

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Computación**

**Tesis de Licenciatura**

**diffAlg: un software de Álgebra Diferencial**

**Manuel Dubinsky**  
**170/96**  
manudubinsky@gmail.com

**Director:** Dr. César Massri  
**Co-Director:** Prof. Dr. Fernando Cukierman

2012

Este trabajo está dedicado a Violeta Agnese, por su amor, por ayudarme a realizar los sueños y por ser mi motorcito en la vida.

## Agradecimientos

A mis maestros y amigos César Massri y Ariel Molinuevo.

Al grupo del seminario de geometría algebraica, en especial a su director Fernando Cukierman.

A mis amigos Hernán Czemerinski, Nicolás Botbol y Mauricio Cappella.

A mis padres y hermanos.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1. Preliminares matemáticos	8
2.1.1. Introducción	8
2.1.2. Foliaciones	8
2.1.3. Polinomios homogéneos	9
2.1.4. Formas diferenciales	10
2.1.5. Wedge	11
2.1.6. Diferencial	11
2.1.7. Campos de vectores	11
2.1.8. Flujos	12
2.1.9. Corchete	12
2.1.10. Contracción	13
2.1.11. Distribución integrable	13
2.1.12. Teorema de Frobenius I	14
2.1.13. Ideal diferencial	14
2.1.14. Teorema de Frobenius II	15
2.1.15. Observaciones	16
2.2. Preliminares sobre sistemas de álgebra conmutativa	17
2.2.1. Introducción	17
2.2.2. Ideales monomiales	17
2.2.3. Ordenes monomiales	18
2.2.4. El algoritmo de división	20
2.2.5. Bases de Gröbner	21
2.2.6. Aplicaciones	22
2.2.7. Bases de Gröbner y el proyecto diffAlg	24
<b>3. Reseña histórica</b>	<b>25</b>
3.1. El problema de Pfaff	25
3.2. El teorema de integrabilidad de Frobenius	26
3.3. Algunos conceptos de la teoría de Elie Cartan	27
3.3.1. Introducción	27
3.3.2. Solución general de un sistema diferencial	28
3.3.3. Soluciones singulares de un sistema diferencial	28

3.4.	La escuela de Ehresmann . . . . .	28
3.4.1.	Introducción . . . . .	29
3.4.2.	La tesis de Reeb . . . . .	29
3.5.	El problema de clasificación en el caso holomorfo . . . . .	30
3.5.1.	Introducción . . . . .	31
3.5.2.	Foliaciones en espacios proyectivos . . . . .	31
<b>4.</b>	<b>Implementación</b>	<b>33</b>
4.1.	Descripción del proyecto . . . . .	33
4.1.1.	Introducción . . . . .	33
4.1.2.	Descripción de la Implementación . . . . .	34
4.2.	Componentes de Software . . . . .	35
4.2.1.	La librería <i>diffAlg.pm</i> . . . . .	35
4.2.2.	La clase <i>Form.pm</i> . . . . .	37
4.2.3.	La librería <i>Tools.pm</i> . . . . .	38
4.2.4.	El programa <i>cmd</i> . . . . .	38
4.3.	Algoritmos Combinatorios . . . . .	38
4.3.1.	Algoritmo: Combinatorio $\binom{n}{r}$ . . . . .	39
4.3.2.	Algoritmo: Monomials Degrees . . . . .	40
4.3.3.	Conclusiones . . . . .	42
4.4.	Algoritmos de Álgebra Diferencial . . . . .	42
4.4.1.	Observaciones Preliminares . . . . .	43
4.4.2.	<i>Wedge</i> : $\omega \wedge \eta$ . . . . .	43
4.4.3.	<i>Diferencial</i> : $d\omega$ . . . . .	45
4.4.4.	<i>Contraccion</i> : $\langle Y, \omega \rangle$ . . . . .	46
<b>5.</b>	<b>Casos de estudio</b>	<b>48</b>
5.1.	Observaciones preliminares . . . . .	48
5.2.	Componentes irreducibles . . . . .	49
5.2.1.	Foliaciones en $\mathbb{P}^2$ . . . . .	49
5.3.	Espacio tangente . . . . .	50
5.3.1.	Caso de estudio: $\mathcal{L}(4; 1, 1, 2)$ . . . . .	50
5.4.	Deformaciones y Unfoldings . . . . .	52
5.4.1.	Caso de estudio: $\mathcal{L}(4; 1, 1, 2)$ . . . . .	52
5.4.2.	Conclusiones . . . . .	52
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>7.</b>	<b>Trabajos futuros</b>	<b>54</b>
<b>8.</b>	<b>Apéndices</b>	<b>55</b>
8.1.	Operaciones con diffAlg . . . . .	55
8.1.1.	Los programas <i>perl</i> . . . . .	55
8.1.2.	Creación manual de formas diferenciales y polinomios . . . . .	56
8.1.3.	Visualizar una forma diferencial . . . . .	57
8.1.4.	Traducción a Singular y Macaulay2 . . . . .	57
8.1.5.	Dimensión de un ideal en Singular . . . . .	58

8.2. Deformaciones y Unfoldings . . . . .	58
8.2.1. Definiciones . . . . .	58
8.2.2. Clases de isomorfismo . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introducción

Una *variedad diferenciable* de dimensión  $n$  es un espacio topológico que localmente es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Eso quiere decir que para todo punto  $p$  del espacio existe un abierto isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  que lo contiene. Algunos ejemplos son:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ,  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

Una *foliación* es una descomposición de una variedad diferenciable dada por subvariedades de la misma dimensión llamadas *hojas*.

El *teorema de Frobenius* establece una correspondencia entre foliaciones e *ideales diferenciales* de  $\Omega_{\mathbb{R}^n}^r(d)$ . En particular, las foliaciones de codimensión 1 se corresponden con los ideales diferenciales principales de  $\Omega_{\mathbb{R}^n}^r(d)$ , o sea ideales dados por una sola forma ( $\omega$ ) tal que  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

Al fijar el grado  $d$  y el diferencial  $r$ ,  $\Omega_{\mathbb{R}^n}^r(d)$  tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Los coeficientes de la ecuación  $\omega \wedge d\omega = 0$  son polinomios en los coeficientes de  $\omega$ . El ideal que definen esos polinomios parametriza a las foliaciones de codimensión 1 de la variedad diferenciable.

Un *espacio de moduli* es un espacio que parametriza objetos geométricos de interés. Es un espacio en el que cada punto representa uno de dichos objetos. Permite estudiarlos como familias continuas.

Al estudiar las distintas formas de asociar foliaciones a una variedad diferenciable, es natural preguntarse por las familias que pueden deformarse unas en otras de modo continuo. El espacio para estudiar estas familias es el *espacio de moduli de foliaciones*.

Los sistemas de álgebra conmutativa (ej.: *Singular*, *Macaulay2*) son adecuados para tratar ideales de anillos de polinomios, pero no proveen funcionalidad para manipular ecuaciones con formas diferenciales. La propuesta del proyecto **diffAlg** es cubrir ese vacío para poder estudiar, entre otros problemas, el espacio de moduli de foliaciones.

## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Preliminares matemáticos

#### 2.1.1. Introducción

En esta sección daremos algunos preliminares matemáticos básicos. La idea es presentar la teoría e introducir los conceptos que fueron utilizados en la realización de **diffAlg**. Para ampliar estas ideas una buena fuente es [War83].

