

Tesis de Licenciatura

# **Grafos biclique irreducibles**

Martiniano Roberto Eguía  
meguia@dc.uba.ar

**Director**

Dr. Francisco Juan Soullignac

Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Computación

25 de octubre de 2013

## RESUMEN

Un grafo es clique irreducible si toda clique tiene una arista, llamada propia, que no pertenece a ninguna otra clique. El problema de reconocimiento de la clase es polinomial, ya que basta recorrer las cliques verificando que tienen aristas propias, y la cantidad de cliques recorridas está acotada por la cantidad de aristas. Sin embargo, no se conoce ninguna caracterización que tenga en cuenta propiedades estructurales inherentes a la clase. La subclase hereditaria, formada por los grafos clique irreducible hereditarios, coincide con la clase de grafos clique-Helly hereditarios. Motivados por estas definiciones, introducimos los grafos biclique irreducibles como aquellos en los que cada biclique tiene una arista que no pertenece a ninguna otra biclique. En este trabajo, estudiamos los grafos biclique irreducibles y los grafos biclique irreducible hereditarios. Obtenemos caracterizaciones estructurales y algorítmicas para los grafos bipartitos biclique irreducibles y caracterizamos la clase de grafos biclique irreducible hereditarios por subgrafos inducidos prohibidos.

## ABSTRACT

A graph is clique irreducible if every clique has an edge that belongs to no other clique, called a proper edge. The recognition problem takes polynomial time, because it is enough to list its cliques while looking for the proper edge, and the number of traversed cliques is bounded by the number of edges. However, there is no known characterization about structural properties of the class. The hereditary subclass, composed by the hereditary clique irreducible graphs, is exactly the class of clique-Helly graphs. Motivated by these definitions, we introduce biclique irreducible graphs as those graphs such that every biclique has an edge that belongs to no other biclique. In this work, we study biclique irreducible and hereditary biclique irreducible graphs. We propose structural and algorithmic characterizations for bipartite biclique irreducible graphs, and characterize the hereditary biclique irreducible graphs by forbidden induced subgraphs.

*A mis papás Alicia y Roberto.  
A Jimena y Belén.*

# Agradecimientos

Debo agradecer a mi familia. Mis papás Alicia y Roberto me dieron todo. Se que sienten el amor que les tengo porque me lo devuelven multiplicado. Jimena es mi hermana y fue mi compañera de estudio durante mucho tiempo. ¡Vamos, que falta poco! Ramona, mi abuela, puede estar segura que es parte de todo esto. Quiero también dedicar este trabajo a la memoria de mis abuelos Roberto, Margarita y Rafael porque bastante seguido los veo en mí. Y al resto de la Familia, mis tíos y primos. Todos juntos.

A la Universidad de Buenos Aires estoy muy agradecido por muchas cosas, pero lo mejor que me dio fue Belén. Ayer estábamos esperando el colectivo juntos después de Pensamiento Científico y hoy me cebó unos mates en el desayuno. Le agradezco a ella estar este hermoso tiempo juntos.

Quiero agradecerle a mi director Francisco porque desde Algo 2 que me está ayudando con esto. El año y poco que me lleva confirma que es la experiencia la que hace la sabiduría. Mostro, gracias por todo. En especial, la paciencia. Agradezco también a Marina, quien con su trabajo, fue la motivadora de esta tesis.

Durante estos años de estudio me divertí mucho y quiero agradecer a mis compañeros por eso. En particular quiero nombrar a Alejandro, Maxi, Jona, Adrián, Flor, Alex, Gabi y Damián.

Escribir esta tesis fue más fácil con la alegría y la motivación de Leandro, Juan Pablo y Fernando. Y con todos los habitantes del Cuarto 1.

El lugar en donde estudio, la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, es excepcional. Soy de veras feliz pisando exágonos. Gracias a todos los docentes por el esfuerzo de hacer un ambiente hermoso. Valoro mucho su dedicación y la estima y respeto con que nos tratan a los alumnos.

Creo que una parte grande de la Argentina es su educación. A su vez, una amplia porción de ello se debe a esta Facultad. Personas como García, Sadosky, Spivakow y todos los que formaron parte de la Época de Oro han sido de gran inspiración para mí. Aunque haya pasado mucho tiempo, llovido, granizado y vuelto a llover, sigue marcado el camino.

Agradezco también a todos los que no nombré y me ayudaron. Porque me costó bastante llegar a este punto y de verdad no hubiera podido solo. A todos mis compatriotas, gracias por la gauchada. ¡Viva mi Patria Argentina!

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Definiciones . . . . .	9
<b>2. Grafos biclique irreducibles</b>	<b>11</b>
2.1. Reconocimiento naif . . . . .	11
2.2. Propiedades básicas . . . . .	12
<b>3. Grafos bipartitos biclique irreducibles</b>	<b>15</b>
3.1. Grafos con oposiciones duales . . . . .	16
3.2. Digrafo de opuestos . . . . .	18
3.3. Digrafos transitivos de opuestos . . . . .	20
3.4. Bicliques en el digrafo de oposiciones . . . . .	22
3.5. Algoritmo de reconocimiento . . . . .	25
3.5.1. Paso 1: reducción de $H$ . . . . .	26
3.5.2. Paso 2: verificación de oposiciones duales . . . . .	27
3.5.3. Paso 3: generación del digrafo de opuestos . . . . .	28
3.5.4. Paso 4: verificación de transitividad . . . . .	28
3.5.5. Paso 5: verificación de reticulado . . . . .	29
3.5.6. Certificación . . . . .	31
<b>4. Grafos biclique irreducible hereditarios</b>	<b>33</b>
4.1. Definición de la clase . . . . .	33
4.2. Caracterización . . . . .	34
<b>5. Conclusión</b>	<b>41</b>
<b>Referencias</b>	<b>43</b>

# 1 Introducción

Una *clique* en un grafo es un subgrafo completo maximal. Fueron estudiados tanto como objetos teóricos como por sus aplicaciones (ver, por ejemplo [8, 7]). El problema de encontrar la clique máxima en un grafo es  $\#P$ -completo [7] y el problema de enumerar las cliques en un grafo es  $\#P$ -hard [14] ya que, en general, la cantidad de cliques de un grafo es exponencial en el tamaño del grafo. Los problemas algorítmicos referidos a bicliques también han sido tratados [6, 3, 9].

Un grafo es *clique irreducible* si cada clique del grafo posee una arista que no pertenece a ninguna otra clique. Las aristas que pertenecen a una sola clique se denominan *aristas propias*. La clase de grafos clique irreducible fue introducida por Wallis y Zhang en [25]. El reconocimiento de esta clase puede hacerse de manera polinomial. Como mencionamos, enumerar cliques en un grafo es un problema  $\#P$ -hard, aunque se conocen algoritmos que requieren un tiempo polinomial en encontrar cada clique [24]. Dado que la cantidad de cliques de un grafo clique irreducible está acotada por la cantidad de aristas del grafo, la enumeración de las cliques cuesta un tiempo polinomial. Luego resta verificar si las cliques poseen, cada una, una arista propia. Por supuesto, el algoritmo puede parar al encontrar una clique cuyas aristas están incluidas en las cliques ya enumeradas.

La clase de los grafos *clique irreducibles hereditarios* fueron estudiados también por Wallis y Zhang [25]. Explícitamente, comprende a los grafos cuyos subgrafos inducidos son todos clique irreducible. Esta clase posee una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos. Sorprendentemente, coincide con la clase de grafos *clique-Helly hereditarios* que fueron caracterizados más tarde por Prisner [19].

Una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos es *mutuamente intersecante* cuando  $A \cap B \neq \emptyset$  para todo  $A, B \in \mathcal{F}$ , mientras que es *globalmente intersecante* cuando  $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$ . Si toda subfamilia mutuamente intersecante de  $\mathcal{F}$  es globalmente intersecante, entonces  $\mathcal{F}$  es *Helly*.

Los grafos *clique-Helly* (ver, por ejemplo [22]) son aquellos cuya familia de cliques satisface la propiedad de Helly: en cada familia de cliques mutuamente intersecante, existe un vértice que pertenece a todas las cliques. La clase de grafos *clique-Helly hereditarios*, es la formada por los grafos en los que se cumple la propiedad anterior en todo subgrafo inducido.

El reconocimiento de los grafos clique-Helly y clique-Helly hereditarios también ha sido estudiado por Lin y Szwarcfiter en [16], quienes demostraron que se pueden reconocer en tiempo  $O(m^2)$ , siendo  $m$  la cantidad de aristas del grafo.

Una variante del concepto de los grafos clique irreducible es la de los *grafos débilmente*

*clique irreducibles* definidos por Wang en [26]. Esta clase consiste en los grafos cuyas aristas están contenidas en cliques con aristas propias. Es decir, podemos *cubrir* las aristas del grafo con cliques que poseen aristas propias (las cliques del grafo no están demasiado superpuestas).

Así como se definen las cliques, se llaman *bicliques* a los subgrafos bipartitos completos maximales de un grafo. En el último tiempo se han traducido varios conceptos de cliques a bicliques. Por ejemplo, se ha estudiado la propiedad Helly en las bicliques de un grafo [9, 10], se definieron los grafos biclique y matrices biclique [11], el grafo clique iterado [18] y biclique-coloreo de grafos [23].

En general, la cantidad de bicliques de un grafo es de orden exponencial respecto al tamaño del grafo [20]. Dias, Figueiredo y Szwarcfiter han propuesto un algoritmo para listar las bicliques de un grafo que demora tiempo  $O(nm)$  entre cada par de bicliques listadas [6], siendo  $n$  la cantidad de vértices del grafo. Los mismos autores han conseguido listar las bicliques de un grafo en orden lexicográfico también en tardando un tiempo polinomial entre cada biclique [5].

En este trabajo extendemos el concepto de arista propia a bicliques, es decir, aristas que pertenecen exclusivamente a una sola biclique en un grafo. En base a lo anterior, definimos la clase de grafos *biclique irreducibles* y enunciamos un algoritmo ingenuo de reconocimiento de orden  $O(mn^3)$ , el cual no saca provecho de ninguna propiedad de la clase, más que su definición. Asimismo, mostramos algunas propiedades generales. Luego, restringimos el estudio de la clase en grafos bipartitos. Primero obtenemos una caracterización estructural en la cual utilizamos un digrafo en el que pueden visualizar y estudiar más claramente las bicliques. Con las propiedades encontradas construimos un algoritmo de reconocimiento que exhibe mejoras en la complejidad temporal respecto al algoritmo ingenuo de reconocimiento, aún especializado en la clase de grafos bipartitos (en cuyo caso el orden es  $O(m^2n)$ ). El algoritmo propuesto requiere tiempo  $O(nm)$  y devuelve certificados en el caso en que la respuesta sea negativa.

Finalmente, definimos la clase de los grafos *biclique irreducible hereditarios*, en la que logramos una caracterización por subgrafos prohibidos. Siguiendo la coincidencia de las clases clique irreducible hereditario y clique-Helly hereditario exploramos la relación de los grafos biclique irreducible hereditarios y los grafos *biclique-Helly hereditarios*. Esta última clase fue estudiada por Groshaus [9] en donde presenta una caracterización también por subgrafos inducidos prohibidos. La comparación no muestra una conexión evidente.

La organización del trabajo es la siguiente: en la sección que sigue presentamos las definiciones y el vocabulario que usaremos. Luego, en el Capítulo 2 introducimos rigurosamente el problema de la caracterización de los grafos biclique irreducibles y proponemos una posible solución utilizando las herramientas disponibles hasta el momento. Mostramos un algoritmo polinomial que resuelve el problema, pero que no indaga en las estructuras que pueden encontrarse en los grafos biclique irreducibles y exponemos propiedades básicas de la clase de grafos que estamos tratando. En el Capítulo 3, atacamos el problema de los grafos bipartitos biclique irreducibles enunciando propiedades. Con

ellas damos una caracterización estructural. Enunciamos el algoritmo de reconocimiento analizando su complejidad y mostramos los certificados en caso de falla. En el Capítulo 4, abordamos el problema de la clase hereditaria, es decir, los grafos *biclique irreducible hereditarios*. Finalizamos esta tesis con las conclusiones y algunos problemas abiertos.

## 1.1. Definiciones

Un *grafo* es un par  $G = (V, E)$  donde  $V \neq \emptyset$  es un conjunto finito y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados  $(v, w)$  con  $v, w \in V$  y  $v \neq w$ . Los elementos de  $V$  son los *vértices* de  $G$ , mientras que los elementos de  $E$  son las *aristas* de  $G$ . En general, escribimos  $V(G)$  y  $E(G)$  para referirnos a  $V$  y  $E$  respectivamente. Para cada  $(v, w) \in E(G)$ , decimos que  $v$  y  $w$  son *adyacentes* o *vecinos*, y que  $v$  es *adyacente* a  $w$ . Para facilitar la lectura, también escribimos  $vw$  para referirnos a la arista  $(v, w)$ .

La *vecindad abierta* de  $v \in V(G)$  es el conjunto  $N(G, v)$  formado por los vecinos de  $v$ , es decir,  $N(G, v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$ . En general, para  $W \subseteq V(G)$ , escribimos  $N_W(G, v) = N(G, v) \cap W$ , i.e,  $N_W(G, v)$  denota la vecindad abierta de  $v$  restringida a  $W$ . La *vecindad cerrada* de  $v$  es  $N[G, v] = N(G, v) \cup \{v\}$ . Para cada  $vw \in E(G)$ , la *vecindad de  $vw$*  es el conjunto  $N(G, vw) = N(G, v) \cap N(G, w)$ . Cuando  $G$  quede claro por contexto, escribiremos  $N(v)$ ,  $N_W(G)$ ,  $N[v]$  y  $N(vw)$  en lugar de  $N(G, v)$ ,  $N_W(G, v)$ ,  $N[G, v]$  y  $N(G, vw)$  respectivamente. El *grado* de  $v$  es  $d(G, v) = |N(G, v)|$ . Cuando no haya dudas en cuanto al grafo en el que estemos observando el grado de  $v$ , escribiremos  $d(v)$ .

Un *subgrafo* de  $G$  es un grafo  $H$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Cuando  $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$ , decimos que  $H$  es el subgrafo de  $G$  *inducido* por  $V(H)$ . En general, decimos que  $H$  es un *subgrafo inducido* de  $G$  para indicar que  $H$  es el subgrafo de  $G$  inducido por  $V(H)$ . Dos grafos  $G$  y  $H$  son *isomorfos* cuando existe una biyección  $f$  entre  $V(G)$  y  $V(H)$ , llamada *isomorfismo*, tal que  $vw \in E(G)$  si y sólo si  $(f(v), f(w)) \in E(H)$ .

Dos vértices  $v, w \in V(G)$  son *mellizos* cuando  $N(v) = N(w)$ . Si  $N(v) \subseteq N(w)$  decimos que  $w$  *domina* a  $v$ . Usualmente, en la literatura, se utiliza el término *mellizos falsos* para referirse a lo que nosotros llamamos mellizos a secas. Decimos que  $G$  es *trim-reducido* cuando no posee vértices mellizos. Notar que  $G$  es *trim-reducido* si y sólo si  $N(v) \neq N(w)$  para todo  $v, w \in V(G)$ ,  $v \neq w$ . Una *trim-reducción* de  $G$  se obtiene eliminando iterativamente vértices con mellizos, hasta que no queden vértices mellizos. Claramente, la *trim-reducción* de  $G$  es un grafo *trim-reducido*. Las *trim-reducciones* de  $G$  son grafos isomorfos.

