \langle W, *', \Re', \vDash' \rangle$, *la función* $Dif : M \times M \mapsto \mathcal{P}(L)$ *se define como* $Dif(M_c, M'_c) = Th(M_c) - Th(M'_c)$.

A continuación definiremos diferencia entre un conjunto de estructuras y una estructura:

Definición 40. *Dados N conjunto de estructuras y M_c estructura, la función $DifN : \mathcal{P}(M) \times M \mapsto \mathcal{P}(L)$ y se define como $Dif(N, M_c) = Th(N) - Th(M_c)$.*

Con esta definición podemos establecer una relación de preorden entre estructuras con respecto a un conjunto de estructuras:

Definición 41. *Dadas las estructuras M_c y M'_c y un conjunto de estructuras N, $M_c \preceq_N M'_c$ si y sólo si $DifN(N, M_c) \subseteq DifN(N, M'_c)$.*

Teorema 42. *Dado un conjunto de estructuras N, la relación $\preceq_N$ es de preorden y es parcial.*

Demostración:

- Reflexividad: Dado N y M_c, $DifN(N, M_c) = DifN(N, M_c)$ y por lo tanto $DifN(N, M_c) \subseteq DifN(N, M_c)$.
- Transitividad: Dado que la relación $\subseteq$ es transitiva, $\preceq_N$ también lo es.
- Parcial: Dado N tal que $Th(N) = Cn(\{\alpha, \beta\})$, y dados M_c y M'_c tal que $M_c \vDash \alpha$, $M_c \nvDash \beta$, $M'_c \vDash \beta$ y $M'_c \nvDash \alpha$, tenemos que $\beta \in DifN(N, M_c)$, $\alpha \notin DifN(N, M_c)$, $\alpha \in DifN(N, M'_c)$ y $\beta \notin DifN(N, M'_c)$. Por lo tanto, $M_c \npreceq_N M'_c$ y $M'_c \npreceq_N M_c$.
- No antisimétrica: podemos tener M_c, M'_c igual en su mundo centrado, equivalentes según la definición 38 pero sin embargo diferentes en sus relaciones. $M_c \preceq_N M'_c$ y $M'_c \preceq_N M_c$ y sin embargo ser distintos.

De esta manera ya podemos definir una relación de preorden entre estructuras con respecto a un conjunto de creencias K:

Definición 43. *Dadas las estructuras M_c y M'_c y un conjunto de creencias K, $M_c \preceq_K M'_c$ si y sólo si $DifN(\|K\|, M_c) \subseteq DifN(\|K\|, M'_c)$.*

En este punto nos tenemos que detener a analizar si el orden que acabamos de definir es un orden bien fundado, es decir, si no existen secuencias decrecientes infinitas. El motivo de nuestro interés está dado porque en el próximo paso de la definición de la función de selección, utilizaremos las estructuras minimales según ese orden.

Previamente es necesario presentar el siguiente concepto:

Definición 44. *Dado un conjunto de proposiciones H cerrado bajo consecuencia lógica, definimos $ModCn(H) : \mathcal{P}(L) \mapsto \mathcal{P}(L)$ a un subconjunto H' de H tal que $Cn(H') = H$ y no existe $H'' \subset H'$ tal que $Cn(H'') = H$. Llamamos a esta función* módulo consecuencia lógica*.*

Dado un conjunto de creencias K, el orden definido en 43 es bien fundado, si dada cualquier estructura M_c, $DifN(\|K\|, M_c)$ es finito.

Tenemos dos casos en los cuales es trivial ver que esto ocurre:

- Si el lenguaje L es finito.
- Si $ModCn(K)$ es finito.

Demostrar que el orden es bien fundado en los casos no triviales queda abierto para futuros trabajos.

Por lo tanto, dado K y el orden definido en 43 bien fundado, podemos obtener un conjunto de estructuras que son las minimales en la relación de preorden con respecto a $\|K\|$:

Definición 45. *Dado K y un conjunto de estructuras N, definimos $Min(K, N) = \{M_c : M_c \in N$ y $\nexists M'_c \in N$ tal que $M'_c \preceq_K M_c\}$.*

El conjunto resultante de la función Min puede dividirse en grupos de equivalencia según la relación planteada en la definición 38.