El objetivo principal es poder enunciar y comprender el *teorema de Frobenius* que da una correspondencia entre *formas integrables* y *foliaciones* del espacio.

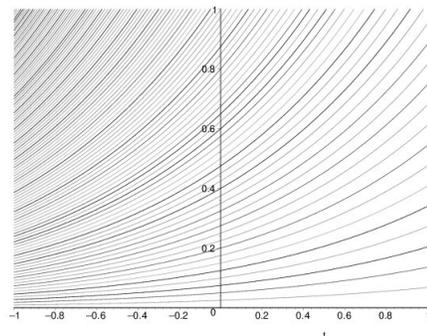
Trabajaremos en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sus elementos son vectores formados por  $n + 1$  coordenadas reales,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ . Notar la numeración adoptada, comienza en 0 y termina en  $n$ . Hay  $n + 1$  coordenadas.

#### 2.1.2. Foliaciones

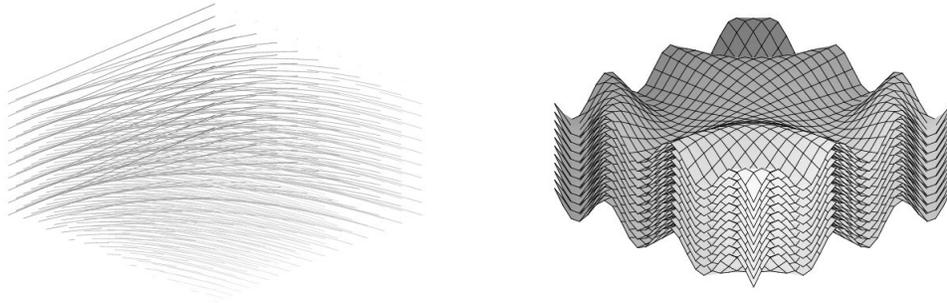
Una *foliación* en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una partición dada por una familia de subvariedades. Por ejemplo, en el plano, viene dada por una familia de curvas. La manera más sencilla de definir una foliación es dando una ecuación diferencial de primer orden, por ejemplo

$$y' = y$$

Las curvas integrales de esta ecuación son de la forma  $ae^t$  donde  $a \in \mathbb{R}$ .



En  $\mathbb{R}^3$  podemos considerar foliaciones por curvas o por superficies. Demos un ejemplo por curvas y otro por superficies,



El teorema de Frobenius en su forma más general, dará una relación entre sistemas de ecuaciones diferenciales (dados por campos o formas integrales) y foliaciones. Relaciona datos algebraicos con geométricos.

### 2.1.3. Polinomios homogéneos

Consideremos sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  *polinomios homogéneos* de grado  $d$ . Más precisamente, un polinomio homogéneo de grado  $d$  es una combinación lineal de monomios de grado  $d$ . Un monomio de grado  $d$  es un producto de grado total  $d$  de las variables  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,

$$x_0^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_0 + k_1 + \dots + k_n = d.$$

Notar entonces que hay exactamente  $\binom{n+d}{d}$  monomios y estos forman una base del espacio de polinomios homogéneos de grado  $d$ . Para concluir, un polinomio homogéneo de grado  $d$  es de la forma

$$P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k_0 + \dots + k_n = d} a_{k_0, \dots, k_n} x_0^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad a_{k_0, \dots, k_n} \in \mathbb{R}.$$

Demos algunos ejemplos en tres variables  $\{x, y, z\}$ ,

$$x^2 + y^2, \quad 2x + 4z, \quad x^3, \quad xyz + y^3 + y^2z.$$

Denotaremos  $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$  al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $d$ .

Es usual adoptar la notación de *multi-índices*. Un multi-índice es un vector de números enteros positivos,  $\underline{k} = (k_0, \dots, k_n)$  donde  $k_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ . El multi-índice  $\underline{k}$  tiene asociado su *largo*

$$|\underline{k}| := k_0 + \dots + k_n$$

y su *monomio*,

$$\underline{x}^{\underline{k}} = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Esta notación facilita la escritura de un polinomio homogéneo de grado  $d$ ,

$$P(\underline{x}) = \sum_{|\underline{k}|=d} a_{\underline{k}} \underline{x}^{\underline{k}}.$$

### 2.1.4. Formas diferenciales

Para hablar de formas necesitamos hablar del producto exterior o *wedge*. Consideremos los diferenciales formales  $\{dx_0, \dots, dx_n\}$ . Estos diferenciales, que pueden pensarse como variables, se multiplican utilizando el producto *wedge*. El producto *wedge* es anti-conmutativo,

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$

luego si en un monomio aparecen dos diferenciales iguales, este monomio será cero:

$$dx \wedge dx = -dx \wedge dx \implies 2dx \wedge dx = 0 \implies dx \wedge dx = 0.$$

Una *r-forma monomial* será

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Como el producto *wedge* es anti-conmutativo, cualquier *r-forma monomial* puede reordenarse (salvo signo)

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad i_1 < \dots < i_r.$$

Esto indica que hay  $\binom{n+1}{r}$  formas monomiales de grado  $r$  en variables  $\{dx_0, \dots, dx_n\}$ .

Una *r-forma de grado d* es una combinación polinomial de *r-formas monomiales*,

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} P_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad P_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d.$$

Al espacio vectorial de *r-formas de grado d* lo denotaremos  $\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^r(d)$ . La dimensión de este espacio es  $\binom{n+1}{r} \binom{n+d}{d}$ .

Demos algunos ejemplos de formas en tres variables  $\{x, y, z\}$

$$ydx, \quad (x^2 + y^2)dy + xzdz, \quad 5xyzdx \wedge dz, \quad (yz + xy + z^2)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Cuando se trabaja con formas también hay una notación de multi-índices. Dado un subconjunto  $I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  de  $r$  elementos,  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  denotamos

$$d\underline{x}_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad i_1 < \dots < i_r.$$

Luego una *r-forma de grado d* se escribirá,

$$\omega = \sum_{\#I=r} P_I d\underline{x}_I, \quad P_I \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d$$

### 2.1.5. Wedge

El producto exterior o *wedge* es una operación entre formas. Multiplicar una  $r$ -forma de grado  $d$  con una  $s$ -forma de grado  $e$  devuelve una  $(r+s)$ -forma de grado  $d+e$ . En símbolos,

$$- \wedge - : \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^r(d) \times \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^s(e) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^{r+s}(d+e).$$

Algebraicamente tenemos,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\#I=r} P_I d\underline{x}_I, \quad P_I \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d, \quad \eta = \sum_{\#J=s} Q_J d\underline{x}_J, \quad Q_J \in \mathbb{R}[\underline{x}]_e \implies \\ &\implies \omega \wedge \eta = \sum_{\#I=r} \sum_{\#J=s} P_I Q_J d\underline{x}_I \wedge d\underline{x}_J. \end{aligned}$$

Por simplicidad hemos decidido no simplificar la última cuenta. Es necesario aclarar que si los conjuntos  $I$  y  $J$  se intersecan,  $d\underline{x}_I \wedge d\underline{x}_J = 0$ . Esto se debe a que habrán diferenciales repetidos, y como hemos aclarado, dará cero.