Un conjunto  $W \subseteq V(G)$  es *completo* cuando todo vértice de  $W$  es adyacente al resto de los vértices de  $W$ . Una *clique* es un conjunto de vértices completo maximal. También usamos el término *clique* para referirnos al subgrafo de  $G$  inducido por  $W$ , para toda clique  $W$ . Un grafo es *completo* cuando  $V(G)$  es completo.

Un conjunto  $W \subseteq V(G)$  es *independiente* cuando ningún vértice de  $W$  es adyacente

a otro vértice de  $W$ . Si  $V(G)$  puede particionar en dos conjuntos independientes  $X \neq \emptyset$  e  $Y \neq \emptyset$ , entonces  $G$  es un grafo *bipartito*. El par  $\{X, Y\}$  es una *bipartición* de  $G$ . En general, vamos a escribir  $G = (X \cup Y, E)$  para denotar un grafo bipartito  $G$  cuyos vértices poseen una bipartición  $\{X, Y\}$ . Decimos que  $G = (X \cup Y, E)$  es *completo* si  $E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ , i.e.,  $G$  es completo si todo vértice de  $X$  es adyacente a todo vértice de  $Y$ . Para cualquier grafo  $G$ , un subconjunto  $H$  de vértices de  $G$  es *bicompleto* si  $H$  es bipartito y completo. Si además  $H$  es maximal lo llamamos *biclique* de  $G$ . En ese caso, también decimos que el subgrafo inducido por  $H$  es una *biclique* de  $G$ .

Un *grafo dirigido*, o simplemente *digrafo*, es un par  $D = (V, E)$  donde  $V \neq \emptyset$  es un conjunto finito y  $E$  es un conjunto de pares ordenados  $(v, w)$  con  $v, w \in V(G)$  y  $v \neq w$ . Los elementos de  $V$  son los *vértices* de  $D$ , mientras que los elementos de  $E$  son las *aristas* de  $D$ . En general,  $V(G)$  y  $E(G)$  denotan los conjuntos  $V$  y  $E$  respectivamente. Para cada  $(v, w) \in E(D)$ , decimos que  $v$  y  $w$  son *adyacentes* o *vecinos*, siendo  $v$  un *vecino entrante a  $w$*  y  $w$  un *vecino saliente de  $v$* . Para simplificar la lectura, escribiremos  $v \rightarrow w$  para indicar que  $(v, w) \in E(D)$  y  $v \nrightarrow w$  para indicar que  $(v, w) \notin E(D)$ .

La *vecindad entrante* de  $v \in V(D)$  es el conjunto  $N^-(D, v)$  formado por los vecinos entrantes a  $v$ , es decir,  $N^-(D, v) = \{w \in V(D) \mid w \rightarrow v\}$ . Análogamente, la *vecindad saliente* de  $v$  es  $N^+(D, v) = \{w \in V(D) \mid v \rightarrow w\}$ . Cuando  $D$  quede claro por contexto, escribiremos  $N^-(v)$  y  $N^+(v)$  para referirnos a  $N^-(D, v)$  y  $N^+(D, v)$  respectivamente. La *vecindad cerrada entrante* y *vecindad cerrada saliente* de un vértice  $v$  son  $N^-[D, v] = N^-(D, v) \cup \{v\}$  y  $N^+[D, v] = N^+(D, v) \cup \{v\}$  respectivamente, mientras que el *grado saliente* de un vértice  $v$  es  $d^+(D, v) = |N^+(D, v)|$  y el *grado entrante* es  $d^-(D, v) = |N^-(D, v)|$ . Otra vez, cuando en el contexto sea claro el digrafo  $D$  al cual hacemos referencia, escribimos  $N^-[v]$ ,  $N^+[v]$ ,  $d^-(v)$  y  $d^+(v)$ .

El *reverso* de  $D$  es el digrafo  $D^{-1}$  tal que  $V(D^{-1}) = V(D)$  y  $E(D^{-1}) = \{(y, x) \mid (x, y) \in E(D)\}$ . En otras palabras,  $D^{-1}$  es el digrafo que se obtiene de cambiar la orientación de cada arista de  $D$  (ver e.g. [8]). Dos digrafos  $D$  y  $D'$  son *isomorfos* cuando existe una biyección  $f$  entre  $V(D)$  y  $V(D')$ , llamada *isomorfismo*, tal que  $v \rightarrow w$  si y sólo si  $f(v) \rightarrow f(w)$  para todo  $v, w \in V(D)$ .

Un *grafo orientado* es un digrafo  $D$  tal que  $x \nrightarrow y$  ó  $y \nrightarrow x$  para todo  $x, y \in V(D)$ . Es decir,  $D$  es un grafo orientado cuando la relación definida por  $\rightarrow$  es asimétrica [8]. Si además  $D$  no tiene tres vértices  $x, y, z$  tales que  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  y  $x \nrightarrow z$ , la relación  $\rightarrow$  es transitiva y decimos que  $D$  es un *digrafo transitivo*.

## 2 Grafos biclique irreducibles

En esta sección introducimos los grafos biclique irreducibles. Mostramos un algoritmo de reconocimiento ingenuo y analizamos su complejidad. Luego observaremos propiedades de las aristas propias de las bicliques y el comportamiento de la biclique irreducibilidad al remover vértices mellizos del grafo.

Formalicemos la definición: una *arista propia* de una biclique  $B$  de un grafo  $G$  es una arista que pertenece a  $B$  pero no pertenece a ninguna otra biclique de  $G$ . Decimos que una biclique es *propia* si posee alguna arista propia. Con esto, un grafo es *biclique irreducible* si y sólo si todas las bicliques del grafo son propias.

Al dar la definición surge el problema de reconocimiento de la clase, el cual trata de poder decidir si un grafo arbitrario es biclique irreducible. Es decir, debemos poder determinar si el grafo observado tiene todas sus bicliques propias. El objetivo es poder desarrollar un algoritmo que de la respuesta. Además, es deseable que el procedimiento pueda dar evidencias del resultado que arroje. De esa manera, tendremos un *certificado* para el algoritmo. En este trabajo nos conformamos con tener uno en el caso en el que la respuesta sea negativa.

### 2.1. Reconocimiento naif

Verificar que un grafo cumple las propiedades de la clase de los grafos biclique irreducibles puede realizarse en tiempo polinomial, sin explotar ninguna estructura o propiedad que no se observe a primera vista, es decir, utilizando sólo la definición de la clase. El procedimiento es el descrito por el Algoritmo 2.1, que consiste en explorar las bicliques de un grafo dado y verificar que todas las bicliques tengan, al menos, una arista propia. Para ello, se guardan las aristas pertenecientes a las bicliques ya exploradas en un conjunto  $C$ . Si al analizar una biclique  $B$  observamos que  $E(B) \subseteq C$ , podemos concluir que  $G$  no es biclique irreducible ya que todas las aristas de  $B$  pertenecen a bicliques previamente examinadas. Luego,  $G$  es biclique irreducible sólo cuando todas las bicliques de  $G$  son examinadas.

La manera de recorrer las bicliques de  $G$  no es explícita en el Algoritmo 2.1. Existen algoritmos que encuentran las bicliques de  $G$  que demoran un tiempo polinomial entre cada biclique. Por ejemplo, el procedimiento descrito por Dias et al. [5] genera las bicliques requiriendo tiempo  $O(n^3)$  entre bicliques, siendo  $n$  la cantidad de vértices de  $G$ .

La cantidad de iteraciones que realiza el Algoritmo 2.1 es a lo sumo  $m = |E(G)|$ ,

---

**Algoritmo 2.1** Reconocimiento naif de grafos biclique irreducibles

---

**Entrada:** un grafo  $G$ .

**Salida:** **verdadero** si  $G$  es biclique irreducible. En caso contrario, **falso**.

1. Si  $E(G) = \emptyset$ , devolver **verdadero**
  2. Sea  $C \leftarrow \emptyset$  un conjunto de aristas
  3. Sea  $B$  la primera biclique de  $G$
  4. **Mientras**  $E(B) \not\subseteq C$  y hay una próxima biclique en  $G$
  5.      $C \leftarrow C \cup E(B)$
  6.      $B \leftarrow$  próxima biclique de  $G$
  7. **Devolver verdadero** si  $E(B) \subseteq C$ . Caso contrario, **falso**
- 

ya que en cada iteración del ciclo se agrega al menos una arista de  $G$  a  $C$ . Por lo tanto, podemos afirmar que el Algoritmo 2.1 requiere tiempo  $O(mn^3)$ .

Observemos que si los posibles grafos de estudio pertenecen a una clase de grafos para la cual se conoce un algoritmo de generación de bicliques más eficiente, entonces la complejidad del Algoritmo 2.1 restringido a la clase sería mejor. Por ejemplo, Dias et al. [6] describen un procedimiento para listar las bicliques de grafos bipartitos que requiere tiempo  $O(mn)$  en encontrar cada biclique. Luego, el Algoritmo 2.1 restringido a grafos bipartitos tiene una complejidad temporal de  $O(m^2n)$ .

## 2.2. Propiedades básicas

En este apartado trataremos algunas propiedades locales referidas a las bicliques propias y sus vértices que no pueden dar condiciones de suficiencia para decidir si un grafo es biclique irreducible. Concretamente, hablaremos de las formas de las vecindades de las aristas propias y observaremos los efectos de eliminar algunos vértices determinados del grafo y cómo esto afecta a las aristas propias.

**Lema 1.** *Una arista  $vw$  de un grafo  $G$  es propia si y sólo si  $B = (N(v) \cup N(w)) \setminus N(vw)$  es una biclique.*

*Demostración.* Veamos primero que si  $vw$  es propia, entonces  $B$  es un bicompleto. Por el contrarrecíproco, supongamos que  $B$  no lo es. Entonces pueden darse las siguientes dos situaciones:

1. Existen dos vértices  $x \in N(w) \setminus N(v)$  e  $y \in N(v) \setminus N(w)$  no adyacentes. Entonces  $\{y, v, w\}$  y  $\{x, w, v\}$  son dos bicompletos que comparten a  $vw$ .

2. Existen dos vértices  $y, y'$  vecinos, ambos pertenecientes a  $N(v) \setminus N(w)$  (o a  $N(w) \setminus N(v)$ ). Luego,  $\{y, v, w\}$  e  $\{y', v, w\}$  son dos bicompletos que tienen entre sus aristas comunes a  $vw$ .

Ambas contradicen la hipótesis de que  $vw$  es una arista propia. Luego,  $B$  es bicompleto.

Resta ver que  $B$  es una biclique. Por la definición de  $B$  todo conjunto que contiene propiamente a los vértices de  $B$  contiene vértices no adyacentes a  $v$  o  $w$  o bien, vértices pertenecientes a  $N(vw)$  que en ninguno de los dos casos pertenecen a una biclique en la cual estén  $v$  y  $w$ . Luego  $B$  es un bicompleto maximal, o sea, una biclique.

Ahora veamos que si  $B$  es una biclique, entonces  $vw$  es propia. Notemos que toda biclique  $B^* \neq B$  que contiene a  $v$  tiene, al menos un vértice en  $N(vw)$ . Luego  $w \notin B^*$ . Situación análoga se da con las bicliques que contienen a  $w$ . Entonces la arista  $vw$  sólo pertenece a  $B$ .  $\square$

El siguiente corolario muestra la propiedad de que una arista sea *propia* se mantiene cuando se eliminan vértices del grafo.

**Corolario 2.** *Sea  $G$  un grafo,  $vw \in E(G)$  y  $x \in V(G) \setminus \{v, w\}$ . Si  $vw$  es propia en  $G$ , entonces  $vw$  es propia en  $G \setminus \{x\}$ .*

*Demostración.* Sea  $H = G \setminus \{x\}$ . Por Lema 1,  $B = (N(v) \cup N(w)) \setminus N(vw)$  es la biclique de  $G$  que contiene a  $vw$ . Claramente,

$$\begin{aligned} B \setminus \{x\} &= ((N(v) \setminus \{x\}) \cup (N(w) \setminus \{x\})) \setminus (N(vw) \setminus \{x\}) \\ &= (N_H(v) \cup N_H(w)) \setminus N_H(vw) \end{aligned}$$

es una biclique de  $H$ . Luego, nuevamente por Lema 1,  $vw$  es propia en  $H$ .  $\square$

El corolario anterior no significa que la clase de grafos biclique irreducible es hereditaria, ya que podría eliminarse uno de los vértices de una arista propia. Una consecuencia directa de este corolario es que los vértices mellizos de un grafo pueden ser removidos antes de verificar que el grafo sea biclique irreducible.

**Lema 3.** *Sea  $G$  un grafo,  $B$  una biclique de  $G$ , y  $u, v$  un par de vértices mellizos de  $G$ . Entonces,  $B$  es propio en  $G$  si y sólo si  $B \setminus \{v\}$  es propio en  $G \setminus \{v\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $B$  es propio. Notemos que si  $vz$  es una arista propia de  $B$ , entonces  $uz$  también es una arista propia de  $B$ . Luego,  $B$  contiene una arista propia  $xy$  de la cual  $v$  no es vecina. Por Corolario 2,  $xy$  es una arista propia de  $G \setminus \{v\}$ , y su correspondiente biclique es  $B \setminus \{v\}$ . El recíproco es trivial.  $\square$

Por definición, un grafo es biclique irreducible si todas sus bicliques son propias. Por el lema anterior, eliminar vértices mellizos de un grafo conserva la propiedad porque cada biclique continúa teniendo una arista propia y no surgen nuevas bicliques.

**Corolario 4.** *Un grafo es biclique irreducible si y sólo si su trim-reducción es biclique irreducible.*

Este último corolario es importante para el desarrollo de la siguiente sección e indica una posible primera reducción del problema de reconocimiento de grafos biclique irreducibles.

### 3 Grafos bipartitos biclique irreducibles

En este capítulo caracterizamos de manera estructural a los grafos bipartitos que son biclique irreducibles. Usando esta caracterización, diseñamos un algoritmo para reconocer los grafos bipartitos biclique irreducibles.

La restricción del estudio de la clase de grafos biclique irreducibles a grafos bipartitos puede parecer demasiado excluyente, pero varias aplicaciones relacionadas con bicliques se dan naturalmente en grafos bipartitos. Por ejemplo, en biología, el problema de *biclustering* trata de correlacionar genes con condiciones, es decir, se quiere relacionar la alta o baja expresión de genes con determinadas condiciones de los individuos estudiados. Para ello se confecciona una matriz en la que las filas representan a los genes, las columnas a las condiciones y el valor de cada componente expresa la relación del gen con la condición. En los modelos más simples, el valor de dichas componentes es 0 ó 1. Esta matriz se puede modelar, a su vez, como un grafo bipartito en el cual los vértices son adyacentes si el gen está relacionado con la condición. Luego, las bicliques de ese grafo representan correlaciones de genes con condiciones. Madeira y Oliveira escribieron un reporte en el cual se profundiza en los algoritmos aplicables a este problema [17]. El biclustering se ha extendido como técnica para el análisis de datos en otros contextos (cf. [2]).