Definición 46. *Dado K, un conjunto de estructuras N y el conjunto de estructuras resultante de $Min(K, N)$, podemos clasificar dicho conjunto resultante de la siguiente manera: $Min(K, N) = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$, donde para todo M_c y M'_c pertenecientes a M_i, $M_c \simeq M'_c$.*

Por lo tanto, tenemos todas las herramientas necesarias para definir la función de selección propuesta en las operaciones de cambio:

Definición 47. *Dado un conjunto de creencias K y una fórmula α, definimos $\zeta_K : L \mapsto \mathcal{P}(M)$ como $\zeta_K(\alpha) = M_i \in Min(K, \|\alpha\|)$.*

Finalmente, el conjunto de estructuras a incorporar en una contracción o en una revisión, es una de las clases de estructuras del conjunto de estructuras que satisfacen la fórmula por la cual se hace la operación y que se encuentran más cerca de K.

Volvamos al problema de saber si el orden definido en 43 es bien fundado en el caso de que $ModCn(K)$ fuera infinito. Si estuviéramos trabajando con teorías clásicas, es decir, con proposiciones no modales, dado que α es una fórmula, y por lo tanto es finita, tendríamos un subconjunto de las estructuras de $\|\alpha\|$ tal que la diferencia en teoremas con K sería finita. De esa manera, la relación de orden entre ese subconjunto de estructuras es bien fundada, y por lo tanto, encontraremos un mínimo.

En nuestro caso, trabajando con teorías modales, no nos queda claro si ocurre lo mismo con las proposiciones modales. Dejamos este punto como un posible trabajo futuro.

Demostraremos a continuación que la función de selección definida cumple con las cuatro propiedades deseadas que se describieron en la sección 4:

Teorema 48. *La función de selección ζ_K cumple las siguientes propiedades:*

1. $\zeta_K(\alpha) \subseteq \|\alpha\|$.
2. *Si* $\neg\alpha \notin K$ *entonces* $\zeta_K(\alpha) \subseteq \|K\|$.
3. *Si* $\alpha \in K$ *entonces* $\|K\| \subseteq \zeta_K(\alpha)$.
4. *Si* $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, *entonces* $\zeta_K(\alpha) = \zeta_K(\beta)$.

Demostración:

1. Si $M_c \in \zeta_K(\alpha)$ entonces, $M_c \models \alpha$ por definición. Por lo tanto, $M_c \in \|\alpha\|$.

2. Si $K = \emptyset$, es trivial porque $\|\emptyset\| = M$, representando con M al conjunto de todas las estructuras. Si K no es vacío, existen α estructuras en $\|K\|$. ¿Existe en este caso alguna estructura perteneciente a $\zeta_K(\alpha)$ que no pertenezca a $\|K\|$?. Las α estructuras de $\|K\|$ tienen una distancia $DistN(\|K\|, M_c) = \emptyset$. Por lo tanto, aquella estructura que estamos buscando debe definir una distancia con $\|K\|$ también igual a $\emptyset$, ya que en caso contrario no sería de distancia mínima, y por lo tanto no pertenecería al conjunto de estructuras devuelto por la función. Ahora, ¿puede existir una estructura con distancia $\emptyset$ a $\|K\|$ y que no pertenezca a $\|K\|$? Para que la distancia sea vacía, $\forall \alpha \in K, M_c \models \alpha$. Y por lo tanto, $M_c \in \|K\|$.

3. Si $\alpha \in K$, entonces todas sus estructuras son α estructuras. Y dado que la distancia de cada una de ellas con respecto a $\|K\|$ es $\emptyset$ entonces tienen distancia mínima y por lo tanto pertenecen a $\zeta_K(\alpha)$.

4. Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, todas las α estructuras son β estructuras. Por lo tanto, las estructuras consideradas minimales en su distancia con K con respecto a una fórmula α, como también son β estructuras, son minimales en su distancia con K con respecto a una fórmula β.

6.8. Completitud de la función de selección

En [Gär88] encontramos la definición de resto, definido de la siguiente manera: llamamos resto a un conjunto de creencias X que es un subconjunto maximal de K y que no implica a α si y sólo si:

- X es un subconjunto de K.
- $\alpha \notin Cn(X)$.
- $\nexists X'/X \subset X' \subseteq K$ y $\alpha \notin Cn(X')$.

Al conjunto de todos los restos se lo denomina conjunto resto: $K \perp \alpha = \{X/X \text{ es un resto}\}$.