### 2.1.6. Diferencial

Aparte del producto wedge entre formas, existen más operaciones. Una de ellas es el *diferencial*. El diferencial es una aplicación lineal que manda  $r$ -formas de grado  $e$  en  $(r+1)$ -formas de grado  $e-1$ . En símbolos,

$$d : \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^r(e) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^{r+1}(e-1).$$

A una 0-forma de grado  $e$  (o sea, a un polinomio homogéneo de grado  $e$ ) le asigna su gradiente que es una 1-forma de grado  $e-1$ ,

$$dP = \sum_{i=0}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i, \quad P \in \mathbb{R}[\underline{x}]_e.$$

En general, se tiene la siguiente fórmula simbólica

$$d(Pd\underline{x}_I) = dP \wedge d\underline{x}_I.$$

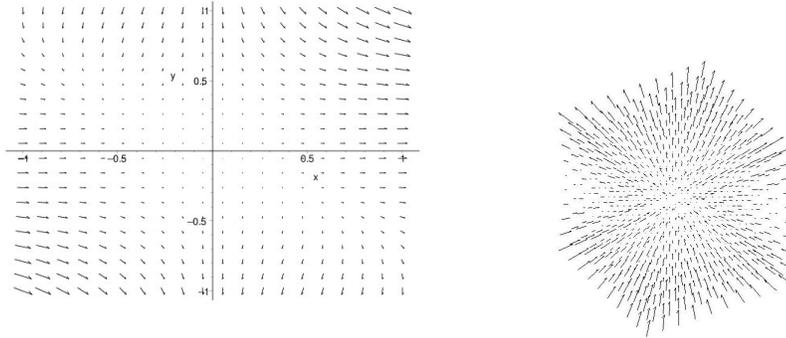
Demos algunos ejemplos en variables  $\{x, y, z\}$ ,

$$d(xdy + zdy) = dx \wedge dy + dz \wedge dy = dx \wedge dy - dy \wedge dz,$$

$$d(xydx \wedge dz) = ydx \wedge dx \wedge dz + xdy \wedge dx \wedge dz = -xdx \wedge dy \wedge dz.$$

### 2.1.7. Campos de vectores

Los campos son el concepto dual al de formas. Un campo se define asignando a cada punto del espacio un vector, veamos un ejemplo en  $\mathbb{R}^2$  y otro en  $\mathbb{R}^3$ ,



Estos ejemplos corresponden, respectivamente, a los siguientes campos

$$(x^2 + xy) \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad xz \frac{\partial}{\partial x} + zy \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

En general, un *campo de grado  $d$*  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una combinación polinomial de las variables  $\{\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ . Si bien un campo es un vector de polinomios, hemos adoptado la notación de *ganchos*,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . La importancia de esta notación tomará relevancia cuando definamos operaciones entre campos. Al espacio vectorial de campos de grado  $d$  se lo denota  $T_{\mathbb{R}^{n+1}}(d)$ , tiene dimensión  $(n+1) \binom{n+d}{d}$ .

### 2.1.8. Flujos

A un campo le podemos asociar sus *curvas integrales*. Para cada vector  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  consideramos la siguiente curva que pasa por  $v$  dada por una ecuación diferencial,

$$X = \sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d, \quad v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \implies$$

$$\begin{cases} c'(t) = (P_0(c(t)), P_1(c(t)), \dots, P_n(c(t))) \\ c(0) = (v_0, \dots, v_n) \end{cases}$$

La existencia y unicidad de esta curva se debe al teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias. Veamos un ejemplo, para  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  su curva integral viene dada por la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} (c'_0(t), c'_1(t)) = (-c_1(t), c_0(t)) \\ (c_0(0), c_1(0)) = (v_0, v_1) \end{cases} \implies c(t) = (v_0 \cos(t) - v_1 \sin(t), v_0 \sin(t) + v_1 \cos(t))$$

Notemos entonces que a cada campo, le hemos asociado una foliación por curvas del espacio. El teorema de Frobenius generalizará esto.

### 2.1.9. Corchete

El *corchete* es una operación entre campos. Si  $X, Y$  son campos de grado  $d$  y  $e$  respectivamente, su corchete es otro campo de grado  $d + e - 1$  y se denota  $[X, Y]$ . Geométricamente

mide cuánto cambia un campo respecto al otro. Algebraicamente se calcula de la siguiente manera:

$$X = \sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d,$$

$$Y = \sum_{i=0}^n Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_e \implies$$

$$[X, Y] = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial Q_j}{\partial x_i} - Q_i \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En símbolos tenemos,

$$[-, -] : T_{\mathbb{R}^{n+1}}(d) \times T_{\mathbb{R}^{n+1}}(e) \rightarrow T_{\mathbb{R}^{n+1}}(d + e - 1).$$

### 2.1.10. Contracción

Esta operación es muy particular porque relaciona campos con formas. Contraer una  $r$ -forma de grado  $d$  respecto a un campo de grado  $e$ , devuelve una  $(r - 1)$ -forma de grado  $d + e$ ,

$$-\lrcorner : T_{\mathbb{R}^{n+1}}(e) \times \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^r(d) \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^{r-1}(d + e).$$

$$X = \sum_{j=0}^n P_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad P_j \in \mathbb{R}[\underline{x}]_e, \quad \omega = \sum_{\#I=r} Q_I d\underline{x}_I, \quad Q_I \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d \implies$$

$$X \lrcorner \omega = \sum_{j=0}^n \sum_{\#I=r, j \in I} Q_I P_j (-1)^j d\underline{x}_{I \setminus j}.$$

Explicuemos un poco el último término. La segunda suma se hace sobre todos los  $I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  de cardinal  $r$  que contienen a  $j$  y recordemos que  $d\underline{x}_{I \setminus j}$  significa que es una  $(r - 1)$ -forma monomial donde no aparece el diferencial  $dx_j$ . Veamos algunos ejemplos en variables  $\{x, y, z\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner ((x^3 + xyz) dx \wedge dz) = (x^3 + xyz) dz,$$

$$\left( y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) \lrcorner dx = y.$$

### 2.1.11. Distribución integrable

El teorema de Frobenius tiene dos versiones equivalentes. Una con campos y otra con formas. La que utiliza campos necesita la noción de *distribución integrable* que definiremos aquí. Una *distribución* de dimensión  $k$  es un conjunto de  $k$  campos  $\{X_1, \dots, X_k\}$  tal que punto a punto, estos campos son linealmente independientes. Seamos más precisos, dado un campo podemos considerar su vector sobre cada punto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$X = \sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d, \quad v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \implies$$

$$X|_v = (P_0(v), P_1(v), \dots, P_n(v)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Luego para cada  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  consideramos los siguientes  $k$  vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\{X_1|_v, \dots, X_k|_v\}$ . Si estos son linealmente independientes para todo  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  diremos que los campos  $\{X_1, \dots, X_k\}$  forman una distribución de dimensión  $k$ .