La estructura de la presentación es la siguiente: inicialmente demostramos que la reducción de un grafo bipartito biclique irreducible es un grafo bipartito cuyos conjuntos independientes tienen la misma cantidad de vértices. Esto nos permite obtener una representación del grafo con un digrafo que resume la información de las adyacencias. La ventaja del digrafo es que nos da la posibilidad de visualizar de una manera más clara las bicliques del grafo. A continuación, mostramos que un grafo es biclique irreducible sólo cuando su correspondiente digrafo es transitivo y el orden parcial que describe la relación de adyacencia cumple ciertas condiciones.

Como resultado obtenemos un algoritmo de reconocimiento que puede implementarse en  $O(mn)$ , siendo  $m$  y  $n$  las cantidades de aristas y vértices respectivamente del grafo a examinar. Recordemos que el algoritmo de reconocimiento ingenuo requiere  $O(m^2n)$  (algoritmo especializado en grafos bipartitos, ver Sección 2.1).

Durante esta sección hacemos un uso recurrente del Lema 1 para describir la biclique que contiene una arista propia  $vw$ . Dado que los grafos estudiados son bipartitos,  $N(vw) = \emptyset$ , y por consiguiente este resultado se resume como sigue.

**Corolario 5.** *Una arista  $vw$  de un grafo bipartito  $G$  es propia si y sólo si  $B = N(v) \cup N(w)$  es una biclique.*

### 3.1. Grafos con oposiciones duales

En esta sección vamos a demostrar que los grafos bipartitos biclique irreducibles sin mellizos admiten una biyección dual entre los vértices de ambos conjuntos de la partición, que se corresponde con el conjunto de aristas propias del grafo. Este resultado lo utilizamos en las secciones siguientes para definir el digrafo cuyos vértices identificarán a las aristas propias.

La biyección dual se basa en el conjunto de vértices *opuestos* de un vértice dado. Sean  $v, w$  dos vértices adyacentes de un grafo  $G$ . Decimos que  $w$  es *opuesto* a  $v$  cuando  $d(w) \leq d(x)$  para todo  $x \in N(v)$ . El conjunto de vértices opuestos a  $v$  se denota como  $OP(v)$ . Los vértices opuestos a  $v$  son de interés pues, como veremos, si  $vw$  es una arista propia, entonces  $v$  tiene que ser opuesto de  $w$  y viceversa. Lo formalizamos en el siguiente lema.

**Lema 6.** *Si  $vw$  es una arista propia de un grafo bipartito  $G$ , entonces  $v \in OP(w)$  y  $w \in OP(v)$ .*

*Demostración.* Por Corolario 5,  $N(v) \cup N(w)$  es una biclique. Luego,  $N(w) \subseteq N(z)$  para todo  $z \in N(v)$ , i.e.  $w \in OP(v)$ . Análogamente  $v \in OP(w)$ .  $\square$

Para simplificar la notación, introducimos otra definición al vocabulario: un vértice  $v$  es *propio* en una biclique  $B$  si  $vw$  es una arista propia de  $B$  para algún  $w \in N(v)$ . Observaremos más adelante que el recíproco del lema anterior vale cuando  $G$  es biclique irreducible. Empecemos viendo que cualquier vértice  $w$  opuesto a  $v$  tiene que ser propio en todas las bicliques propias que contienen a  $vw$ .

**Lema 7.** *Sea  $G$  un grafo bipartito,  $v \in V(G)$  y  $w \in OP(v)$ . Si  $B$  es una biclique propia que contiene a  $vw$ , entonces  $w$  es un vértice propio de  $B$ .*

*Demostración.* Sea  $xy$  una arista propia de  $B$ . Por Lema 5,  $B = N(y) \cup N(x)$  donde, sin pérdida de generalidad,  $v \in N(y)$  y  $w \in N(x)$ , por lo tanto  $N(y) \subseteq N(w)$ . Por otra parte,  $w \in OP(v)$  y, en consecuencia,  $d(y) \geq d(w)$ . Entonces, obtenemos que  $N(y) = N(w)$ , lo que implica que  $wx$  también es una arista propia, i.e.,  $w$  es propio de  $B$ .  $\square$

Como resultado de este lema, obtenemos una partición de los vértices del vecindario de  $v$  en la que todos los vértices opuestos a  $v$  son mellizos y todos los vértices de  $N(v) \setminus OP(v)$  dominan a los opuestos de  $v$  (ver Figura 3.1). Esta propiedad se encuentra descrita en el siguiente lema.

**Lema 8.** *Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$ . Si  $G$  es bipartito biclique irreducible, entonces  $N(w) \subseteq N(x)$  para todo  $w \in OP(v)$  y todo  $x \in N(v)$ .*

*Demostración.* Como  $G$  es bipartito,  $\{v, w, x\}$  es un bicompleto que está incluido en una biclique  $B$ . Por Lema 7,  $w$  es un vértice propio de  $B$ . Luego, por Corolario 5,  $B = N(w) \cup N(z)$  para algún  $z \in N(w)$ . En consecuencia, como  $x \in B$ , obtenemos que  $N(w) \subseteq N(x)$ .  $\square$

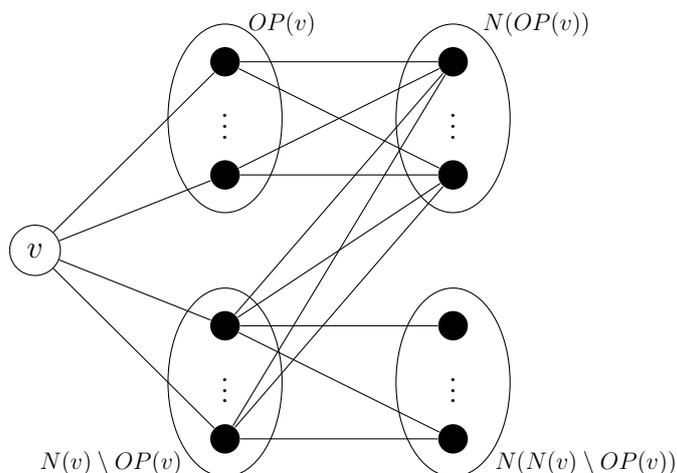


Figura 3.1: esquema de los vecinos de un vértice en un grafo bipartito. Los vértices de  $OP(v)$  son dominados por los vértices de  $N(v) \setminus OP(v)$ .

Del lema anterior, se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 9.** *Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$ . Si  $G$  es bipartito biclique irreducible, entonces  $OP(v)$  es un conjunto de mellizos.*

Por el corolario anterior, si  $G$  es reducido, entonces  $v$  tiene un único vértice opuesto, para todo  $v \in V(G)$ . Dicho vértice será denotado como  $op(v)$ . El teorema principal de esta sección es que en los grafos bipartitos biclique irreducibles la función  $op$  satisface una propiedad de dualidad, de forma tal que si  $v$  es opuesto de  $u$ , entonces  $u$  es opuesto de  $v$ .

**Teorema 10.** *Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$ . Si  $G$  es bipartito biclique irreducible, entonces  $v$  es opuesto de  $w$  para todo  $w \in OP(v)$ .*

*Demostración.* Supongamos, para obtener una contradicción, que  $G$  es biclique irreducible y aún así existe  $w \in OP(v)$  tal que  $v$  no es opuesto de  $w$ . Por definición de opuesto,  $d(u) < d(v)$  para cualquier  $u$  opuesto de  $w$ . Luego, existe  $z \in N(v) \setminus N(u)$ . Como  $\{v, w, z\}$  es un bicompleto, existe alguna biclique  $B$  que contiene la arista  $vw$  y no contiene a  $u$ . Por Lema 7,  $w$  es un vértice propio de  $B$ . Es decir, existe  $y \in N(w)$  tal que  $yw$  es una arista propia de  $B$ . Pero esto es una contradicción porque, por Corolario 5,  $N(w) \subseteq B$  y  $u \notin B$ .  $\square$

Con el resultado anterior podemos concluir que si un grafo reducido  $G = (X \cup Y, E)$  es bipartito biclique irreducible, entonces  $op(op(v)) = v$  para todo  $v \in V(G)$ . A los grafos que cumplen estas propiedades los denominaremos *de oposiciones duales*.

**Propiedad 11.** Si  $G = (X \cup Y, E)$  un grafo de oposiciones duales, entonces  $op$  es una biyección entre  $X$  e  $Y$ .

Cada arista  $(v, op(v))$  de un grafo de oposiciones duales  $G$  será llamada una *arista de opuestos*. Como se mencionó anteriormente, si  $G$  es biclique irreducible, entonces satisface el recíproco del Lema 6. Dicho de otra forma, las aristas de opuestos de  $G$  son precisamente las aristas propias.

**Lema 12.** Sea  $G$  un grafo de oposiciones duales que es biclique irreducible. Entonces,  $vw$  es una arista de opuestos si y sólo si  $vw$  es una arista propia de  $G$ .

*Demostración.* Supongamos que  $vw$  es una arista de opuestos, i.e.  $w = op(v)$  y  $v = op(w)$ . Por Lema 8,  $N(w) \subseteq N(z)$  para todo  $z \in N(v)$  y, análogamente,  $N(v) \subseteq N(z)$  para todo  $z \in N(w)$ . Luego,  $N(v) \cup N(w)$  es una biclique, y en consecuencia, por Corolario 5,  $vw$  es una arista propia.

El recíproco es consecuencia del Lema 6. □

## 3.2. Digrafo de opuestos

En la sección anterior observamos que si un grafo es bipartito biclique irreducible, entonces su reducción es de oposiciones duales. Más aún, las aristas de opuestos se corresponden con las aristas propias del grafo. Para simplificar la tarea de caracterizar los grafos bipartitos biclique irreducibles, definimos un digrafo que muestra una representación resumida de los grafos de oposiciones duales.

Sea  $G$  un grafo de oposiciones duales con bipartición  $\{X, Y\}$ . El *digrafo de opuestos* de  $G$  (con respecto a  $X$ ) es el digrafo  $\mathcal{D}(G) = (V, E)$  tal que

$$V = \{v(x) \mid x \in X\}$$

y

$$E = \{v(x) \rightarrow v(x') \mid (op(x), x') \in E(G)\}$$

Conceptualmente,  $\mathcal{D}(G)$  tiene un vértice  $v(x)$  por cada arista de opuestos  $(x, op(x))$  de  $G$ . Por otra parte, cada arista de  $\mathcal{D}(G)$  se corresponde unívocamente con una arista de  $G$  de forma tal que  $v(x) \rightarrow v(x')$  es una arista de  $\mathcal{D}$  si y solo si  $op(x)$  es adyacente a  $x'$ . Notemos que la construcción de  $\mathcal{D}(G)$  depende de cuál conjunto de la bipartición se tome como  $X$ . Sin embargo, el digrafo de opuestos  $\mathcal{D}'$  de  $G$  con respecto a  $Y$  es isomorfo al reverso de  $\mathcal{D}(G)$ . Una vez fijado  $X$ , vamos a escribir  $v(y)$  para denotar a  $v(op(y))$  para todo  $y \in Y$ . En la Figura 3.2 se muestra un grafo de oposiciones duales y su digrafo de opuestos.

A partir de la definición, podemos concluir que el tamaño de  $\mathcal{D}(G)$  es similar al de  $G$ . En efecto, si  $G$  tiene  $n$  vértices y  $m$  aristas, entonces  $\mathcal{D}(G)$  tiene  $n/2$  vértices y  $m - n/2$  aristas. En el lema que sigue mostramos que  $\mathcal{D}(G)$  es un digrafo orientado.

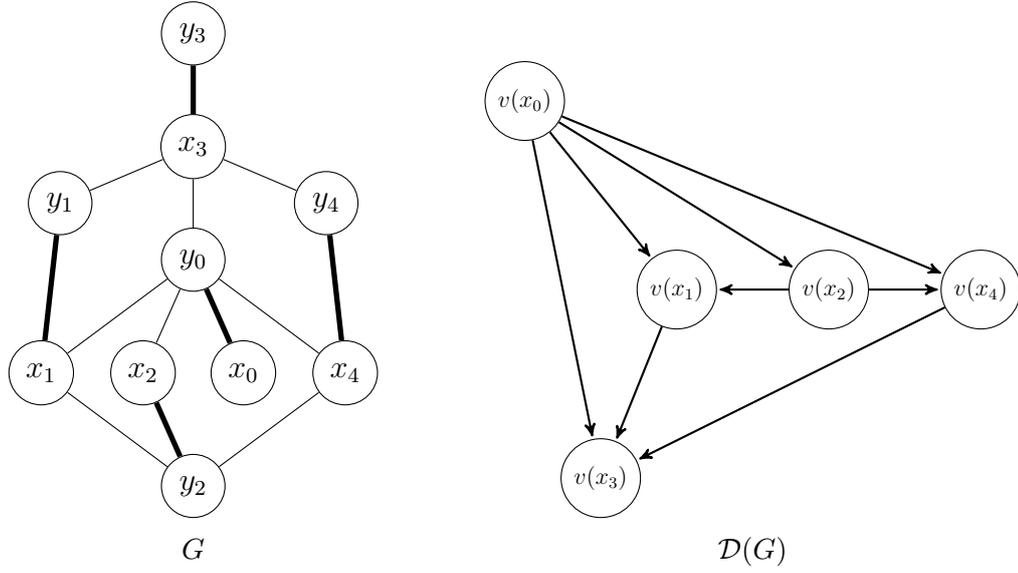


Figura 3.2: ejemplo de digrafo de opuestos. En el grafo  $G$  se dibujan con líneas más gruesas las aristas correspondientes a pares de opuestos.

**Lema 13.** Si  $G = (X \cup Y, E)$  es un grafo de oposiciones duales, entonces  $\mathcal{D}(G)$  es un grafo orientado.

*Demostración.* Sean  $x, x' \in X$  tales que  $v(x) \rightarrow v(x')$  es una arista de  $\mathcal{D}(G)$ . Por definición,  $x'$  es adyacente a  $op(x)$  en  $G$ . Como  $G$  es de opuestos duales,  $op$  es una biyección, lo que implica que  $op(x) \neq op(x')$ . Luego  $d(op(x')) < d(op(x))$ , con lo cual  $x$  no es adyacente a  $op(x')$ . Por lo tanto,  $v(x') \rightarrow v(x)$  no es una arista de  $\mathcal{D}(G)$ , i.e.,  $D$  es un grafo orientado.  $\square$

A continuación estudiamos la construcción inversa que, a partir de  $\mathcal{D}(G)$ , obtiene de vuelta a  $G$ . Para ello introducimos una operación que genera un grafo bipartito a partir de un digrafo cualquiera. Luego mostramos que esta operación es la inversa de  $\mathcal{D}$  cuando la aplicamos a grafos de oposiciones duales.

Para un digrafo  $D$ , el *grafo bipartito representado por  $D$*  es el grafo  $\mathcal{B}(D) = (V, E)$  tal que

$$V = \{\ell(v), r(v) \mid v \in V(D)\}$$

y

$$E = \{(\ell(v), r(v)) \mid v \in V(D)\} \cup \{(r(v), \ell(w)) \mid v \rightarrow w \in E(D)\}.$$

En la definición, a cada vértice del digrafo le corresponden dos vértices adyacentes en el grafo resultado de la operación. Las otras aristas corresponden a las adyacencias entre los vértices del digrafo.

Podemos notar que el grafo  $G$  de la Figura 3.2 es el grafo bipartito representado por el digrafo  $\mathcal{D}(G)$ . En los siguientes lemas veremos que  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(G))$  es isomorfo a  $G$  cuando  $G$  es de oposiciones duales y que, de manera similar,  $\mathcal{D}(\mathcal{B}(D))$  es isomorfo a  $D$  cuando  $D$  es un grafo orientado.