Antes de continuar, presentaremos un teorema que nos será de ayuda más adelante:

Teorema 49. *Dado un conjunto de creencias K y un subconjunto $X \subseteq K$, podemos encontrar una estructura M_c tal que $X = Th(\|K\| \cup M_c)$.*

Demostración: Dado X, tomamos una estructura M_c tal que:

- $\forall \alpha \in X$, $M_c \vdash \alpha$.
- $\forall \beta \notin X$, $M_c \nvdash \beta$.

Veamos que esta estructura cumple con la igualdad. Si $\alpha \in X$, entonces $\alpha \in K$ y por lo tanto, $\|K\| \vdash \alpha$. Además, si $\alpha \in X$, por construcción, $M_c \vdash \alpha$. Por lo tanto, $\alpha \in Th(\|K\| \cup M_c)$. Por otra parte, si $\alpha \notin X$, por construcción, $M_c \nvdash \alpha$. Y por lo tanto, $\alpha \notin Th(\|K\| \cup M_c)$.

Ahora veremos que podemos encontrar una equivalencia entre los conjuntos resto y la función de selección planteada.

Teorema 50. *$\exists M_c \in min(K, \|\neg\alpha\|)/X = Th(\|K\| \cup M_c) \Leftrightarrow X \in K \perp \alpha$.*

Demostración:

- $\Rightarrow$) Demostraremos que X cumple las tres propiedades de un conjunto resto.
  - $\|K\| \subseteq \|K\| \cup M_c \Rightarrow Th(\|K\| \cup M_c) \subseteq Th(\|K\|) \Rightarrow X \subseteq K$.
  - Dado que $M_c \nvdash \alpha$ entonces $\alpha \notin Th(\|K\| \cup M_c)$ y por lo tanto, $\alpha \notin X$.
  - Supongamos que esta propiedad no se cumple, es decir, tenemos un X' tal que $X \subset X' \subseteq K$ y $\alpha \notin Cn(X')$. Dado este X', por el teorema 49 podemos encontrar un M'_c tal que $X' = Th(\|K\| \cup M'_c)$. Si $\alpha \in X \Rightarrow \alpha \in X'$. Entonces, si $\alpha \in Th(\|K\| \cup M_c) \Rightarrow \alpha \in Th(\|K\| \cup M_c)$. Por lo tanto, si $\|K\| \vdash \alpha$ y $\|M_c \vdash \alpha \Rightarrow \|K\| \vdash \alpha$ y $M'_c \vdash \alpha$. Entonces, si $M_c \vdash \alpha \Rightarrow M'_c \vdash \alpha$. De esta manera, tenemos que $Th(M_c) \subseteq Th(M'_c) \Rightarrow Th(\|K\|) - Th(M'_c) \subseteq Th(\|K\|) - Th(M_c) \Rightarrow DifN(K, M'_c) \subseteq DifN(K, M_c) \Rightarrow M'_c \preceq_K M_c$. Pero como $M_c \in Min(K, \|\neg\alpha\|)$ esto es imposible. Por lo tanto, la propiedad se cumple.Es decir, $\nexists X'/X \subset X' \subseteq K$ y $\alpha \notin X'$.

- $\Leftarrow$) Dado $X \in K \perp \alpha$, por el teorema 49 encontramos una estructura M_c tal que $X = Th(\|K\| \cup M_c$. Debemos demostrar que $M_c \in min(K, \|\neg\alpha\|)$. Supongamos que no es así. Entonces, $\exists M'_c / M'_c \preceq_K M_c \Rightarrow DifN(\|K\|, M'_c) \subseteq DifN(\|K\|, M_c) \Rightarrow Th(\|K\|) - Th(M'_c) \subseteq Th(\|K\|) - Th(M_c) \Rightarrow Th(M_c) \subseteq Th(M'_c) \Rightarrow Th(\|K\| \cup M_c) \subseteq Th(\|K\| \cup M'_c)$. De esta manera, tenemos un $X' = Th(\|K\| \cup M'_c)$ tal que $X \subset X'$ y por lo tanto, $X \notin K \perp \alpha$, lo que se contradice con nuestros supuestos.

De esta manera, hemos demostrado la equivalencia entre los conjuntos resto y los conjuntos que se definen mediante la función de selección.

Por otra parte, Gardenförs define una función de selección $S(K \perp \alpha)$ que según los elementos que me devuelva, determina el tipo de contracción que se producirá utilizando dicha función. Esta función de selección, definida como $S(K \perp \alpha)$ es equivalente a nuestra función de selección. Es decir, $S(K \perp \alpha) = Th(\|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha))$.