Una *distribución integrable* es una distribución cerrada por corchete, o sea, si  $\{X_1, \dots, X_k\}$  es una distribución de dimensión  $k$ , diremos que es integrable si cualquier corchete entre ellos puede escribirse como combinación polinomial de  $\{X_1, \dots, X_k\}$ ,

$$[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n].$$

### 2.1.12. Teorema de Frobenius I

**Teorema.** *Existe una biyección (diccionario) entre distribuciones integrables de dimensión  $k$  y foliaciones de dimensión  $k$ . Más aún, si  $\{X_1, \dots, X_k\}$  es una distribución integrable, el espacio tangente a  $v$  en la hoja de su foliación es el espacio vectorial generado por  $\{X_1|_v, \dots, X_k|_v\}$ .*

Veamos un ejemplo sencillo. Cualquier campo  $X$  da lugar a una distribución integrable de dimensión 1. Esto sale de la definición del corchete ya que  $[X, X] = 0$ . Si  $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  la foliación asociada de dimensión 1 son las curvas que cumplen,

$$\begin{cases} (c'_0(t), c'_1(t)) = (c_1(t), c_0(t)) \\ (c_0(0), c_1(0)) = (v_0, v_1) \end{cases} \implies \\ \implies c(t) = \left( -\frac{v_1 - v_0}{2} e^{-t} + \frac{v_1 + v_0}{2} e^t, \frac{v_1 - v_0}{2} e^{-t} + \frac{v_1 + v_0}{2} e^t \right)$$

Notemos que fijado  $v = (v_0, v_1)$  existe una única curva (o hoja)  $c(t)$  que pasa por  $v$ . El espacio tangente en  $v$  es la recta con dirección  $c'(0) = (v_1, v_0) = X|_v$ .

### 2.1.13. Ideal diferencial

Pasemos a la otra versión del teorema de Frobenius. Definamos el espacio de formas  $\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*$ ,

$$\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^* = \bigoplus_{r=0}^{n+1} \bigoplus_{d=0}^{\infty} \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^r(d).$$

El espacio vectorial  $\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*$  es de dimensión infinita. Notar que las operaciones de wedge y diferencial están definidas sobre este espacio,

$$- \wedge - : \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^* \times \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^* \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*,$$

$$d : \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^* \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*.$$

Con estas operaciones al espacio  $\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*$  se lo denomina *álgebra graduada conmutativa diferencial*. Como en toda álgebra tenemos la noción de *ideal*.

El ideal  $\mathcal{I}$  generado por las formas  $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ , es el subespacio de  $\Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*$  generado por todos los productos posibles entre elementos del álgebra y los generadores,

$$\mathcal{I} = \{\eta_1 \wedge \omega_1 + \dots + \eta_k \wedge \omega_k \mid \eta_1, \dots, \eta_k \in \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*\} \subseteq \Omega_{\mathbb{R}^{n+1}}^*.$$

Un ideal no necesariamente es cerrado por el diferencial: puede pasar que  $\eta$  pertenezca al ideal, pero  $d\eta$  no. Cuando el ideal respeta el diferencial, en símbolos,

$$d\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}.$$

decimos que el ideal  $\mathcal{I}$  es un *ideal diferencial*.

Por ejemplo, el ideal generado por la forma  $\omega = x^2 dy$  no es diferencial ya que deberá contener a la forma  $d\omega = 2x dx \wedge dy$ . Por otro lado, de manera tautológica, el ideal generado por una forma y por su diferencial es un ideal diferencial.

Recordemos que en el caso de campos habíamos definido la noción de distribución de dimensión  $k$ . Definamos entonces la noción de ideal diferencial de dimensión  $k$ . Esta definición se basa en la operación de contracción. La contracción da una biyección entre ideales diferenciales y distribuciones integrables. Dado  $\mathcal{I}$  definimos la siguiente distribución integrable,

$$\{X \in T_{\mathbb{R}^{n+1}} \mid X \lrcorner \omega \quad \forall \omega \in \mathcal{I}\}.$$

Es un teorema la afirmación de que obtuvimos una distribución integrable y que cualquier distribución integrable se obtiene de esta manera. Si  $k$  es la dimensión de esta distribución, diremos que  $k$  es la dimensión de  $\mathcal{I}$ .

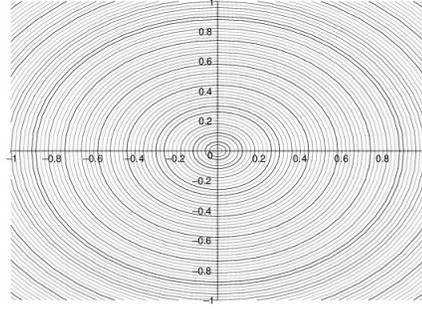
### 2.1.14. Teorema de Frobenius II

**Teorema.** *Existe una biyección (diccionario) entre ideales diferenciales de dimensión  $k$  y foliaciones de dimensión  $k$ .*

Veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que  $\omega$  es una 1-forma de grado  $e - 1$  dada por  $\omega = dP$  donde  $P$  es un polinomio homogéneo de grado  $e$ . De la definición del diferencial se deduce que aplicarlo dos veces da cero, luego se cumple trivialmente que el ideal generado por  $\omega$  es diferencial ya que  $d\omega = 0$ . La foliación asociada a  $\omega$  viene dada por las hipersuperficies

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P(x_0, \dots, x_n) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En  $\mathbb{R}^2$  podemos tomar el polinomio  $P(x, y) = x^2 + y^2$  y definir la forma  $\omega = dP = 2x dx + 2y dy$ . Las hojas de la foliación asociada son círculos con centro  $(0, 0)$ ,



### 2.1.15. Observaciones

Para finalizar mencionemos algunos conceptos más avanzados,

- El primero tiene que ver con las foliaciones dadas por una sola forma  $\omega$ . Sabemos que  $\omega$  determina una foliación de dimensión  $n$  (equivalentemente, de *co-dimensión* 1) si y sólo si el ideal que genera es diferencial. El problema es que es muy difícil saber si un ideal es diferencial, pero existe una manera algebraica de determinar esto. Más precisamente, la condición  $\omega \wedge d\omega = 0$  equivale a que el ideal generado por  $\omega$  sea diferencial. Luego, todas las  $\omega$  que cumplan esta ecuación poseen una estructura geométrica. El espacio (variedad) de todas estas formas se denomina *espacio de moduli de foliaciones de co-dimensión 1*. La geometría de este espacio es misteriosa.
- El segundo concepto tiene que ver con el espacio ambiente  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En geometría se trabaja, preferentemente, con espacios denominados compactos. Resulta que  $\mathbb{R}^{n+1}$  no cumple esta propiedad y es habitual reemplazarlo por el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Si bien no nos detendremos en sus propiedades ni en su definición, es relevante decir que existe una aplicación entre  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Ahora bien, no toda forma *desciende* al proyectivo, sólo las que son invariantes por el campo radial. Más precisamente, el campo radial es

$$R = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \in T_{\mathbb{R}^{n+1}}(1)$$

y diremos que una forma  $\omega$  *desciende* al proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  si

$$R \lrcorner \omega = 0.$$

Finalmente, tenemos definido el *espacio de moduli de foliaciones proyectivas de co-dimensión 1*. Son las formas invariantes por el campo radial que generan un ideal diferencial. Este espacio también es misterioso.

- Este último comentario tiene que ver con los números reales  $\mathbb{R}$ . Si bien hemos definido todo sobre  $\mathbb{R}$ , cabe aclarar que todas las definiciones dadas pueden hacerse sobre  $\mathbb{C}$ , los números complejos, o también sobre  $\mathbb{Q}$  los números racionales.