**Lema 14.** *Si  $G = (X \cup Y, E)$  es de oposiciones duales, entonces  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(G))$  es isomorfo a  $G$ .*

*Demostración.* Llamemos  $D = \mathcal{D}(G)$  y  $H = \mathcal{B}(D)$ . Por definición,  $D$  contiene un vértice  $v(x)$  por cada vértice  $x \in X$ , mientras que  $H$  contiene dos vértices  $\ell(v(x))$  y  $r(v(x))$  por cada  $v(x) \in V(D)$ . Afirmamos que la función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $f(x) = \ell(v(x))$  y  $f(op(x)) = r(v(x))$  para todo  $x \in X$  es un isomorfismo entre  $G$  y  $H$ . Para ello, basta ver que  $x, op(x')$  son adyacentes en  $G$  si y sólo si  $\ell(v(x))$  y  $r(v(x'))$  son adyacentes en  $H$ . En efecto,

- Si  $x = x'$ , entonces  $(x, op(x)) \in E(G)$  por definición, mientras que  $f(x) = \ell(v(x))$  y  $f(op(x')) = r(v(x'))$  son adyacentes en  $H$ .
- Si  $x \neq x'$  y  $(op(x), x') \in E(G)$ , entonces  $v(x) \rightarrow v(x') \in E(D)$ , lo que implica que  $f(op(x)) = r(v(x))$  es adyacente a  $f(x') = \ell(v(x'))$  en  $H$ .
- Si  $x \neq x'$  y  $(op(x), x') \notin E(G)$ , entonces  $v(x) \rightarrow v(x') \notin E(D)$ , lo que implica que  $f(op(x)) = r(v(x))$  no es adyacente a  $f(x') = \ell(v(x'))$  en  $H$ .

□

**Lema 15.** *Si  $D$  es un grafo orientado, entonces  $\mathcal{D}(\mathcal{B}(D))$  es isomorfo a  $D$ .*

La demostración es análoga a la del Lema 14.

### 3.3. Digrafos transitivos de opuestos

En la sección anterior definimos el digrafo de opuestos de un grafo de oposiciones duales  $G$ . En esta sección vamos a estudiar sus propiedades cuando todas las aristas de opuestos de  $G$  son propias. Para simplificar la notación, vamos a decir que un grafo  $G$  es de *oposiciones propias* cuando es de oposiciones duales y todas las aristas de opuestos son propias. Por Lema 12, si  $G$  es biclique irreducible, entonces es de oposiciones propias. Más específicamente, en esta sección demostramos que hay una relación uno a uno entre los digrafos de oposiciones propias y los digrafos transitivos. Probaremos que  $\mathcal{D}(G)$  es transitivo cuando  $G$  es de oposiciones propias, y que también vale la recíproca, es decir,  $\mathcal{B}(D)$  es un grafo de oposiciones propias cuando  $D$  es transitivo.

Antes de comenzar con las demostraciones, definimos *bicompletos compatibles*: dos subgrafos bicompletos son *compatibles* si existe una biclique que contiene a ambos. Observar que si  $vw$  es una arista propia, entonces todos los bicompletos que contienen a  $vw$  son compatibles de a pares.

Continuamos demostrando la primera de las propiedades.

**Teorema 16.** *Sea  $G = (X \cup Y, E)$  un grafo de oposiciones duales. Entonces,  $G$  es de oposiciones propias si y sólo si  $\mathcal{D}(G)$  es transitivo.*

*Demostración.* Primero veamos que si  $D = \mathcal{D}(G)$  no es transitivo, entonces  $G$  no es de oposiciones propias. Para ello, supongamos que existen  $x_1, x_2, x_3 \in X$  tales que  $v(x_1) \rightarrow v(x_2)$ ,  $v(x_2) \rightarrow v(x_3)$  y, sin embargo,  $v(x_1) \not\rightarrow v(x_3)$ . Por definición, como  $v(x_1) \rightarrow v(x_2)$ , tenemos que  $op(x_1)$  es adyacente a  $x_2$ . Luego,  $C = \{op(x_1), x_2, op(x_2)\}$  es un bicompleto. Análogamente,  $C' = \{x_2, op(x_2), x_3\}$  es un bicompleto, ya que  $v(x_2) \rightarrow v(x_3)$ . Ahora, como  $v(x_1) \not\rightarrow v(x_3)$  no es arista de  $D$ , obtenemos que  $op(x_1)$  no es adyacente a  $x_3$  en  $G$  y, por lo tanto,  $C$  y  $C'$  no son compatibles (ver Figura 3.3). Luego,  $(x_2, op(x_2))$  es una arista de opuestos que no es propia por Lema 6. Por lo tanto,  $G$  no es de oposiciones propias.

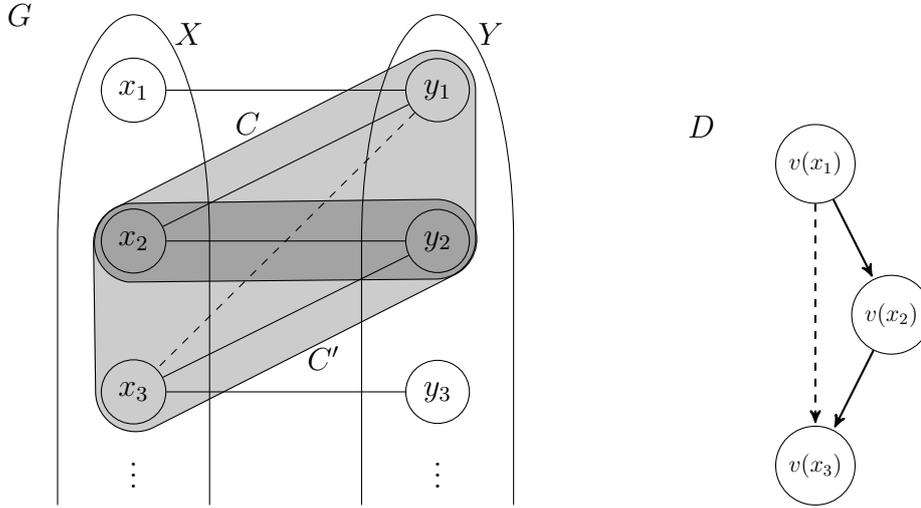


Figura 3.3: obtención de bipartitos no compatibles para el Teorema 16. Se muestra las consecuencias de la hipótesis en  $G$  y  $D$ . Notemos que la arista  $(x_2, op(x_2))$  está contenida en  $C$  y  $C'$  no compatibles. Es decir, cada bicompleto está contenido en una biclique distinta. Luego la arista no es propia.

Para la vuelta, supongamos que  $G$  no es de oposiciones propias, i.e., existe  $x_2 \in X$  tal que  $(x_2, op(x_2))$  pertenece a dos bicliques distintas  $B$  y  $B'$  de  $G$ . Luego, existe  $x_3 \in B' \setminus B$  que, sin pérdida de generalidad, pertenece a  $X$ . Como  $x_3 \notin B$ , existe  $x_1 \in X$  tal que  $op(x_1)$  pertenece a  $B$  y no es adyacente a  $x_3$ . Luego, por definición,  $v(x_1) \rightarrow v(x_2)$  y  $v(x_2) \rightarrow v(x_3)$ , mientras que  $v(x_1) \not\rightarrow v(x_3)$ , con lo cual,  $D$  no es transitivo.  $\square$

Veamos ahora, que si  $D$  es un digrafo transitivo, entonces el grafo bipartito representado por  $D$  es de oposiciones propias.

**Lema 17.** *Si  $D$  es un grafo orientado transitivo, entonces  $\mathcal{B}(D)$  es de oposiciones propias.*

*Demostración.* Por Lema 15 y Teorema 16, basta probar que  $B = \mathcal{B}(D)$  es de oposiciones duales. En efecto, por Lema 15,  $\mathcal{D}(B)$  es isomorfo a  $D$ , el cual, por hipótesis, es transitivo. Luego, por Teorema 16,  $B$  es de oposiciones propias cuando es de oposiciones duales.

Recordemos que, por definición,  $B$  es de oposiciones duales si es bipartito, reducido, todo vértice  $v$  tiene un único opuesto tal que  $op(op(v)) = v$ . Por definición de  $\mathcal{B}$ ,  $\{\ell(v) \mid v \in V(D)\}$  y  $\{r(v) \mid v \in V(D)\}$  son conjuntos independientes de  $B$ , con lo cual  $B$  es bipartito. Para ver que  $B$  es reducido, consideremos dos vértices  $v, w \in D$  y supongamos primero que  $N(\ell(v)) = N(\ell(w))$ . Luego,  $(\ell(v), r(w))$  y  $(\ell(w), r(v))$  son aristas de  $B$ . Por definición de  $\mathcal{B}$ ,  $v = w$  o ambas  $v \rightarrow w$  y  $w \rightarrow v$  son aristas de  $D$ . Como  $D$  es un grafo orientado, obtenemos que  $v = w$ , i.e.  $\ell(v)$  y  $\ell(w)$  no son mellizos. Análogamente, si  $N(r(v)) = N(r(w))$ , entonces  $r(v)$  y  $r(w)$  no son mellizos.

Veamos ahora que todo vértice tiene un único opuesto. Para ello, tomemos  $v \in D$  y veamos primero que  $r(v)$  es el único opuesto de  $\ell(v)$ . Por definición de  $\mathcal{B}$ ,  $r(w) \in N(\ell(v)) \setminus \{r(v)\}$  para  $w \in V(D)$  si y sólo si  $w \rightarrow v \in E(D)$ . Análogamente,  $\ell(z) \in N(r(v)) \setminus \{\ell(v)\}$  para  $z \in V(D)$  si y sólo si  $v \rightarrow z \in E(D)$ . Entonces, como  $D$  es transitivo, obtenemos que  $w \rightarrow z \in E(D)$  para todo par de vértices  $w, z \in V(D)$  tales que  $r(w) \in N(\ell(v)) \setminus \{r(v)\}$  y  $\ell(z) \in N(r(v)) \setminus \{\ell(v)\}$ . En consecuencia, por definición de  $\mathcal{B}$ ,  $r(w)$  domina a  $r(v)$ . Ahora, como  $\mathcal{B}(D)$  no tiene vértices mellizos, obtenemos que  $d(r(w)) > d(r(v))$ . Por lo tanto,  $r(v)$  es el único vértice de  $OP(\ell(v))$ . Un razonamiento análogo se puede realizar para demostrar que  $\ell(v)$  es el único vértice de  $OP(r(v))$ . Por lo tanto,  $op(op(v)) = v$  para todo  $v \in V(G)$ .  $\square$

Como corolario de los Lemas 14 y 17 obtenemos que hay una relación uno a uno entre los grafos orientados transitivos y los grafos de oposiciones propias.

**Corolario 18.** *Todo grafo orientado transitivo  $D$  es isomorfo a  $\mathcal{D}(G)$  para algún grafo  $G$  de oposiciones propias.*

### 3.4. Bicliques en el digrafo de oposiciones

En la sección anterior vimos que para todo grafo  $G$  de oposiciones propias existe un grafo orientado transitivo  $D = \mathcal{D}(G)$  que lo representa. En esta sección estudiamos la relación que existe entre las bicliques propias de  $G$  y algunos conjuntos de vértices de  $D$ . Para empezar, veremos que toda biclique  $B$  de  $G$  puede ser vista como un par  $P, Q$  de conjuntos de vértices de  $D$  tal que  $p = q$  o  $p \rightarrow q \in E(D)$  para todo  $p \in P$  y todo  $q \in Q$ . La ventaja que encontramos en esta forma de ver la biclique  $B$  es que podemos afirmar que es propia si  $P$  y  $Q$  comparten un único vértice.

Para obtener  $P$  y  $Q$  necesitamos algunas definiciones nuevas: dado  $A \subseteq V(D)$  definimos el conjunto de *predecesores* de  $A$  como

$$P(A) = \{v \in V(D) \mid \text{para todo } a \in A \text{ ocurre que } v = a \text{ ó } v \rightarrow a\}$$

y al conjunto de *sucesores* de  $A$  como

$$S(A) = \{v \in V(D) \mid \text{para todo } a \in A \text{ ocurre que } v = a \text{ ó } a \rightarrow v\}.$$

Conceptualmente,  $P(A)$  está integrado por los vértices tales que  $A$  está incluido en sus vecindades salientes.

El conjunto  $P$  es  $P(A)$ , mientras que  $Q$  es el conjunto definido como  $S(P(A))$ . Para simplificar la notación, utilizaremos  $Q(A)$  para denotar al conjunto  $S(P(A))$ . Estos conceptos se resumen en la Figura 3.4.

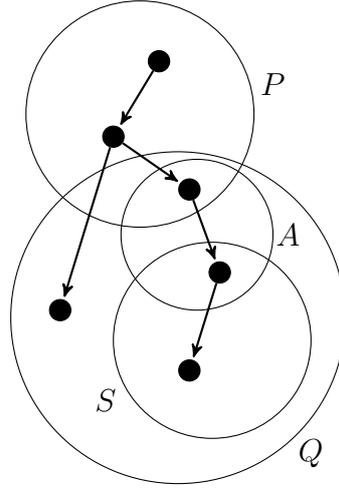


Figura 3.4: ejemplo de las definiciones de  $P$ ,  $S$  y  $Q$ . La clausura transitiva de las aristas que se dibujan también pertenecen al digrafo.

Vale la pena destacar la propiedad que sigue, la cual justifica la definición de  $Q$  como  $S(P(A))$  en lugar de  $S(A)$ .

**Propiedad 19.** Si  $D$  es un digrafo y  $A \subseteq V(D)$  es tal que  $P(A) \neq \emptyset$ , entonces  $A \subseteq Q(A)$  y  $P(A) = P(Q(A))$ .

Con el objetivo de relacionar los conjuntos de vértices de  $D$  con conjuntos de vértices de  $G$ , generalizamos las funciones  $v$ ,  $\ell$  y  $r$  de vértices a conjuntos de vértices. Para todo  $B \subseteq V(G)$ , definimos  $v(B) = \{v(x) \mid x \in B\}$ , mientras que para todo  $A \subseteq V(D)$ , definimos  $\ell(A) = \{\ell(v) \mid v \in A\}$  y  $r(A) = \{r(v) \mid v \in A\}$ . De esta forma, si  $G = (X \cup Y, E)$  es un grafo de oposiciones y  $A \subseteq V(D)$ , entonces  $\ell(A) \subseteq X$  y  $r(A) \subseteq Y$ .

Las definiciones anteriores son suficientes para describir las bicliques de  $G$  a partir conjuntos de vértices de  $D$ .

**Teorema 20.** Sea  $G = (X \cup Y, E)$  un grafo de oposiciones propias,  $\emptyset \subset L \subseteq X$  y  $\emptyset \subset R \subseteq Y$ . Entonces,  $L \cup R$  es un bicompleto si y sólo si existe  $A \subseteq V(\mathcal{D}(G))$  tal que  $L \subseteq \ell(Q(A))$  y  $R \subseteq r(P(A))$ .

*Demostración.* Sea  $L \cup R$  un bicompleto de  $G$ , llamemos  $A = v(L)$  y consideremos  $y \in R$ . Por definición de  $\mathcal{D}(G)$ , tenemos que, para todo  $a \in A$ ,  $v(y) = a$  o  $v(y) \rightarrow a$ . Consecuentemente  $v(y) \in P(A)$ , i.e.,  $R \subseteq r(P(A))$ . Por otra parte, como  $A \subseteq Q(A)$ , obtenemos que  $L \subseteq \ell(Q(v(L))) = \ell(Q(A))$ .