Por lo tanto, gracias al teorema 4.13 en [Gär88] podemos ver que si una contracción satisface los postulados (K-1) a (K-6) podemos encontrar una función ζ_K que defina esa contracción.

6.9. Verificación del cumplimiento de los postulados 7 y 8 de la contracción y de la revisión

Habiendo definido nuestra función de selección, verifiquemos si las operaciones de contracción y revisión basadas en esta función cumplen con los postulados 7 y 8 de AGM.

(K-7) Solapamiento conjuntivo: $K - \alpha \cap K - \beta \subseteq K - (\alpha \wedge \beta)$

(K-8) Inclusión conjuntiva: Si $\alpha \notin K - (\alpha \wedge \beta)$ **entonces** $K - (\alpha \wedge \beta) \subseteq K - \alpha$

Primero demostraremos un teorema que necesitamos para probar $(K-7)$.

Teorema 51. *Dados K y H conjunto de creencias,* $\|K\| \cup \|H\| \subseteq \|K \cap H\|$.

Demostración: Si $M_c \in \|K\| \cup \|H\|$ entonces $\forall \alpha \in K, M_c \vDash \alpha$ o $\forall \beta \in H, M_c \vDash \beta$ con lo cual $\forall \gamma \in (K \cap H), M_c \vDash \gamma$, y por lo tanto, $M_c \in \|K \cap H\|$.

Teorema 52. *La operación de contracción presentada, basada en la función de selección ζ_K, cumple con* $(K-7)$.

Demostración:$K-\alpha \cap K-\beta \subseteq K-(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \|K-(\alpha \wedge \beta)\| \subseteq \|K-\alpha \cap K-\beta\|$. Si podemos demostrar que $\|K-(\alpha \wedge \beta)\| \subseteq \|K-\alpha\| \cup \|K-\beta\|$, por el teorema 51 quedaría demostrado el presente teorema. Entonces, $\|K-(\alpha \wedge \beta)\| \subseteq \|K-\alpha\| \cup \|K-\beta\| \Leftrightarrow \|K\| \cup \zeta_K(\neg(\alpha \wedge \beta)) \subseteq \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha) \cup \|K\| \cup \zeta_K(\neg\beta) \Leftrightarrow \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha \vee \neg\beta) \subseteq \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha) \cup \zeta_K(\neg\beta)$. Dado $M_c \in \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $M_c \in \|K\|$ o $M_c \in \zeta_K(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Lo que nos interesa ver es qué ocurre con las estructuras M_c que no pertenezcan a $\|K\|$. Si $M_c \in \zeta_K(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ entonces $M_c \vDash \neg\alpha$ o $M_c \vDash \neg\beta$ y es minimal con respecto a K. Por lo tanto, $M_c \in \zeta_K(\neg\alpha)$ o $M_c \in \zeta_K(\neg\beta)$ y es minimal con respecto a K. Por consiguiente, $M_c \in \zeta_K(\neg\alpha) \cup \zeta_K(\neg\beta)$.

Teorema 53. *La operación de contracción presentada cumple con* $(K-8)$.

Demostración: Dado α y K tal que $\alpha \notin K-(\alpha \wedge \beta)$ tenemos que demostrar que $K-(\alpha \wedge \beta) \subseteq K-\alpha$. Por lo tanto, $\|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha) \subseteq \|K\| \cup \zeta_K(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Entonces, tenemos que ver qué ocurre con las estructuras M_c tal que $M_c \in \zeta_K(\neg\alpha)$ y $M_c \notin \|K\|$. Dado que $\alpha \notin K-(\alpha \wedge \beta)$, entonces para que α caiga se incorporó un conjunto de $\neg\alpha$ estructuras que son minimales con respecto a K. Por lo tanto, el conjunto de $\neg\alpha$ estructuras que son minimales con respecto a K en la contracción por α también lo son en la contracción por $\alpha \wedge \beta$.

Demostrado el cumplimiento de $(K-7)$ y $(K-8)$ pasamos a los postulados de revisión:

(K*7) Superexpansión: $K*(\alpha \wedge \beta) \subseteq (K*\alpha)+\beta$

(K*8) Subexpansión: Si $\neg\beta \notin K*\alpha$ **entonces** $(K*\alpha)+\beta \subseteq K*(\alpha \wedge \beta)$

Dado que se cumplen $(K-7)$ y $(K-8)$, y que la operación de revisión está definida según la identidad de Levi, el teorema 3.3 de [Gär88] demuestra que $(K*7)$ y $(K*8)$ también se cumplen.