## 2.2. Preliminares sobre sistemas de álgebra conmutativa

### 2.2.1. Introducción

El objetivo de esta sección es presentar las *bases de Gröbner*, que son la herramienta fundamental que implementan los sistemas de álgebra conmutativa (ej.: *Macaulay2* o *Singular*) para calcular las componentes irreducibles de una variedad algebraica. Para ampliar estos contenidos una buena fuente es [Eis95, Capítulo 15].

Se asumen conocidas las nociones de *variedad algebraica*, *ideal* y *módulo* sobre un anillo y los resultados básicos de geometría algebraica que vinculan a las variedades y los ideales de un anillo.

A lo largo de la sección se considerará  $S = k[x_1, \dots, x_r]$ , un anillo de polinomios sobre un cuerpo  $k$ . Los  $S$ -módulos serán finitamente generados.

Esquemáticamente una *base de Gröbner* de un ideal  $I \subset S$  es un conjunto de generadores de  $I$  con una cierta propiedad adicional. Las *bases de Gröbner* permiten resolver entre otros, los siguientes problemas:

- **Calcular división con resto:** dado un conjunto de generadores de un ideal  $I \subset S$  y un polinomio  $f \in S$ , se trata de determinar una base del espacio vectorial  $S/I$ , y de computar la imagen de  $f$  en  $S/I$  en términos de la base calculada. En particular si  $f \in I$  (o sea la imagen es 0) se trata de escribir a  $f$  como combinación lineal de los generadores de  $I$ .
- **Calcular syzygies:** calcular el núcleo de un morfismo de módulos libres  $\phi : G \rightarrow F$ .
- **Calcular la intersección de dos ideales de  $S$ .**
- **Calcular el anulador de un módulo.**
- **Calcular el módulo de homomorfismos entre dos módulos.**
- **Calcular la función y el polinomio de Hilbert de un módulo graduado.**

### 2.2.2. Ideales monomiales

En esta parte se mostrará que algunos problemas difíciles de tratar en el estudio de ideales en general, resultan posibles de computar en el caso de *ideales monomiales*.

Los *monomios* en  $S$  se definen usando multiíndices: si  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}_0^r$ , entonces  $x^a$  será el monomio:  $x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}$ .

Un *ideal monomial* de  $S$  es un ideal generado por monomios. De modo más general, si  $F$  es un módulo libre con base  $e_i$ , un monomio en  $F$  es un elemento de la forma  $m = x^a e_i$ , para algún  $e_i$ ; se dice que  $m$  está **asociado al elemento de la base  $e_i$** . Un *submódulo monomial*, es un submódulo generado por monomios de  $F$ . Estos submódulos se pueden escribir de la siguiente manera:

$$M = \oplus I_j e_j \subset \oplus S e_j = F$$

donde  $I_j \subset S$  es el ideal monomial generado por los monomios  $x^a$  tal que  $x^a e_j \in M$ .

Un *término* de  $F$  es un monomio multiplicado por un escalar  $u \in k$ :  $ux^a e_j$ . Si  $m, n$  son monomios de  $S$  y  $u, v \in k$  con  $v \neq 0$ , se dice que el término  $ume_i$  es *divisible* por el término  $vne_j$  si  $i = j$  y  $m$  es divisible por  $n$  en  $S$ ; el cociente es  $um/vn \in S$ .

Las operaciones entre monomios son muchos más sencillas que entre polinomios arbitrarios. Por ejemplo el **máximo común divisor** y el **mínimo común múltiplo** entre dos monomios. Si  $a = (a_1, \dots, a_r)$  y  $b = (b_1, \dots, b_r)$ :

$$MCD(x^a, x^b) = x_1^{\min(a_1, b_1)} \dots x_r^{\min(a_r, b_r)}$$

$$MCM(x^a, x^b) = x_1^{\max(a_1, b_1)} \dots x_r^{\max(a_r, b_r)}$$

Estas operaciones se extienden naturalmente a términos en un módulo libre  $F$ . Mediante estas dos operaciones es fácil determinar la intersección y cociente entre submódulos monomiales.

Si  $M \subset F$  es un submódulo generado por los monomios  $m_1, \dots, m_t$  es muy sencillo determinar si un monomio  $m$  pertenece a  $M$ : es suficiente con que sea divisible por alguno de los  $m_i$ . En general, un elemento  $f \in F$  pertenece a  $M$  si todos sus monomios pertenecen a  $M$ .

Por otro lado, dado un conjunto de generadores de un submódulo monomial  $M$ , se pueden eliminar aquellos que son divisibles por otros elementos y seguir teniendo un conjunto de generadores, se puede continuar este procedimiento hasta obtener un **conjunto minimal de generadores** de  $M$ .

### 2.2.3. Ordenes monomiales

En esta parte se mostrará cómo se puede deducir un ideal monomial de un ideal cualquiera que preserve propiedades del ideal original.

Para motivar la construcción empecemos dando una aplicación. Si  $J \subset S$  es un ideal monomial, entonces el conjunto  $B$  de todos los monomios que no están en  $J$ , forman una base del espacio vectorial  $S/J$ . Si  $I \subset S$  es un ideal cualquiera sería de utilidad obtener una descripción análoga del espacio vectorial  $S/I$ . Como los monomios de  $S$  forman una base de  $S$  como espacio vectorial, su imagen genera  $S/I$  ( $S \rightarrow S/I$ ), por lo tanto un conjunto linealmente independiente maximal será una *base monomial*.

**Lema 2.2.1.** *Si  $J$  es un ideal monomial y  $B$  es el conjunto de monomios que no están en  $J$ , entonces los elementos de  $B$  se mantienen linealmente independientes módulo un ideal  $I$  si y sólo si  $J$  contiene al menos un monomio de cada polinomio de  $I$ .*

*Dem.* Consideremos el morfismo canónico  $\phi : S \rightarrow S/I$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que hay alguna dependencia lineal entre los elementos de  $B$  en  $S/I$ , o sea existe una combinación lineal de elementos de  $B$  que está en el núcleo de  $\phi$ :

$$\sum_i v_i b_i \in I, \quad b_i \in B, \quad v_i \in k$$

Pero esto no puede ser porque los polinomios de  $I$  tienen al menos un término contenido en  $J$ .

$\Rightarrow$ ) Por otro lado si suponemos que existe un polinomio  $p \in I$  de modo tal de que ninguno de sus términos esté en  $J$ , entonces  $p$  será combinación lineal de elementos de  $B$  y esto no puede ser porque habría una dependencia lineal entre los elementos de  $B$  en  $S/I$ .  $\square$

Para que además el conjunto  $B$  sea efectivamente una base de  $S/I$ , el ideal  $J$  tiene que ser minimal en relación a la cantidad de términos que contiene de los polinomios de  $I$ . Para ilustrar la situación consideremos un ejemplo: sea  $I = (m_1 + m_2)$  un ideal principal generado por la suma de dos monomios. Según el lema, en este caso hay dos alternativas para el ideal monomial:  $J_1 = (m_1)$  o  $J_2 = (m_2)$  (consideremos que  $B_i$  son los monomios que no están en el ideal  $J_i$ , con  $i = 1, 2$ ). Si además suponemos que  $m_1$  divide a  $m_2$ , al optar por la elección de  $J_1$  surge que este ideal monomial no es minimal en el sentido mencionado porque contiene a los dos términos del polinomio  $m_1 + m_2 \in I$ , con lo cual  $m_1, m_2 \notin B_1$ . Pero si elegimos  $J_2$  surge que  $m_1 \in B_2$ , o sea obtenemos un elemento de la base de  $S/I$  que antes no había aparecido. La conclusión es que para que no haya "pérdida" de generadores de  $S/I$ , el ideal monomial  $J$  debe ser minimal en el sentido descrito.