Para la recíproca, tomemos  $A \subseteq V(D)$  con  $P(A) \neq \emptyset$ . Recordemos que  $P(A) = P(Q(A))$ . Luego, por definición de  $P$ ,  $v \in P(A)$  si y sólo si para todo  $a \in Q(A)$ ,  $v = a$  o  $v \rightarrow a$ . Además, por definición de  $\mathcal{D}(G)$ ,  $r(v)$  es vecino de todo vértice de  $\ell(Q(A))$ , con lo cual,  $\ell(Q(A)) \cup r(P(A))$  es un bicompleto de  $G$ . En consecuencia,  $L \cup R$  es un bicompleto para todo par  $L$  y  $R$  no vacíos tales que  $L \subseteq \ell(Q(A))$  y  $R \subseteq r(P(A))$   $\square$

Si en el teorema anterior  $L = \ell(Q(A))$  y  $R = r(P(A))$ , entonces obtenemos que  $L \cup R$  es una biclique.

**Corolario 21.** *Sea  $G = (X \cup Y, E)$  un grafo de oposiciones propias,  $\emptyset \subset L \subseteq X$  y  $\emptyset \subset R \subseteq Y$ . Entonces,  $L \cup R$  es una biclique si y sólo si existe  $A \subseteq V(\mathcal{D}(G))$  tal que  $L = \ell(Q(A))$  y  $R = r(P(A))$ .*

Con el Corolario 21 podemos distinguir las bicliques de  $G$  en  $\mathcal{D}(G)$  a partir de los conjuntos  $A \subseteq V(D)$  tales que  $P(A) \neq \emptyset$ . Resta caracterizar las bicliques propias.

**Teorema 22.** *Sea  $G$  un grafo de oposiciones propias,  $D = \mathcal{D}(G)$  y  $A \subseteq V(D)$  tal que  $P(A) \neq \emptyset$ . Entonces,  $B = \ell(Q(A)) \cup r(P(A))$  es una biclique propia de  $G$  si y sólo si  $P(A) \cap Q(A) \neq \emptyset$ . Más aún, si  $B$  es una biclique propia y  $v \in P(A) \cap Q(A)$  para  $A \subseteq V(D)$ , entonces  $(\ell(v), r(v))$  es la arista propia de  $B$ .*

*Demostración.* Si  $B = \ell(Q(A)) \cup r(P(A))$  es una biclique de  $G$  con arista propia  $(x, op(x))$ , entonces  $v(op(x)) \in P(A)$  y  $v(op(x)) = v(x) \in Q(A)$ . Luego,  $P(A) \cap Q(A) \neq \emptyset$ .

Para la recíproca, observemos primero que  $B$  es una biclique, por Corolario 21. Sea  $v \in P(A) \cap Q(A)$ , e  $y$  un vecino de  $\ell(v)$  en  $G$ . Por definición de  $\mathcal{D}$ ,  $v(y) \rightarrow v$  es una arista de  $D$ . Como  $v \in P(A)$ , sabemos que  $v \rightarrow q$  es un arista de  $D$  para todo  $q \in Q(A) \setminus \{v\}$ . Luego, por Teorema 16,  $v(y) \rightarrow q$  es una arista de  $D$  para todo  $q \in Q(A)$ , implicando que  $y \in P(A)$ . Análogamente, si  $x$  es vecino de  $r(v)$ , entonces  $v(x) \in Q(A)$ . Por lo tanto,  $\ell(Q(A)) = N(\ell(v))$  y  $r(P(A)) = N(r(v))$ , obteniéndose, por Corolario 5, que  $(\ell(v), r(v))$  es la arista propia de  $B$ .  $\square$

Verificando el teorema anterior en todos los subconjuntos de  $V(D)$  podemos determinar las bicliques con arista propia en  $G$ .

**Corolario 23.** *Sea  $G$  un grafo de oposiciones propias y  $D = \mathcal{D}(G)$ . Entonces,  $G$  es biclique irreducible si y sólo si para todo  $A \subseteq V(D)$  tal que  $P(A) \neq \emptyset$  se cumple que  $P(A) \cap Q(A) \neq \emptyset$ .*

Algorítmicamente, la caracterización no resulta muy eficiente, ya que requiere examinar todos los subconjuntos de  $V(D)$ . Seguidamente mostramos que, en realidad, basta revisar sólo los subconjuntos de  $V(D)$  que tienen exactamente dos elementos. Para formalizar este resultado, conviene definir los digrafos reticulados. Decimos que un digrafo  $D$  es *reticulado* si es transitivo y para todo par de vértices  $v, w \in V(D)$  tal que  $P(\{v, w\}) \neq \emptyset$  se cumple que  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\}) \neq \emptyset$ . El término reticulado surge de que para cada conjunto  $\{v, w\}$  tal que  $P(\{v, w\}) \neq \emptyset$  sucede que existe un vértice  $u$  tal que  $u \rightarrow v$  y  $u \rightarrow w$  o bien, sin pérdida de generalidad,  $u = v$  y  $v \rightarrow w$ . Es decir, ambos elementos tienen un supremo común en el orden parcial  $\leq_D$  definido como

$$x \leq_D y \text{ si y sólo si } x = y \vee x \rightarrow y$$

Dado que  $D$  es transitivo, todo par de elementos en  $S(\{v, w\})$  tiene un supremo y, en consecuencia  $S(\{v, w\}) \cup \{u\}$  es un semirretículo. Tener en cuenta que no afirmamos que  $D$  es un semirretículo. Utilizando estos términos, demostramos que  $G$  es biclique irreducible sólo si  $V(D)$  es un digrafo reticulado. En la prueba son importantes los vértices que no poseen predecesores dentro de un cierto conjunto. Escribiremos

$$\lceil A \rceil = \{v \in A \mid w \rightarrow v \notin D \text{ para todo } w \in A\},$$

para cualquier  $A \subseteq V(D)$ .

**Teorema 24.** *Sea  $G$  un grafo de oposiciones propias y  $D = \mathcal{D}(G)$ . Entonces,  $G$  es biclique irreducible si y sólo si  $D$  es un digrafo reticulado.*

*Demostración.* Si  $G$  es biclique irreducible, entonces en  $D$ ,  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\}) \neq \emptyset$  por Teorema 16 y Corolario 23.

Para la recíproca, supongamos que  $G$  no es biclique irreducible. Luego, por Corolario 21, existe  $A \subseteq V(D)$  tal que  $\ell(Q(A)) \cup r(P(A))$  es una biclique que no es propia. Por Teorema 22,  $P(A) \cap Q(A) = \emptyset$ . Por lo tanto, como  $D$  es transitivo por el Teorema 16, obtenemos que  $\lceil Q(A) \rceil$  tiene al menos dos elementos  $v, w$ . De otra forma, el único elemento de  $\lceil Q(A) \rceil$  también pertenecería a  $P(A)$ .

Veamos que  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\}) = \emptyset$ . Supongamos, para obtener una contradicción, que  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\})$  tiene un elemento  $z$ . Como  $P(A) \subseteq P(\{v, w\})$ , ocurre que  $p \rightarrow z$  para todo  $p \in P(A) \setminus \{z\}$ . Pero entonces,  $z \in S(P(A)) = Q(A)$ , contradiciendo el hecho de que  $v, w \in \lceil Q(A) \rceil$ .  $\square$

### 3.5. Algoritmo de reconocimiento

El Teorema 24, además de una caracterización, proporciona un algoritmo para determinar si un grafo bipartito  $H$  es biclique irreducible. Recordemos que, como vimos en el Corolario 4 de la Sección 2.2,  $H$  es biclique irreducible si y sólo si su reducción  $G$  es biclique irreducible. En la Sección 3.1 (Teorema 10) vimos que  $G$  es biclique irreducible

sólo si  $G$  es un grafo de oposiciones duales. Luego,  $G$  admite un digrafo de oposiciones duales  $D$ , tal como los definimos en la Sección 3.2. Dicho digrafo  $D$  debe ser transitivo para que  $G$  sea biclique irreducible (Teorema 16). Más aún, por Teorema 24,  $G$  es biclique irreducible si y sólo si  $D(G)$  es un digrafo reticulado. Estos resultados se resumen en el siguiente teorema y en el Algoritmo 3.1 se utiliza para resolver el problema de reconocimiento.

**Teorema 25.** *Un grafo bipartito  $H$  es biclique irreducible si y sólo si la reducción  $G$  de  $H$  es de oposiciones duales y  $D(G)$  es un digrafo reticulado.*

Mostramos el algoritmo que verifica esta condición.

---

**Algoritmo 3.1** Reconocimiento de grafos bipartitos biclique irreducibles

---

**Entrada:** Un grafo bipartito  $H$

**Salida:** verdadero si  $H$  es biclique irreducible. En caso contrario, falso.

1.  $G \leftarrow$  reducción  $H$
  2. Si  $G$  no es de oposiciones duales, entonces **devolver falso**
  3.  $D \leftarrow \mathcal{D}(G)$
  4. Si  $D$  no es transitivo, entonces **devolver falso**
  5. **Devolver verdadero** si  $D$  es un digrafo reticulado. En caso contrario, **devolver falso**.
- 

En las secciones siguientes discutimos la implementación de cada paso del algoritmo, cuyas complejidades se resumen en la Tabla 3.1. De acuerdo a estas complejidades, el Algoritmo 3.1 toma tiempo  $O(nm)$  con  $m = |E(G)|$  y  $n = |V(G)|$  para reconocer si  $H$  es biclique irreducible.

**Teorema 26.** *El problema de determinar si un grafo bipartito  $H$  es biclique irreducible se puede resolver en tiempo  $O(nm)$ .*

Recordemos que el algoritmo naif de la sección 2.1 posee una complejidad temporal  $O(m^2n)$ .

### 3.5.1. Paso 1: reducción de $H$

El problema de reducir es conocido en la literatura por los grafos de distancia hereditaria [13]. En su reconocimiento se remueven vértices *pendientes* (vértices de grado 1), mellizos y gemelos. Damos detalles de las propiedades que permiten una implementación eficiente.

El concepto principal del algoritmo es el de la partición en  $W$ -mellizos de un grafo  $H$ . Para  $W \subseteq V(G)$ , decimos que  $u, v \in V(H)$  son  $W$ -mellizos cuando  $N_W(u) = N_W(v)$ .

Paso	Complejidad
1. Reducción de $H$	$O(m + n)$
2. Oposiciones duales	$O(m)$
3. Cálculo de $\mathcal{D}(G)$	$O(m + n)$
4. Verificar que $D$ es transitivo	$O(m^{\frac{3}{2}})$
5. Verificar que $D$ es reticulado	$O(nm)$

Tabla 3.1: complejidades de los pasos del Algoritmo 3.1.

Notar que  $u$  y  $v$  son mellizos en  $V(H)$  si y sólo si  $u$  y  $v$  son  $V(H)$ -mellizos. Luego, particionar  $V(H)$  en conjuntos de mellizos es lo mismo que particionar  $V(H)$  en  $V(H)$ -mellizos. Utilizando esta propiedad, el algoritmo para obtener la reducción de  $H$  tiene dos pasos. Primero se genera una partición en  $V(H)$ -mellizos y luego se construye el subgrafo inducido de  $H$  que tiene exactamente un representante de cada clase.

Para construir la partición en  $V(H)$ -mellizos, el algoritmo comienza con la partición  $\{V(H)\}$  de  $V(H)$  en  $\emptyset$ -mellizos y procede en forma inductiva, por cada vértice  $w$ , de acuerdo al siguiente lema.

**Lema 27.** *Sea  $H$  un grafo,  $W \subseteq V(H)$  y  $w \in V(H) \setminus W$ . Entonces, dos vertices  $u, v$  son  $(W \cup \{w\})$ -mellizos si y sólo si  $u, v$  son  $W$ -mellizos y  $N_{\{w\}}(u) = N_{\{w\}}(v)$ .*

**Corolario 28.** *Sea  $H$  un grafo,  $W \subseteq V(H)$ ,  $w \in V(H) \setminus W$ . Si  $\mathcal{W}$  es la partición de  $V(H)$  en  $W$ -mellizos, entonces  $\{X \cap N(w), X \setminus N(w) \mid X \in \mathcal{W}\}$  es la partición de  $V(H)$  en  $(W \cup \{w\})$ -mellizos.*

La construcción de la partición en  $(W \cup \{w\})$ -mellizos a partir de la partición en  $W$ -mellizos toma tiempo  $O(d(w))$ , utilizando la técnica de *partition refinement* [12]. Una implementación detallada del algoritmo con esta técnica puede encontrarse en [21], en la que se logra un complejidad temporal  $O(|V(H)| + |E(H)|)$ .

### 3.5.2. Paso 2: verificación de oposiciones duales

Recordemos que un grafo bipartito reducido  $G$  es de oposiciones duales cuando  $|OP(v)| = 1$  y  $op(op(v)) = v$  para todo  $v \in V(G)$  (ver Sección 3.1). Por definición,  $OP(v)$  es el conjunto de los vecinos de  $v$  que tienen menor grado, que se puede conseguir recorriendo  $N(v)$  y consultando  $d(w)$  para todo  $w \in N(v)$ . Luego, en un primer paso se determina si  $|OP(v)| = 1$  para todo  $v \in V(G)$ , y en un segundo paso se recorren cada  $v \in V(G)$  para verificar que  $op(op(v)) = v$ . Claramente, el procedimiento puede realizarse en tiempo  $O(|V(G)| + |E(G)|)$ .

Para la implementación de los pasos que siguen, supondremos que, dado  $v \in V(G)$ ,  $op(v)$  se puede obtener en tiempo  $O(1)$ . Para ello,  $op(v)$  se almacena junto a  $v$  en la estructura de datos que representa a  $G$ .

Los certificados de este algoritmo son

- Los pares de opuestos, si el procedimiento tuvo éxito.
- Un vértice y al menos dos de sus vértices vecinos con menor grado, si se falla por el caso en que  $|OP(v)| > 1$  para algún  $v \in V(H)$ .
- Una terna de vértices  $u, v, w$  tales que  $op(u) = v$ , pero  $op(v) = w$ , en el caso en que no se cumpla  $op(op(u)) = u$ .

### 3.5.3. Paso 3: generación del digrafo de opuestos

En la Sección 3.1 observamos que si  $G = (X \cup Y)$  es de oposiciones duales, entonces  $|X| = |Y|$ . Para obtener el digrafo de opuestos de  $G$  podemos considerar que conocemos la partición  $\{X, Y\}$  y seguir el procedimiento del Algoritmo 3.2.

---

**Algoritmo 3.2** Digrafo de opuestos

---

**Entrada:** un grafo  $G = (X \cup Y, E)$  de oposiciones duales.

**Salida:**  $\mathcal{D}(G)$ , el digrafo de opuestos de  $G$ .

1.  $V_D \leftarrow \{v(x) \mid x \in X\}$
  2.  $E_D \leftarrow \emptyset$
  3. Para cada arista  $xy \in E$  tal que  $y \neq op(x)$
  4.  $E_D \leftarrow E_D \cup \{v(y) \rightarrow v(x)\}$
  5. **Devolver**  $D = (V_D, E_D)$
- 

En cada vecindad de los vértices de  $G$  puede estar marcado el correspondiente opuesto al ejecutar el algoritmo de la Sección 3.5.2. Recordemos que  $op(v)$  se almacena junto a  $v$  luego de la ejecución del algoritmo de la sección anterior. Luego, el Algoritmo 3.2 recorre una vez los vértices y los ejes del grafo de entrada. El digrafo resultado se almacena con listas de adyacencia. En consecuencia el orden es  $O(|V(G)| + |E(G)|)$ .