De esta manera, hemos terminado de presentar la definición de las operaciones de cambio en nuestro modelo, y demostramos que los postulados de racionalidad y las propiedades deseables de la función de selección se cumplen. En síntesis, hemos obtenido un modelo de cambio que nos permite incorporar proposiciones modales, enriqueciendo el lenguaje subyacente en la representación del conocimiento de los agentes. En la próxima sección presentaremos los temas que quedan abiertos para profundizar las características y alcances del modelo presentado.

7. Conclusiones

Habiendo desarrollado toda la propuesta, queremos sintetizar en esta sección cuáles son los aportes que presenta este trabajo para el problema planteado por el cambio de creencias sobre lógicas modales.

Antes que nada, se ha definido un modelo de representación del conocimiento que permite incorporar proposiciones modales, sin caer en la paradoja planteada por la imposibilidad de Fuhrmann. Como comentamos en la sección 2.1, la definición de $Poss$ es la que lleva a la paradoja en ese planteo, dado que al definir conjuntos maximales, es imposible obtener conjuntos mayores, por ejemplo, en una operación de expansión. La imposibilidad de representar el estado de incertidumbre sobre una proposición modal es la que nos termina conduciendo a contradicciones con postulados básicos de racionalidad en el cambio de creencias. En nuestro modelo, esto no ocurre.

Por otra parte, hemos demostrado la equivalencia entre el modelo centrado que proponemos, y los modelos estándares, permitiéndonos de esta manera trasladar las propiedades ya demostradas de este conjunto de modelos.

Una vez establecido el modelo de representación, hemos definido cómo se realizan las tres operaciones de cambio en este modelo y realizamos la comprobación de que las operaciones propuestas cumplen con los postulados de racionalidad planteados por los trabajos previos en este campo. Dado que las operaciones de contracción y de revisión se definen utilizando una función de selección, se ha planteado un conjunto de propiedades que deben cumplir las funciones de selección propuestas, en particular, la presentada en nuestro trabajo.

Y por último, definimos una relación de distancia entre los modelos centrados con respecto al conjunto de modelos que determinan el conjunto de creencias que se modifica, para poder establecer un orden, y a partir de allí una selección de los modelos que definen el nuevo conjunto de creencias. En esta relación de distancia se muestra que no sólo las proposiciones que satisface el mundo centrado de la estructura definen la misma, sino que la relación planteada dentro de la estructura es fundamental a la hora de establecer el valor de verdad de las proposiciones modales. Por lo tanto, las operaciones de cambio pueden modificar tanto el mundo centrado como las relaciones de éste con otros mundos posibles para respetar el principio de minimalidad en el cambio (en realidad las estructuras no se modifican, sino que se agregan o se cambian por las estructuras más cercanas, pero esta operación se puede pensar como una modificación de la estructura).

Finalmente, dada la función de selección demostramos que las propiedades deseadas que se plantearon eran satisfechas, y que las operaciones de cambio basadas en dicha función de selección cumplen con otros principios de racionalidad del cambio de creencias.

8. Futuros trabajos posibles

A continuación presentaremos los diversos aspectos en los cuales se pueden desarrollar trabajos que tomen como base a la presente tesis.

Orden entre estructuras equivalentes según $\Re$. En la definición de la función de selección planteada en la sección 6, obtenemos un conjunto de estructuras que es equivalente entre sí según la definición 38. Sin embargo, en ningún momento nos detuvimos directamente en la relación determinada por $\Re$ en la estructura para definir el preorden que permitió establecer la función de selección. Y aun siendo equivalentes, pueden diferir en dicha relación. Esto nos permitiría definir un orden entre estructuras equivalentes con respecto a un conjunto de creencias K según $\Re$. Y por lo tanto, podríamos definir una nueva función de selección, que del conjunto de estructuras devuelto por $\zeta_K(N)$, tome aquellas que sean más cercanas a K por su relación.