Para construir un ideal monomial  $J$  en base a un ideal cualquiera  $I$  que permita obtener una base de  $S/I$ , hay que observar la siguiente situación: supongamos que  $m_1, m_2, m_3$  son monomios distintos de grado  $d$  y que el ideal  $I$  está generado del siguiente modo:

$$I = (m_1 + m_2, m_2 + m_3) + (\text{todos los monomios de grado mayor que } d)$$

Supongamos que, según el lema anterior, para generar  $J$  los monomios elegidos de los polinomios  $m_1 + m_2$  y  $m_2 + m_3$  de  $I$  son  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Pero además en  $I$  está el polinomio:  $(m_1 + m_2) - (m_2 + m_3) = m_1 - m_3$ . Del polinomio  $m_1 - m_3$  necesariamente debe elegirse el monomio  $m_1$  porque de lo contrario  $J$  no sería minimal.

La conclusión es que si escribimos  $m_1 > m_2$  para la relación " $m_1$  es elegido antes que  $m_2$ ", entonces  $>$  debe satisfacer el axioma de una relación de orden:  $m_1 > m_2 > m_3 \Rightarrow m_1 > m_3$ . Un análisis más delicado permite establecer la misma conclusión incluso cuando los grados de los  $m_i$  son diferentes.

O sea, es necesario definir un orden total entre los monomios de  $S$ , y generar el ideal  $J$  a partir de los mayores monomios de cada polinomio de  $I$ . Hay dos requisitos importantes para definir este orden total. Por un lado como se vio en el ejemplo anterior, debe refinarse el orden definido por la divisibilidad: si  $m_1$  divide a  $m_2$ , entonces se debe imponer la relación  $m_2 > m_1$ . Por otro lado, el orden debe preservarse por multiplicación: si  $I = (m_1 + m_2)$  y se tiene que  $m_1 > m_2$  de modo que  $m_1 \in J$ , entonces del polinomio  $nm_1 + nm_2 \in I$ , necesariamente habrá que deducir  $nm_1 > nm_2$ , porque de lo contrario  $J$  no sería minimal. Para resumir y generalizar estos hechos se define el concepto de *orden monomial*.

**Definición 2.2.2.** Sea  $F$  un  $S$ -módulo libre con base. Un **orden monomial** es un orden total  $>$  definido en los monomios de  $F$ , de modo que si  $m_1, m_2$  son monomios de  $F$  y  $n \neq 1$  es un monomio de  $S$ , entonces:

$$m_1 > m_2 \Rightarrow nm_1 > nm_2 > m_2$$

Si  $>$  es un orden monomial, para cada  $f \in F$  se define el **término inicial de  $f$**  ( $in(f)$ ) como el mayor término de  $f$  respecto al orden  $>$ .

**Teorema 2.2.3** (de Macaulay). *Sea  $F$  un  $S$ -módulo libre con base, y sea  $M \subset F$  un submódulo. Para cada orden monomial  $>$  en  $F$ , el conjunto  $B$  de todos los monomios que no están en  $in(M)$  define una base de  $F/M$ .*

Considerando los multiíndices  $a, b \in \mathbb{N}_0$ , los monomios  $m = x^a, n = x^b$ , y suponiendo que  $x_1 > \dots > x_r$ , algunos ejemplos de ordenes monomiales sobre  $S$  son los siguientes:

- **Orden lexicográfico:**  $m >_{lex} n$  si  $a_i > b_i$  para el primer índice  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$ .
- **Orden lexicográfico homogéneo:**  $m >_{hlex} n$  si  $deg(m) > deg(n)$  o  $deg(m) = deg(n)$  y  $a_i > b_i$  para el primer índice  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$ .
- **Orden lexicográfico inverso:**  $m >_{rlex} n$  si  $deg(m) > deg(n)$  o  $deg(m) = deg(n)$  y  $a_i < b_i$  para el último índice  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$ . La definición de este orden puede resultar un poco confusa pero es el más robusto en la implementación algorítmica.

**Definición 2.2.4.** Una **base de Gröbner** con respecto a un orden monomial  $>$  sobre un módulo libre con base  $F$  es un conjunto de elementos  $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset F$ , tal que si  $M \subset F$  es el submódulo generado por los elementos de  $G$ , entonces  $in(g_1), \dots, in(g_t)$  generan  $in(M)$ . En tal caso se dice que  $G$  es una base de Gröbner de  $M$ .

Siempre existe una base de Gröbner para cada submódulo  $M \subset F$  con respecto a un orden monomial. Un resultado importante es el siguiente.

**Lema 2.2.5.** *Si  $N \subset M \subset F$  son submódulos y  $in(N) = in(M)$  con respecto a un orden monomial entonces  $N = M$ .*

Una vez que uno calcula una base de Gröbner, es fácil resolver el problema de decidir si un elemento pertenece a un cierto submódulo: dado  $M \subset F$ , para decidir si  $f \in F$  pertenece a  $M$  hay que elegir un orden monomial en  $F$  y encontrar  $in(M)$  y  $in(M + Sf)$ . Por el lema,  $f \in M$  sí y sólo sí  $in(M) = in(M + Sf)$  y esto es fácil de determinar porque son submódulos monomiales.

#### 2.2.4. El algoritmo de división

Una de las operaciones más útiles y simples con polinomios univariados es el **algoritmo de división**. O sea dados  $f, g \in k[x]$ , dividir a  $f$  por  $g$  consiste en expresar a  $f$  del siguiente modo:

$$f = f_1g + f', \quad deg(f) = deg(f_1g), \quad deg(f') < deg(g)$$

La extensión de esta operación al caso multivariado permite calcular las bases de Gröbner.

**Proposición 2.2.6.** Sea  $F$  un  $S$ -módulo libre con base y un orden monomial  $>$ . Si  $f, g_1, \dots, g_t \in F$  entonces existe una expresión:

$$f = \sum_i f_i g_i + f', \quad f' \in F, \quad f_i \in S$$

de modo tal de que los monomios de  $f'$  no pertenecen al conjunto  $\{in(g_1), \dots, in(g_t)\}$  y  $in(f) \geq in(f_i g_i)$  (para todo  $i$ ). La expresión se llama **expresión estándar**,  $f'$  es el **resto**.

**Algoritmo 2.2.7.** (de división) Sea  $F$  un  $S$ -módulo libre con base y un orden monomial  $>$ . Si  $f, g_1, \dots, g_t \in F$ , se puede generar una expresión estándar

$$f = \sum m_u g_{s_u} + f'$$

de  $f$  con respecto a  $g_1, \dots, g_t$ . Para ello se sigue un procedimiento inductivo. Supongamos que al cabo de  $p$  pasos se eligieron los  $s_1, \dots, s_p$  y  $m_1, \dots, m_p$ , si

$$f'_p := f - \sum_{i=1}^p m_u g_{s_u} \neq 0$$

y  $m$  es el término maximal de  $f'_p$  que es divisible por algún  $in(g_i)$ , entonces elegimos:

$$s_{p+1} = i,$$

$$m_{p+1} = m/in(g_i)$$

El procedimiento termina cuando  $f'_p = 0$  o ningún  $in(g_i)$  divide a un término de  $f'_p$ . El resto  $f'$  es el último  $f'_p$ .