### 3.5.4. Paso 4: verificación de transitividad

Por definición, un digrafo  $D$  es transitivo si para toda terna de vértices  $u, v, w$  tales que  $u \rightarrow v \in E(D)$  y  $v \rightarrow w \in E(D)$ , sucede que  $u \rightarrow w \in E(D)$ . De forma equivalente,  $D$  es transitivo si para todo  $v \in V(D)$  ocurre que  $u \rightarrow w \in E(D)$  para cualquier  $u \in N^-(v)$  y  $w \in N^+(v)$ . En otras palabras, la cantidad de aristas  $u \rightarrow w$  de  $E(D)$  tales que  $u \in N^-(v)$  y  $w \in N^+(v)$  debe ser la máxima posible, es decir  $|N^-(v)||N^+(v)|$ . El Algoritmo 3.3 resume este procedimiento.

---

**Algoritmo 3.3** Verificación de transitividad

---

**Entrada:** Un grafo orientado  $D$

**Salida:** Verdadero si  $D$  es transitivo

1. **Para cada**  $v \in V(D)$
  2.     Computar el subdigrafo  $D_v$  de  $D$  inducido por  $N(v)$ .
  3.     Calcular la cantidad  $t$  de aristas  $u \rightarrow w$  de  $D_v$  tales que  $u \in N^-(v)$  y  $w \in N^+(v)$ .
  4.     **Si**  $t \neq |N^-(v)||N^+(v)|$ , **devolver falso**
  5. **Devolver verdadero**
- 

Para la implementación del Algoritmo 3.3, vamos a utilizar la estructura *h-graph* propuesta en [15]. Dicha estructura permite representar cualquier digrafo  $D$ . La ventaja de representar un digrafo  $D$  con la estructura *h-graph* es que el subdigrafo de  $D$  inducido por  $N(v)$ , para cualquier  $v \in V(D)$ , puede obtenerse eficientemente. Como paso previo a la aplicación del Algoritmo 3.3, se construye el *h-graph* correspondiente a  $D$ . Dicha construcción requiere tiempo  $O(\alpha(D)|E(D)|)$  [15]. Asimismo, el tiempo total requerido por todas las ejecuciones de la instrucción 2 es  $O(\alpha(D)|E(D)|)$  [15]. Para la instrucción 3, primero marcamos cada vértice  $w$  de  $D_v$  para poder identificar en tiempo  $O(1)$  si  $w \in N^-(v)$  ó  $w \in N^+(v)$ . Luego, se recorren todas las aristas de  $D_v$  para contar aquellas aristas  $u \rightarrow w$  tales que  $u \in N^-(v)$  y  $w \in N^+(v)$ . El costo de esta instrucción es lineal con respecto a la cantidad de aristas de  $D_v$ . Entonces, el tiempo que se requiere para todas las ejecuciones de la instrucción 3 es también  $O(\alpha(D)|E(D)|)$  [15]. En resumen, el Algoritmo 3.3 requiere tiempo  $O(\alpha(D)|E(D)|)$ . Como vimos en la Sección 3.2,  $|E(D)| = O(|E(G)|)$ .

Veamos que  $\alpha(D)$  es  $O(\sqrt{|E(G)|})$ . Por [4],

$$\alpha(D) \leq \left\lceil \sqrt{\frac{|E(D)|}{2}} \right\rceil \leq \left\lceil \sqrt{\frac{m-n}{2}} \right\rceil$$

con  $m = |E(G)|$  y  $n = |V(G)|$ . Luego,  $\alpha(D)$  es  $O(\sqrt{|V(G)|})$  resultando el Algoritmo 3.3 de una complejidad temporal de  $O(|E(G)|^{\frac{3}{2}})$ . Si bien la cota puede ser holgada, es suficiente para no superar la complejidad que anticipamos para el algoritmo de reconocimiento de los grafos bipartitos biclique irreducibles.

### 3.5.5. Paso 5: verificación de reticulado

El último paso del algoritmo de reconocimiento consiste en determinar si  $D$  es un digrafo reticulado. Para ello, tenemos que verificar que  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\}) \neq \emptyset$  para

todo par de vértices  $v, w \in V(D)$  tales que  $P(\{v, w\}) \neq \emptyset$ . El siguiente lema muestra una propiedad con la cual se puede realizar esta verificación.

**Lema 29.** *Sea  $D$  un digrafo transitivo y  $v, w \in V(D)$  tales que  $P(\{v, w\}) \neq \emptyset$ . Entonces,  $P(\{v, w\}) \cap Q(\{v, w\}) \neq \emptyset$  si y sólo si  $|P(\{v, w\})| = 1 + \max\{d^-(p) \mid p \in P(\{v, w\})\}$ .*

*Demostración.* Sean  $P = P(\{v, w\})$  y  $Q = Q(\{v, w\})$ . Supongamos primero que existe  $p \in P \cap Q$ . Por definición, como  $p \in Q$ , obtenemos que  $x \rightarrow p$  para todo  $x \in P \setminus \{p\}$ . Por otra parte, como  $D$  es transitivo, ocurre que si  $x \rightarrow p$ , entonces  $x \rightarrow v$  y  $x \rightarrow w$ . Luego,  $P = N^-(p) \cup \{p\} = N^-[p]$ , con lo cual  $|P| = d^-(p) + 1$ .

Supongamos ahora que  $|P| = 1 + d^-(p)$ , donde  $p$  es uno de los vértice de mayor grado de entrada, de entre aquellos que pertenecen a  $P$ . Como  $D$  es transitivo,  $N^-[p] \subseteq P$  y por lo tanto  $P = N^-[p]$ . En otras palabras,  $x \rightarrow p$  para todo  $x \in P$ , es decir  $p \in Q$ .  $\square$

Para determinar si un digrafo  $D$  es reticulado, basta invocar el Algoritmo 3.4 con entrada  $D$ . La correctitud de dicho algoritmo es consecuencia directa del lema anterior.

---

**Algoritmo 3.4** Verificación de reticulado

---

**Entrada:** un digrafo transitivo  $D$ .

**Salida:** verdadero si y sólo si  $D$  es reticulado.

1. Para cada par de vértices  $v, w$
  2.  $P \leftarrow \text{Pred}(\{v, w\})$
  3. Si  $|P| \neq 1 + \max\{d^-(p) \mid p \in P\}$ , **devolver falso**.
  4. **devolver verdadero**.
- 

Consideremos la implementación del Algoritmo 3.4. Para revisar cada par de vértices, primero fijamos el vértice  $v$  y luego recorremos cada  $w \in V(G) \setminus \{v\}$ . Antes de iniciar el recorrido de  $V(G) \setminus \{v\}$ , marcamos cada uno de los vértices de  $N^-(v)$ . Para este paso, basta hacer una pasada a  $N^-(v)$  en tiempo  $O(d^-(v))$ . Luego, para computar  $P$  en el Paso 2, basta con inspeccionar  $N^-(w)$  y guardar aquellos vértices marcados. Esta verificación cuesta tiempo  $O(d^-(w))$ . Finalmente, el Paso 3 se implementa observando cada  $p \in P$  y verificando si  $1 + d^-(p) = |P|$ . Por construcción  $|P| \leq d^-(w)$  y, por lo tanto, este paso también requiere tiempo  $O(d^-(w))$ . En resumen, el Algoritmo 3.4 requiere tiempo

$$O\left(\sum_{v \in V(G)} \left(d(v) + \sum_{w \in V(G) \setminus \{v\}} d(w)\right)\right) = O(nm)$$

### 3.5.6. Certificación

Como certificado negativo del Algoritmo 3.1 proponemos un par  $(B, c)$  en donde

- $B$  es una biclique de  $H$  sin aristas propias.
- $c$  es una función  $c : E(B) \rightarrow V(H)$  que relaciona cada arista  $xy$  de  $B$  con un vértice del grafo  $H$  de manera tal que  $\{x, y, c(xy)\}$  inducen un bicompleto en  $H$  y  $c(xy) \notin V(B)$ .

Con la función propuesta las bicliques que contienen a cada bicompleto  $\{x, y, c(xy)\}$  comparten la arista  $xy$  con  $B$ .

El algoritmo de comprobación que debe verificar

1.  $B$  es una biclique de  $H$ .
2.  $c(xy)$  no pertenece  $V(B)$ .
3.  $c(xy)$  es adyacente a  $xy$ .

El paso más costoso del algoritmo es la verificación de  $B$  biclique de orden  $O(E(H))$ .

El Algoritmo 3.1 puede obtener respuesta negativa en los pasos 2, 4 y 5.

Tanto en los pasos 2 (verificación de oposiciones duales) y 4 (verificación de transitividad) conseguimos la biclique del certificado a partir de un bicompleto de la forma  $\{x\} \cup \{y, y'\}$ . En cada caso, al bicompleto le aplicamos la operación de *extensión a biclique* para obtener una biclique que contiene al bicompleto. La operación de extensión la definimos con el Algoritmo 3.5. En él, primero se toma la intersección de las vecindades de los elementos del conjunto  $\{y, y'\}$  y luego se toma la intersección de las vecindades del resultado anterior y la vecindad de  $x$ . El Algoritmo 3.5 es  $O(E(G))$ .

---

#### Algoritmo 3.5 Extensión a biclique

---

**Entrada:** un bicompleto  $\{x\} \cup \{y, y'\}$

**Salida:** una biclique  $B$  que contiene a los vértices  $x, y, y'$  para todo  $x \in N(y) \cap N(y')$

1.  $X' \leftarrow N(y) \cap N(y')$
  2.  $X \leftarrow \{x\} \cup X'$
  3.  $Y \leftarrow \bigcap_{x \in X} N(x)$
  4. **devolver**  $B = X \cup Y$
- 

En lo que sigue mostraremos las maneras de encontrar los bicompletos a extender.

**Respuesta negativa en el Paso 2.** El grafo  $G$ , la reducción de  $H$ , no es de oposiciones duales. Puede deberse a dos situaciones:

**Caso 1:** existe  $x \in V(G)$  tal que  $|op(x)| > 1$ , es decir, existen  $y, y' \in OP(x)$ . Extendemos el bicompleto  $\{x\} \cup \{y, y'\}$  a una biclique  $B = X \cup Y$  con  $x \in X$ . Dado que en  $G$  no hay vértices mellizos, todo vértice en  $Y$  posee un vecino  $c(y)$  que no pertenece a  $X$ . Consideramos  $c(xy) = c(y)$  para todo  $x \in X, y \in Y$ .

**Caso 2:** existe  $x \in X$  tal que  $op(x) = y$ , pero  $op(y) \neq x$ . Llamemos  $x'$  a uno de los opuestos de  $y$ . Dado que  $d(x) > d(x')$ , existe  $y'$  vecino de  $x$ , el cual no es adyacente a  $x'$ . Consideraremos una biclique que contenga al bicompleto  $\{x\} \cup \{y, y'\}$ . Podemos razonar de la misma forma que en el caso anterior y elegir un  $c(y) \in N(y) \setminus X$  para cada  $y \in Y$ . Luego tomamos  $c(xy) = c(y)$ .

**Respuesta negativa en el Paso 4.** En caso de que el Algoritmo 3.1 de respuesta negativa como consecuencia de la no transitividad de  $D = \mathcal{D}(G)$ , es debido a que se halla un vértice<sup>1</sup>  $v_2$  en  $D$  tal que existen  $v_1 \in N^-(v_2)$  y  $v_3 \in N^+(v_1)$  tales que  $v_1 \not\rightarrow v_3$ . El bicompleto a considerar para la operación de extensión en  $G$  es  $\{x_2\} \cup \{y_1, y_2\}$  siendo  $x_i = \ell(v_i)$  e  $y_i = r(v_i)$ . Como resultado obtenemos la biclique  $B = X \cup (\{y_1, y_2\} \cup Y')$ . Definimos  $c(y)$  como sigue: dado que  $y_2 = op(x_2)$ , para todo  $y \in N(x_2)$  sucede que  $d(y_2) < d(y)$ . También, como  $Y' \subseteq N(x_2)$  existe  $c(y') \notin N(y_2)$  para todo  $y' \in Y'$ . Luego, tales  $c(y')$  no pertenecen a  $B$ . Algorítmicamente, encontrar  $c(y')$  se realiza eligiendo un vértice de la vecindad de cada  $y'$ , exceptuando los vértices vecinos de  $y_2$ . Nos resta definir  $c(y_1) = x_1$  y  $c(y_2) = x_3$ . En base a lo anterior definimos  $c(xy) = c(y)$ .

**Respuesta negativa en el Paso 5.** Si el grafo  $G$  no es bipartito biclique irreducible, podemos mostrar una biclique tal que ninguna de sus aristas es propia. El par de vértices  $(v, w)$  con el que se genera la respuesta negativa del algoritmo 3.4, según el Corolario 21, definen la biclique  $B = \ell(Q) \cup r(P)$  con  $Q = Q(\{v, w\})$  y  $P = P(\{v, w\})$ . En la biclique  $B$  no hay ninguna arista de la forma  $(x, op(x))$ , por lo tanto  $B$  no posee aristas propias y podemos definir la función  $c$  como  $c(x, y) = op(x)$ .

El algoritmo para conseguir los conjuntos  $P$  y  $Q$  realiza la intersección de las vecindades entrantes de  $v, w$  para conseguir  $P$  y luego la intersección de las vecindades salientes de los elementos de  $P$ . Tales operaciones son del orden  $O(E(D))$ .

---

<sup>1</sup>La elección de los subíndices sigue la del Teorema 16.

## 4 Grafos biclique irreducible hereditarios

El propósito de este capítulo es definir y caracterizar los grafos biclique irreducibles hereditarios. Iniciamos detallando la motivación y definimos la clase. Seguido, mostramos algunos lemas técnicos necesarios para la caracterización por subgrafos inducidos prohibidos, con la cual concluimos la sección.

Como mencionamos en la Introducción en el Capítulo 1, los grafos clique irreducibles hereditarios son aquellos que cumplen la propiedad de clique irreducible para todo subgrafo inducido. Tienen reconocimiento por subgrafos inducidos prohibidos que son los que se muestran en la figura 4.1. Esta clase, coincide con la de los grafos clique-Helly.

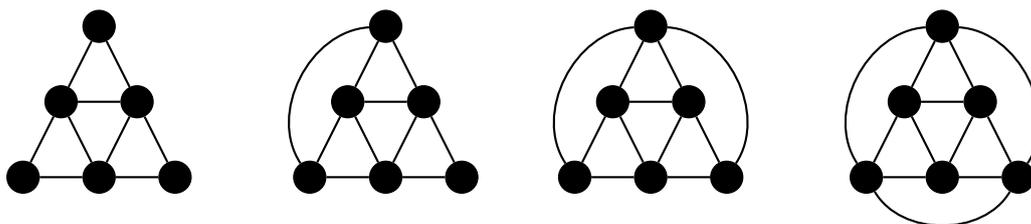


Figura 4.1: grafos prohibidos para las clases biclique-Helly hereditario y biclique irreducible hereditario.