Para definir un orden de estructuras según $\Re$ debemos establecer una noción de distancia entre ellas. Este tema es el que queda abierto para futuros trabajos. Por ejemplo, dados $M_c = \langle W, *, \Re, \models \rangle$ y $M'_c = \langle W, *, \Re', \models \rangle$, podríamos analizar los siguientes aspectos:

- Los pares pertenecientes a $\Re$ que no estén presentes en $\Re'$.
- Por cada proposición modal perteneciente a ambas estructuras (recordamos que son equivalentes) tomar los pares de $\Re$ que entraron en juego para determinar el valor de verdad de dicha proposición modal que no estén presentes en $\Re'$. Realizar la unión de todas esas relaciones.

A partir de esta definición, se deberían desarrollar definiciones de distancia entre una estructura y un conjunto de ellas, y de esta manera establecer un orden de cercanía aún siendo equivalentes a nivel de las proposiciones satisfechas. A partir de este punto, se podría definir una nueva función de selección.

Comparación con otros modelos de cambio y verificación de cumplimiento de propiedades. En esta tesis sólo se presentaron los modelos de cambio basados en distancia. Creemos que sería interesante comparar las operaciones definidas en este trabajo con otras propuestas de operaciones de cambio, analizando las posibilidades de cambios iterados, modelización con bases de creencias en vez de conjuntos, operaciones múltiples y otros aspectos que podemos encontrar en el estado actual de la teoría de cambio.

Desarrollo de sistemas formales para la modelización de sistemas Como comentamos en la introducción, el uso de lógicas modales para la modelización de cierto tipos de sistemas ha alcanzado alta aceptación. Por ejemplo, en sistemas basados en algoritmos concurrentes u otros que necesiten especificación de requisitos temporales. Un trabajo interesante a desarrollar es diseñar herramientas de especificación formal para este tipo de sistemas que incorporen cambios de creencias . Por otra parte, también se podría desarrollar modelos para representar los cambios que se producen en el ciclo de vida del software. De esta manera, el mantenimiento y la reusabilidad de software contarían con herramientas que podrían controlar y predecir de manera precisa, por ejemplo, errores posibles.

Demostrar que el preorden planteado en la definición 43 es bien fundado En la sección 6 hemos demostrado que el preorden planteado es bien fundado en el caso de que el lenguaje fuera finito o que el módulo consecuencia lógica del conocimiento del agente fuera finito. Pero quedó sin demostrar que en todos los casos el preorden presentado es bien fundado.

Referencias

[AGM85] C. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[BA99] Verónica Becher and Carlos Areces. Iterated revision in the spirit of update: A lazy update, 1999.

[CES86] E. Clarke, E. Emerson, and A. Sistla. Automatic verification of finite-state concurrent systems using temporal logic specifications. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 8(2), 1986.

[Che80] Brian F. Chellas. *Modal Logic: an introduction.* Cambridge University Press, 1980.

[Dal88] Mukesh Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: Preliminary report. In *Seventh National Conference on Artificial Intelligence*, pages 475–479, 1988.

[DP94] Didier Dubois and Henri Prade. A survey of belief revision and updating rules in various uncertainty models. *International Journal of Intelligent Systems*, 9:61–100, 1994.

[Fal99] Marcelo Alejandro Falappa. *Teoría de Cambio de Creencias y sus Aplicaciones sobre Estados de Conocimiento.* PhD thesis, Departamento de Ciencias de la Computación - Universidad Nacional del Sur, 1999.

[Fuh89] A. Fuhrmann. Reflective modalities and teory change. *Synthese*, 81:115–134, 1989.

[Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in Flux.* MIT Press, 1988.

[GRR99] Dov Gabbay, Odinaldo Rodrigues, and Alessandra Russo. Revision by translation (short version). In *JFAK. Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday.* Amsterdam University Press, 1999.

[Han99] Sven Ove Hansson. *A Textbook of Belief Dynamics: Theory Change and Database Updating.* Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Jan90] Ramón Jansana. *Una introducción a la lógica modal*. Tecnos, 1990.

[KM91] Hirofumi Katsuno and Alberto Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In James F. Allen, Richard Fikes, and Erik Sandewall, editors, *KR'91: Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 387–394. Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1991.

[Kri63] Saul A. Kripke. Semantical analysis of modal logic. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.

[Lam94] L. Lamport. The temporal logic of actions. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 16(3), 1994.

[LMS99] Daniel Lehmann, Menachem Magidor, and Karl Schlechta. Distance semantics for belief revision, 1999.

[Pnu77] A. Pnueli. The temporal logic of programs. In *Proceedings of the 18th. Annual Symposium on the Foundations of Computer Science.*, New York, 1977. IEEE.