El algoritmo de división es importante en el caso en el que los  $g_i$  forman una base de Gröbner de un submódulo  $M \subset F$ ; se puede ver que en este caso, el resto de la división ( $f'$ ), da una expresión de  $f \bmod M$ .

### 2.2.5. Bases de Gröbner

El algoritmo de división permite calcular una base de Gröbner de un submódulo  $M \subset F$ . Para ver esto sea  $F$  un  $S$ -módulo libre con base, un orden monomial  $>$  y  $g_1, \dots, g_t \in F$  elementos no nulos de  $F$ . Para cada par de índices  $i, j$ , tal que  $in(g_i)$  y  $in(g_j)$  involucran al mismo elemento de la base de  $F$ , se define:

$$m_{ij} = in(g_i)/MCD(in(g_i), in(g_j)) \in S$$

Luego para cada par  $i, j$ , se considera la expresión estándar

$$m_{ji} g_i - m_{ij} g_j = \sum f_u^{ij} g_u + h_{ij}$$

Por convención, si  $in(g_i)$  y  $in(g_j)$  involucran elementos distintos de la base de  $F$ , establecemos que  $h_{ij} = 0$ . Notemos por otro lado que  $in(f_u^{ij} g_u) < in(m_{ji} g_i)$ , esto es fácil de ver porque en la expresión estándar  $in(g_i)$  y  $in(g_j)$  se anulan. Las expresiones  $m_{ji} g_i - m_{ij} g_j$  se conocen como las **syzygies** de  $F$ . Con estas consideraciones se puede enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.8** (de Buchberger). *Los elementos  $g_1, \dots, g_t$  forman una base de Gröbner si y sólo si  $h_{ij} = 0$  para todo  $i, j$ .*

Este teorema da lugar al siguiente algoritmo.

**Algoritmo 2.2.9** (de Buchberger). Supongamos que  $M \subset F$  es un submódulo y  $g_1, \dots, g_t$  es un conjunto de generadores.

1. Computar los restos  $h_{ij}$ .
2. Si todos los restos  $h_{ij}$  son 0, entonces los  $g_i$  definen una base de Gröbner; el algoritmo termina.
3. Si no agregar uno de los  $h_{ij} \neq 0$  al conjunto de los  $g_i$  y repetir el proceso.

Como el submódulo generado por las formas iniciales de  $g_1, \dots, g_t, h_{ij}$  es estrictamente mayor que el generado por las formas iniciales de los  $g_1, \dots, g_t$ , el proceso debe terminar en un número finito de pasos (por Noether).

Este algoritmo tiene una cota superior en el peor caso para los grados de los elementos de una base de Gröbner. Supongamos que estamos en el caso de un ideal homogéneo  $(g_1, \dots, g_t) \subset S$  (el caso no homogéneo puede reducirse a este) con respecto al orden lexicográfico, entonces la cota es

$$((r + 1)(d + 1) - 1)^{2^{s+1}(r+1)}$$

donde:

- $r$  = número de variables.
- $d$  = grado de los polinomios  $g_i$ .
- $s$  = el grado del polinomio de Hilbert (esto es uno menos que la dimensión del ideal; está entre 0 y  $r - 1$ ).

La cota es doblemente exponencial en el número de variables, esto sugeriría que el algoritmo es inutilizable en la práctica. A pesar de eso, tiene buena respuesta en el tratamiento de muchos problemas de interés.

### 2.2.6. Aplicaciones

Las implicancias de las bases de Gröbner son extensas y profundas y por lo tanto escapan a las posibilidades de este trabajo.

A modo de cierre, se describirán brevemente algunos problemas que se pueden resolver con ellas.

**Problema de pertenencia a un ideal:** dado un conjunto de generadores de un ideal  $I \subset S$ , se trata de determinar una base del espacio vectorial  $S/I$ , y dado un polinomio  $f \in S$ , se trata de computar su imagen en  $S/I$  en términos de la base. Además, en caso de que  $f \in I$ , o sea  $f \text{ mod } I = 0$ , se trata de computar una expresión de  $f$  como combinación lineal de los generadores de  $I$ .

En las secciones anteriores ya se sugirió parcialmente la idea. Para resolverlo, hay que darle un orden monomial a  $S$  y con el conjunto de generadores de  $I = (f_1, \dots, f_s)$ , computar una base de Gröbner  $I = (g_1, \dots, g_t)$ . Entonces:

- El conjunto de monomios que no pertenecen a  $in(I)$ , forman una base de espacio vectorial  $S/I$ .
- El resto de la división de  $f$  por  $g_1, \dots, g_t$ , es la expresión de  $f$  como combinación lineal de la base de  $S/I$ .
- Si  $f \in I$ , el algoritmo de división, expresa a  $f$  como combinación de los  $g_i$ ; y como por construcción los  $g_i$  están dados como combinación lineal del  $f_i$ , esto permite expresar  $f$  como combinación lineal de  $f_i$ .

**Polinomio y función de Hilbert:** este problema se apoya en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.10** (de Macaulay). *Sea  $P$  un  $S$ -módulo graduado finitamente generado, dado por generadores y relaciones como  $P = F/M$ , donde  $F$  es un módulo libre con base homogénea y  $M$  es un submódulo generado por elementos homogéneos. Entonces la función de Hilbert de  $P$  es igual a la función de Hilbert de  $F/in(M)$ .*

**Anillo graduado asociado:** este problema consiste en construir  $gr_I R$ . Si  $R$  es un anillo y  $I \subset R$  un ideal, el anillo graduado asociado a  $R$  con respecto a  $I$  es:

$$gr_I R := R/I \oplus I/I^2 \oplus \dots$$

Una pista de por qué esta construcción es importante es que si  $I$  es un ideal maximal finitamente generado, entonces  $gr_I R$  es un álgebra graduada finitamente generada sobre el cuerpo  $R/I$ . Esto permite, por ejemplo, transformar un anillo local noetheriano en un anillo graduado finitamente generado que son más fáciles de tratar. Por último,  $R$  y  $gr_I R$  comparten propiedades, con lo cual se pueden deducir propiedades del anillo original.

**Eliminación:** dado un ideal  $I \subset S[y_1, \dots, y_s]$  (teniendo en cuenta que  $S = k[x_1, \dots, x_r]$ ), se quiere computar  $J = I \cap S$ . Esto puede interpretarse como la proyección de  $I$  en su anillo de base,  $S$ . Se dice que se quiere "eliminar" las variables  $y_1, \dots, y_s$ .

**Clausura proyectiva:** dado un conjunto algebraico en el *espacio afín*,  $V \subset \mathbb{A}^r$ , se quiere calcular la clausura  $\bar{V}$  de  $V$  en  $\mathbb{P}^r$ .