Los grafos biclique-Helly hereditarios también tienen una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos (ver figura 4.2) y motivados por la equivalencia de los grafos clique irreducible hereditarios y los clique-Helly hereditarios decidimos estudiar la clase de los grafos biclique irreducible hereditarios.

Comencemos dando una definición formal de la clase a estudiar.

### 4.1. Definición de la clase

Inspirados en la definición de *grafos clique irreducible hereditarios*, extenderemos la noción para bicliques. Un grafo  $G$  es *biclique irreducible hereditario* si cualquier subgrafo inducido  $H$  de  $G$  es biclique irreducible. Es decir, toda biclique de  $H$  posee una arista propia.

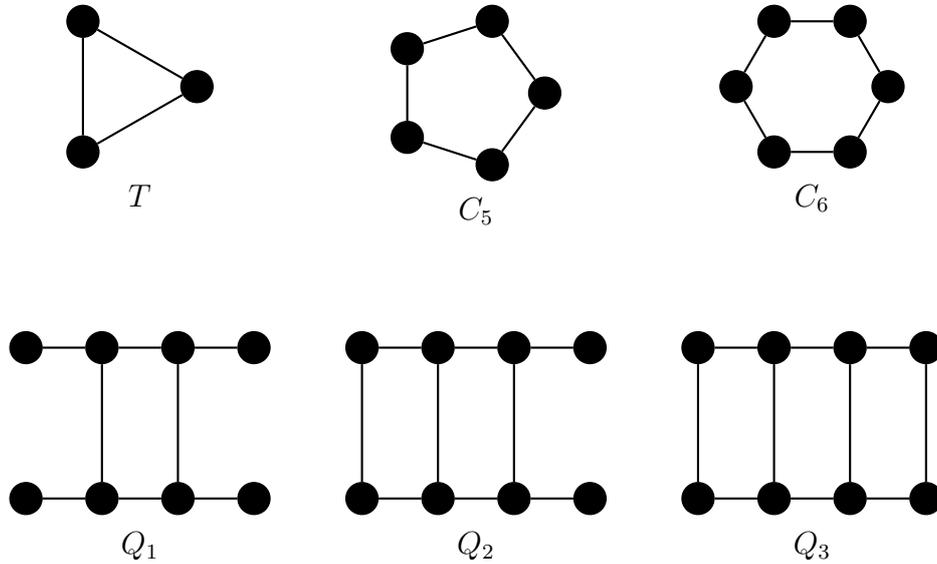


Figura 4.2: subgrafos prohibidos para los grafos biclique-Helly hereditarios.

## 4.2. Caracterización

El objetivo de esta sección es caracterizar la clase de grafos biclique irreducible hereditarios. La caracterización lograda es por subgrafos inducidos prohibidos. Dichos grafos son los que se conocen como  $P_5$ , (el camino de cinco vértices),  $C_5$  (el ciclo de cinco vértices), *toro*, *barrilete*, *mariposa* y *gema* que se pueden ver en la figura 4.3.

Se puede observar que  $P_5$  es subgrafo de  $C_5$ , *toro* es subgrafo de *barrilete*, y ambos, junto con *mariposa* son subgrafos de *gema*. Esto se debe a que en algunas situaciones de la prueba hay adyacencias que son irrelevantes. Por ejemplo, una arista de un  $C_5$  puede no afectar a alguna observación que se quiere realizar.

Comencemos analizando algunas propiedades de los grafos que no poseen inducidos a los grafos mencionados. El siguiente lema se trata de una observación técnica que usaremos en afirmaciones más conceptuales.

**Lema 30.** *Sea  $G$  un grafo sin  $P_5$ ,  $C_5$ , barrilete o gema inducidos,  $B = X \cup Y$  una biclique de  $G$ ,  $v \notin B$  uno de los vértices que mayor cantidad de vecinos tiene en  $X$  de entre aquellos que no posee vecinos en  $Y$ . Si  $x \in X \setminus N_X(v)$ , entonces  $N_Y(w) = Y$  para todo  $w \in N(x) \setminus B$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $w \notin B$  vecino de  $x$  que no es adyacente a algún  $y \in Y$ . Luego,  $N_X(v) \subset N_X(w)$ : si no fuera así,  $vx'yxw$  inducirían  $P_5$  o  $C_5$  para cualquier vértice  $x' \in N_X(v)$ , dependiendo de la adyacencia de  $v$  con  $w$  (ver la figura 4.4).

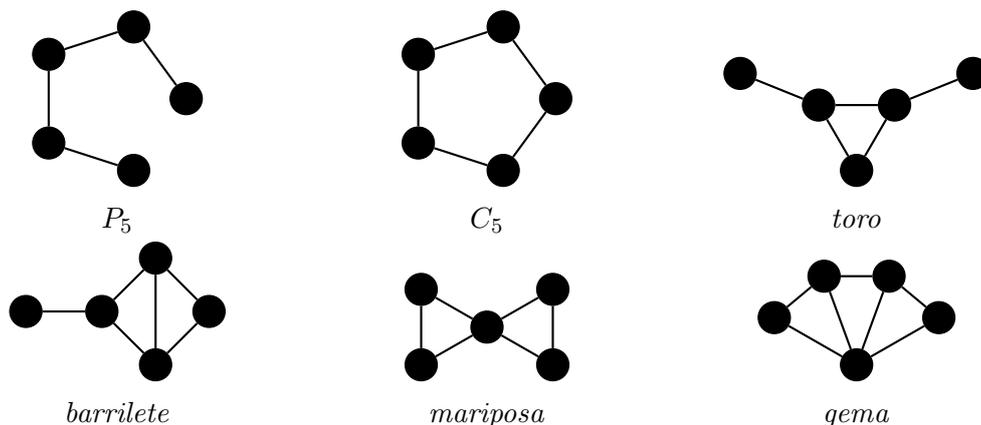


Figura 4.3: subgrafos prohibidos para los grafos biclique irreducibles hereditarios.

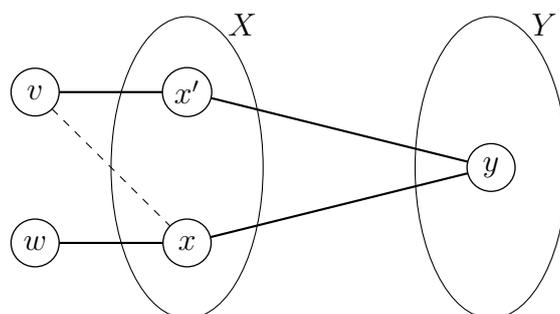


Figura 4.4:  $w$  sin vecinos en  $Y$ . Se puede observar que  $vx'yxw$  inducen  $P_5$  o  $C_5$  según la existencia de la arista  $vw$ .

Entonces, como  $x' \in N(w)$  y  $v$  es el vértice que más vecinos tienen en  $X$  de entre los que no tienen vecinos en  $Y$ , existe  $y' \in Y$  vecino de  $w$ . Pero en ese caso,  $vx'y'xw$  inducen un barrilete o una gema, dependiendo de si  $v$  y  $w$  son vecinos.  $\square$

La situación del lema anterior es bastante específica, pero lo utilizamos para probar la propiedad que le sigue. En ella observamos la relación que tienen las bicliques sin aristas propias y los vértices adyacentes a ellas. Mostraremos que los vértices que tienen alguna adyacencia en una biclique sin aristas propias poseen vecinos en ambos conjuntos independientes de la biclique.

**Lema 31.** *Sea  $G$  un grafo sin ninguno de los grafos de la Figura 4.3 inducidos. Si  $B = X \cup Y$  es una biclique de  $G$  sin aristas propias, entonces todo vértice  $v \notin B$  con vecinos en  $B$  tiene adyacencias tanto en  $X$  como en  $Y$ .*

*Demostración.* Por el contrarrecíproco supongamos que

$$W = \{w \in V(G) \mid w \notin B \wedge N_X(w) \neq \emptyset \wedge N_Y(w) = \emptyset\}$$

no es vacío y consideremos  $w \in W$  tal que  $|N_X(w)| \geq |N_X(w')|$  para todo  $w' \in W$ . Podemos distinguir dos casos:

**Caso 1:** supongamos que existen vértices que no pertenecen a  $B$  y que tienen sólo vecinos en  $Y$ . Denotemos con  $Z$  a ese conjunto y, llamemos  $z$  al vértice en  $Z$  tal que  $|N_Y(z)| \geq |N_Y(z')|$  para todo  $z' \in Z$ .

El hecho de que  $w$  no pertenezca a  $B$  implica la existencia de  $x \in X$  no vecino de  $w$ . Por la misma razón, existe  $y \in Y$  no adyacente a  $z$ .

Por hipótesis, la arista  $xy$  no es propia de  $B$ , es decir, pertenece a otra biclique. Tanto  $z$  como  $w$  verifican las hipótesis del Lema 30. Luego, los vértices vecinos de  $x$  no pertenecientes a  $B$  deben ser adyacentes a todos los vértices de  $Y$ . La misma situación ocurre para cualquier vértice vecino de  $y$  fuera de  $B$ , en cuyo caso debe incluir a  $X$  en su vecindad. En consecuencia,  $xy$  es propia, lo cual es una contradicción que provino de suponer la existencia de  $z$  con vecinos sólo en  $Y$ .

**Caso 2:** analicemos la situación en que todos los vértices con adyacencias en  $Y$  tienen vecinos en  $X$ . Sea  $z$  uno de tales vértices con la menor cantidad de vecinos en  $X$ .

Primero notemos que  $z$  no puede ser vecino de ningún  $x' \in N_X(w)$ : en ese caso, según muestra la figura 4.5,  $wx'zyx$  inducen *toro*, *barrilete* o *gema* según la existencia de las aristas  $xz$  y  $wz$ , siendo  $y \in Y$  un vértice adyacente a  $z$ .

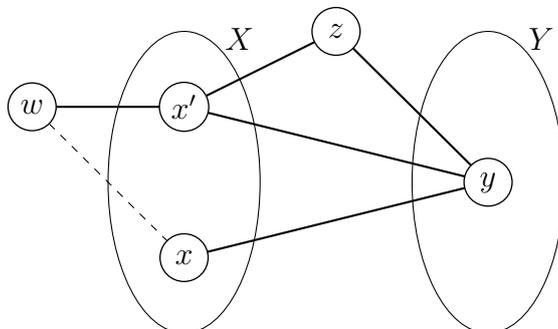


Figura 4.5: caso en el que un vértice  $z$  con vecinos en  $Y$  y, por lo tanto, en  $X$  es vecino de  $x' \in N(w)$ . Nótese que  $wx'zyx$  inducen *toro*, *barrilete* o *gema* dependiendo de las adyacencias de  $xz$  y  $wz$ .

Entonces  $z$  es vecino de  $x \notin N(w)$ . De acuerdo a las hipótesis, la arista  $xy$  no es propia de  $B$ , por lo tanto existe un vértice  $z'$  que por el Lema 30, es adyacente a  $y$ , pero no vecino de  $x$ . Debido a que  $z$  es uno de los vértices adyacentes a  $y$  con menos vecinos en  $X$ , existe  $x'' \in X$  vecino de  $z'$  y no adyacente a  $z$ . Esta última situación también es contradictoria porque, en tal caso,  $x''z'yx'$  inducen *mariposa* o *gema* dependiendo de si existe la arista  $zz'$  (ver figura 4.6).

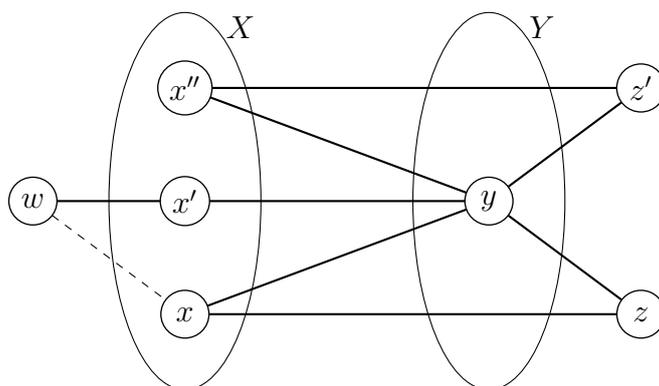


Figura 4.6: tampoco puede existir  $z'$  adyacente a  $y$ :  $x''z'y'x'z$  inducirían *mariposa* o *gema* dependiendo si  $zz' \in E(G)$ . No se excluye la posibilidad  $x = x''$ .

Luego de este análisis, observemos que la arista  $xy$  resulta ser propia de  $B$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $W = \emptyset$ .  $\square$

El teorema anterior ya nos da una idea del aspecto que tienen los grafos biclique irreducibles hereditarios en los que ninguna de las bicliques tiene aristas propias. Antes de continuar con la caracterización, necesitamos otra propiedad técnica. Ya mostramos que los vecinos a bicliques sin aristas propias tienen adyacencias en ambos conjuntos independientes. Ahora daremos un lema sobre los vértices con menor cantidad de vecinos en uno de los conjuntos independientes.

**Lema 32.** *Sea  $G$  un grafo sin barrilete o gema inducidos,  $B = X \cup Y$  una biclique de  $G$  y  $v$  un vértice de  $G$  adyacente a algún  $x \in X$  y con un vecino  $y \in Y$ . Si  $v$  es tal que para todo vértice  $z$  vecino de  $x$ ,  $|N_Y(v)| \leq |N_Y(z)|$ , entonces  $N_Y(v) \subseteq N_Y(w)$  para todo vértice  $w \in N(x) \setminus B$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $w$  es vecino de  $x$ . Como  $v$  es adyacente a  $x$  con menor cantidad de vecinos en  $Y$ , por el Lema 31,  $N_Y(w) \neq \emptyset$ . Afirmamos que  $N_Y(w) \subset N_Y(v)$ . En caso contrario y dependiendo de la adyacencia de  $v$  con  $w$ ,  $vyxwy'$  inducen *mariposa* o *gema* para algún  $y' \in N_Y(w) \setminus N_Y(v)$ . Tal vértice  $y'$  existe porque  $v$  es alguno de los vértices que menor cantidad de vecinos tiene en  $Y$ . La situación se muestra en la figura 4.7.  $\square$

El lema anterior tiene hipótesis muy fuertes y podemos decir que es un tecnicismo sólo necesario para concluir el teorema final de esta sección en el que caracterizamos a los grafos biclique irreducible hereditarios.

**Teorema 33.** *Un grafo  $G$  es biclique irreducible hereditario si y sólo si no posee como subgrafos inducidos a  $P_5$ ,  $C_5$ , toro, barrilete, mariposa o gema.*

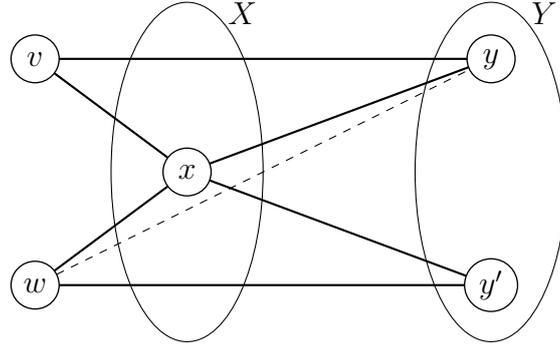


Figura 4.7: situación del Lema 32. En caso de que exista  $y'$  vecino de  $w$  pero no de  $v$ ,  $vyxwy'$  inducen mariposa o gema.

*Demostración.* Como se muestra en la figura 4.8, los grafos indicados tienen, al menos, una biclique sin aristas propias. Luego, si  $G$  es biclique irreducible hereditario no los puede contener como subgrafos inducidos.

Para probar la otra implicación, supongamos que  $G$  es un grafo que no tiene como subgrafos inducidos a ninguno de los grafos indicados y posee una biclique  $B = X \cup Y$  que no tenga aristas propias.

Sea  $v$  el vértice perteneciente a alguna biclique que comparte aristas con  $B$ , que posea menor cantidad de adyacencias en alguno de los conjuntos independientes de  $B$ . Sin pérdida de generalidad, diremos que  $v$  es el vértice que pertenece a alguna biclique que comparte aristas con  $B$  y que posee menor cantidad de vecinos en  $Y$ . Esto implica que existen vértices en  $Y$  que no son adyacentes a  $v$ . Por lo tanto, suponemos que  $v$  es adyacente a  $y' \in Y$ . Por el Lema 31,  $v$  posee algún vecino  $x \in X$ .

La arista  $xy'$  pertenece a alguna biclique a la que no pertenece  $v$  y que tampoco es  $B$ . De todas las que comparten la arista  $xy'$ , elijamos aquella que posea un vértice con la menor cantidad de adyacencias en  $X$ . Llamemos  $w$  a tal vértice. De nuevo, por el Lema 31,  $w$  tiene vecinos tanto en  $X$  como en  $Y$ .

El vértice  $w$  es sólo vecino a  $x$  o, excluyentemente, sólo vecino a  $y'$ . Como  $v$  es uno de los vértices adyacentes a  $x$  con menor cantidad de vecinos en  $Y$ , por el Lema 32,  $w$  es adyacente a  $y'$ .

Sea  $y \in Y \setminus N_Y(v)$ . Veamos que  $w$  es vecino  $y$ : en caso contrario  $wy'vxy$  inducen toro o barrilete (ver figura 4.9).

También,  $v$  debe ser vecino de todo  $x \in N_X(w)$ : fijemos  $x'$  en  $N_X(w)$ . Luego,  $v$  es vecino de  $x'$  y de  $w$ : si no fuera así,  $vy'x'wy$  inducirían un mariposa o gema, como se puede observar en la figura 4.10.

Luego, la arista  $x'y'$  pertenece a una biclique a la cual no pertenecen ni  $v$  ni  $w$ . Esa biclique tiene un vértice  $z$  que no pertenece a  $B$  y no adyacente a  $x'$  e  $y'$  simultáneamente. Pero tal  $z$  no existe: como  $v$  es el vértice adyacente a  $x'$  y a  $y'$  con menor cantidad de vecinos en  $Y$ , por el Lema 32, si  $z$  es vecino de  $x'$ , también es vecino de  $y'$ . Y si  $z$  es

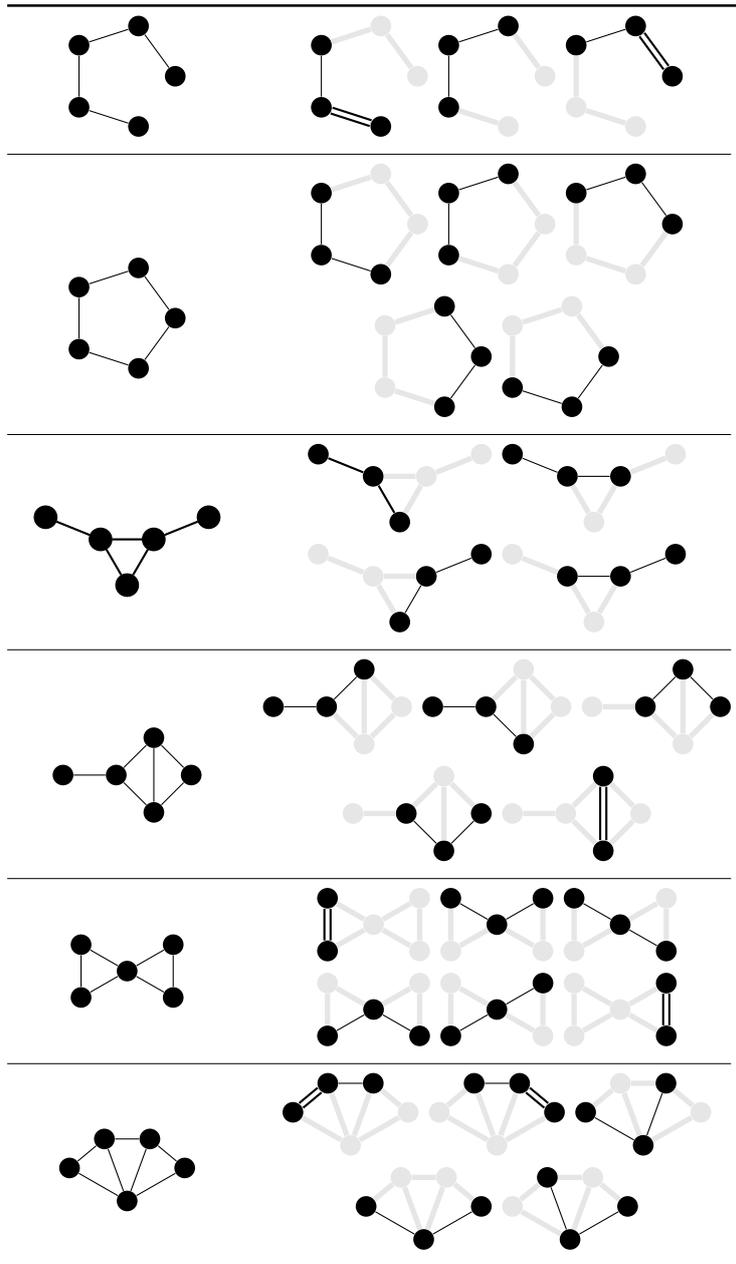


Figura 4.8: bicliques de los subgrafos prohibidos para la clase biclique irreducible hereditario. Se dibujan con doble línea las aristas propias.

vecino de  $y'$ , por el mismo Lema, también es vecino de  $x'$  ya que  $w$  es el vértice vecino de  $y'$  y  $x'$  con menor cantidad de vecinos en  $X$ . Entonces no existe  $z$  y la arista  $x'y'$  es propia de  $B$ , resultando una contradicción.  $\square$

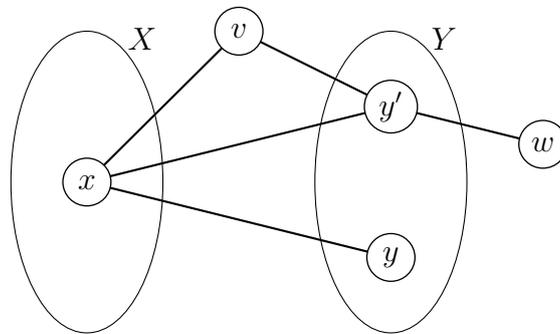


Figura 4.9: caso en el que  $w$  es vecino a un vértice en  $Y$  que no es adyacente a  $v$ . Se puede ver que  $wy'vxy$  inducen toro o barrilete.

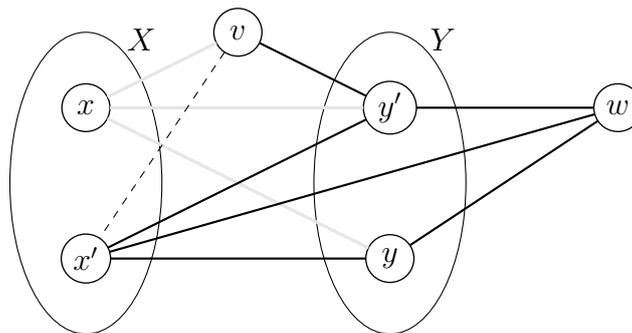


Figura 4.10: caso en el que  $v$  no es vecino de  $x' \in N_X(w)$ , en el que  $vy'x'wy$  inducen mariposa o gema. Las aristas de  $x$  se muestran sombreadas

## 5 Conclusión

El problema del reconocimiento de los grafos clique irreducible es tratable en términos algorítmicos. La posibilidad de listar cliques requiriendo un tiempo polinomial entre cada clique y la definición de la clase hacen que sea posible una búsqueda exhaustiva en tiempo polinomial. El procedimiento concluye hallando una clique sin aristas propias o agota las cliques del grafo. Esto mismo vale para el problema de los grafos biclique irreducibles.

En este trabajo decidimos hacernos la pregunta de si detrás de la definición de la clase de grafos biclique irreducibles existen estructuras que pueden ofrecer otras opciones de caracterización. En las primeras observaciones notamos que los vértices mellizos son accesorios en la determinación de la biclique irreducibilidad. Dado un grafo, éste y cualquiera de sus *trim*-reducciones están todos dentro o todos fuera de la clase.

En el capítulo 3, pudimos determinar que, al menos en el caso de los grafos bipartitos, el grafo debe respetar una forma. En primer lugar, los conjuntos independientes deben tener el mismo tamaño. Luego, al proponer el digrafo de opuestos, fueron más evidentes las bicliques propias del grafo ya que éstas son representadas por las vecindades de cada vértice. El digrafo propuesto también posee cierta estructura: debe ser transitivo. Con esta construcción, pudimos observar sin distracciones las aristas no propias a las bicliques —operaciones  $P$  y  $Q$ — y lograr la caracterización de la clase de grafos bipartitos biclique irreducibles. Aún así, la caracterización plantea la verificación de propiedades sobre el conjunto de partes de los vértices del digrafo de opuestos. Para obtener una caracterización algorítmica, reducimos el espacio de búsqueda en a todos los subconjuntos de dos elementos.

El algoritmo resultante realiza las pruebas establecidas en la caracterización estructural y no posee demasiada complejidad conceptual. El procedimiento consiste en el cálculo de  $P$  de cada conjunto de dos vértices y en una observación sobre los grados de los vértices del conjunto calculado. La complejidad temporal del algoritmo es  $O(mn)$ , significativamente menor a la del algoritmo ingenuo especializado en grafos bipartitos, el cual posee una complejidad temporal  $O(m^2n)$ . Para lograr la cota, se ha utilizado la estructura de datos *h-graph* para obtener una verificación de transitividad eficiente en orden temporal  $O(m\alpha(D))$  para un digrafo  $D$ .

Queda como problema abierto la caracterización sin restricciones de los grafos biclique irreducibles.

También se ha obtenido una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos de la clase de grafos biclique irreducibles hereditarios. Respeto de la motivación inicial para el estudio de esta clase, la comparación con los grafos biclique-Helly hereditarios, sólo

observamos que ambas caracterizaciones poseen a  $C_5$  como elemento común.

Dado que los subgrafos prohibidos de la caracterización no poseen más de cinco vértices, puede deducirse un algoritmo  $O(n^5)$  para la verificación de la pertenencia a la clase. Es otro problema abierto conseguir un algoritmo más eficiente o, al menos, estudiar posibles restricciones a los grafos en los cuales se puedan conseguir caracterizaciones más eficientes. Por ejemplo, Bodlander et al. proponen un algoritmo de reconocimiento  $O(n^2)$  para grafos cordales sin  $P_5$  ni *gema* como subgrafos inducidos [1].

Podríamos también plantear como trabajo pendiente la definición y caracterización de los grafos *débilmente biclique irreducibles* siguiendo la definición de Wang dada en [26] para los grafos clique irreducibles. Esta clase consistiría en los grafos cuyas bicliques propias contienen a todas las aristas del grafo.

# Referencias

- [1] Hans L. Bodlaender, Andreas Brandstädt, Dieter Kratsch, Michaël Rao, and Jeremy Spinrad. On algorithms for (p5,gem)-free graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 349(1):2–21, December 2005.
- [2] Stanislav Busygin, Oleg Prokopyev, and Panos M. Pardalos. Biclustering in data mining. *Computers & Operations Research*, 35(9):2964 – 2987, 2008. Part Special Issue: Bio-inspired Methods in Combinatorial Optimization.
- [3] M. Dawande, P. Keskinocak, S. Tayur, and Carnegie-Mellon University. Graduate School of Industrial Administration. *On the biclique problem in bipartite graphs*. Working paper. Carnegie Mellon University, Graduate School of Industrial Administration, 1996.
- [4] A.M. Dean, J.P. Hutchinson, and E.R. Scheinerman. On the thickness and arboricity of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 52(1):147–151, 1991.
- [5] Vania M. F. Dias, Celina M. H. de Figueiredo, and Jayme L. Szwarcfiter. Generating bicliques of a graph in lexicographic order. *Theor. Comput. Sci.*, 337:240–248, June 2005.
- [6] Vania M. F. Dias, Celina M. H. de Figueiredo, and Jayme L. Szwarcfiter. On the generation of bicliques of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 155:1826–1832, September 2007.
- [7] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.
- [8] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 2004.
- [9] Marina Groshaus. *Biclique, cliques, neighborhoods, and the Helly property*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2006.
- [10] Marina Groshaus and Jayme L. Szwarcfiter. Biclique-helly graphs. *Graphs and Combinatorics*, 23(6):633–645, 2007.

- [11] Marina Groshaus and Jayme L. Szwarcfiter. Biclique graphs and biclique matrices. *Journal of Graph Theory*, 63(1):1–16, 2010.
- [12] M. Habib, C. Paul, and L. Viennot. A synthesis on partition refinement: a useful routine for strings, graphs, boolean matrices and automata. In *STACS 98*, pages 25–38. Springer, 1998.
- [13] E. Howorka. A characterization of distance-hereditary graphs. *The quarterly journal of mathematics*, 28(4):417–420, 1977.
- [14] David S. Johnson, Mihalis Yannakakis, and Christos H. Papadimitriou. On generating all maximal independent sets. *Information Processing Letters*, 27(3):119 – 123, 1988.
- [15] Min Chih Lin, Francisco J. Soullignac, and Jayme L. Szwarcfiter. Arboricity, h-index, and dynamic algorithms. *Theor. Comput. Sci.*, 426-427:75–90, April 2012.
- [16] Min Chih Lin and Jayme Szwarcfiter. Faster recognition of clique-helly and hereditary clique-helly graphs. *Information Processing Letters*, 103(1):40–43, 2007.
- [17] Sara C. Madeira and Arlindo L. Oliveira. Biclustering algorithms for biological data analysis: A survey. *IEEE/ACM Trans. Comput. Biol. Bioinformatics*, 1(1):24–45, January 2004.
- [18] Leandro Montero. Convergencia y divergencia del grafo biclique iterado. Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2008.
- [19] E. Prisner. Hereditary clique-helly graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 14:216–220, 1993.
- [20] Erich Prisner. Bicliques in graphs i: Bounds on their number. *Combinatorica*, 20(1):109–117, 2000.
- [21] F. J. Soullignac and G. Sueiro. Sobre caracterizaciones parciales de grafos coordinados. Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, March 2006.
- [22] Jayme L. Szwarcfiter. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Comb.*, 45:29–32, 1997.
- [23] Pablo Terlisky. Biclique-coloreo de grafos. Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2010.
- [24] Shuji Tsukiyama, Mikio Ide, Hiromu Ariyoshi, and Isao Shirakawa. A new algorithm for generating all the maximal independent sets. *SIAM Journal on Computing*, 6(3):505–517, 1977.
- [25] W D Wallis and G-H Zhang. On maximal clique irreducible graphs, the. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 8:187–193, 1990.

- [26] Tao-Ming Wang. On characterizing weakly maximal clique irreducible graphs. *Congressus Numerantium*, pages 177–188, 2003.