**Saturación:** si  $M$  es un submódulo de un  $S$ -módulo libre  $F$  y  $J \in S$  es un ideal, se definen:

$$(M : J) = \{f \in F / fJ \in M\}$$

$$(M : J^\infty) = \bigcup_{d=1}^{\infty} (M : J^d)$$

El submódulo  $(M : J^\infty)$  se conoce como la **saturación de  $M$  con respecto a  $J$** . Esta construcción tiene relevancia en el contexto de *descomposiciones primarias* de ideales.

**Levantamiento de morfismos:** ilustremos este problema con un ejemplo, supongamos que  $F$ ,  $G$  y  $H$  son tres  $S$ -módulos libres con base y supongamos que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & & H \\ & \searrow \gamma & \downarrow \varphi \\ & & F \end{array}$$

de modo tal que  $\text{im}(\gamma) \subset \text{im}(\varphi)$ . El problema consiste en encontrar un morfismo

$$\psi : G \longrightarrow H$$

de modo que  $\varphi\psi = \gamma$ . Este problema es de gran relevancia en álgebra homológica.

**Teoría de módulos:** mediante bases de Gröbner se pueden computar, entre otras, las operaciones:

- Pullbacks, intersecciones y anuladores.
- Núcleos de morfismos.
- Hom, Ext, Tor.

### 2.2.7. Bases de Gröbner y el proyecto **diffAlg**

La motivación de estas notas preliminares está dada por el hecho de que el proyecto **diffAlg** como resultado termina generando un ideal homogéneo en un anillo de polinomios cuyas propiedades se quiere estudiar.

La herramienta para ese estudio son las bases de Gröbner implementadas por los sistemas de álgebra conmutativa. Es por eso que las bases de Gröbner determinarán el límite de las conclusiones que puedan obtenerse a partir de **diffAlg**.

## Capítulo 3

# Reseña histórica

El objetivo de este capítulo es aportar algunas nociones que permitan contextualizar históricamente el problema que motivó el proyecto **diffAlg**, o sea el problema de entender la geometría del *espacio de moduli de foliaciones*.

El capítulo está ordenado cronológicamente y no pretende ser un análisis riguroso, sino esquemático de algunas ideas.

### 3.1. El problema de Pfaff

El contenido de esta sección fue elaborado a partir de [Haw05].

El contexto de trabajo de Pfaff era el estudio de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de primer orden iniciado por Euler y Lagrange. O sea, ecuaciones de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_m, z, p_1, \dots, p_m) = 0, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Donde  $z$  es una función de las  $x_i$  y el objetivo es obtener una solución  $z = \phi(x_1, \dots, x_m, C_1, \dots, C_m)$  (donde las  $C_i$  son constantes arbitrarias).

En aquel entonces, obtener una solución (o sea integrar una EDP) estaba asociado a reducir el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y resolverlo. Siguiendo esta idea, Lagrange se encontró con dificultades técnicas: no pudo resolver el problema para ecuaciones no lineales con  $m > 2$  (o sea para más de dos variables). Para abordar esta cuestión, Pfaff propuso estudiar una ecuación más general:

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n = 0$$

Es más general en el sentido de que se puede transformar cualquier EDP de primer orden en una ecuación de este tipo (llamada *ecuación de Pfaff*).

La *ecuación de Pfaff* se puede interpretar geoméricamente del siguiente modo: como  $\omega \in \Omega^1$  (o sea, pertenece al espacio dual al espacio tangente en un punto), una solución es una *variedad*  $V$  tal que para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ , y todo  $v \in T_x(V)$ , el vector  $v$  es ortogonal al vector  $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ .

El *problema de Pfaff* consiste en determinar la dimensión máxima de las *variedades integrales* de  $\omega$  (o sea aquellas que son solución de la ecuación).

### 3.2. El teorema de integrabilidad de Frobenius

El contenido de esta sección fue elaborado a partir de [Haw05].

Frobenius definió un marco conceptual que permitió resolver completamente el *problema de Pfaff*.

Empezó por estudiar una versión algebraica del problema que le permitió definir un criterio de equivalencia entre las ecuaciones. La equivalencia estaba dada por un invariante algebraico, o sea un  $p \in \mathbb{Z}$  llamado *clase de  $\omega$* . De modo tal de que dos *ecuaciones de Pfaff* eran equivalentes si su *clase* era la misma.

En su estudio algebraico, Frobenius demostró que la *clase* estaba determinada por  $\omega$  y por una 2-forma  $\Omega$  denominada *forma bilineal covariante*. Tiempo después, la teoría de *cálculo de formas diferenciales* de Cartan interpretaría  $\Omega$  como  $-d\omega$ .

Al pasar del caso algebraico al caso analítico, en el que la equivalencia de dos ecuaciones  $\omega$  y  $\omega'$  ya no estaba dada a menos de transformaciones lineales, sino a menos de funciones analíticas, Frobenius encontró una dificultad técnica:

- dado un sistema  $S$  de  $r$  *ecuaciones de Pfaff* linealmente independientes

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_j = 0, i = 1, \dots, r,$$

determinar bajo qué condiciones el sistema es completo (o sea, tiene  $n - r$  soluciones).

Este problema le permitió precisar una dualidad entre  $S$  y el sistema de ecuaciones  $S'$ :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^n b_{k,i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, k = 1, \dots, n - r$$

Donde  $f = C$  es una solución de  $S$ . Este hecho expresa la dualidad entre distribuciones integrables e ideales diferenciales.

El *teorema de integrabilidad* da una condición necesaria y suficiente para determinar cuándo un sistema de *ecuaciones de Pfaff* es completo. Algunas aclaraciones antes de enunciarlo, si se considera una 1-forma  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) x_i$ :

- Fijado un punto  $x \in G$  donde  $G$  es una variedad y  $b \in T_x(G)$ , evaluar la forma en  $b$  es:  $\omega(b) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i = a \cdot b$
- La 2-forma bilineal covariante asociada a  $\omega$  evaluada en dos vectores  $b, c \in T_x(G)$  se define como:

$$\Omega(b, c) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) b_i c_j$$

**Teorema 3.2.1** (Frobenius). *Dado un sistema de  $r$  ecuaciones Pfaffianas  $\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} dx_j = 0, i = 1, \dots, r$  es completo sí y sólo sí: fijado un punto  $x$ , cada vez que  $\omega_i(b) = \omega_i(c) = 0$  para todo  $i$ , implica que  $\Omega_i(b, c) = 0$  para todo  $i$ .*

En el lenguaje actual, esto significa que el ideal  $I = (\omega_1, \dots, \omega_r)$  es un ideal diferencial (o sea  $d\omega_i \in I$ , para todo  $1 \leq i \leq r$ ). Una aclaración importante es que el teorema es local, en el sentido de que el sistema de ecuaciones tiene solución en un abierto  $x \in U$ .

### 3.3. Algunos conceptos de la teoría de Elie Cartan

El contenido de esta sección fue elaborado a partir de [CC52].

#### 3.3.1. Introducción

La *teoría de Cartan* fue concebida para tratar la existencia y unicidad de soluciones locales de sistemas de EDPs en el contexto de funciones analíticas en  $\mathbb{R}$ . Sintetiza y conceptualiza los trabajos desarrollados en el siglo XIX por Monge, Pfaff, Jacobi, Frobenius, Lie y Darboux.

Como ya se mencionó un *sistema de Pfaff* consiste de un cierto número de ecuaciones de la forma  $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$ , donde  $A_1, \dots, A_n$  son funciones en las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Una variedad paramétrica  $r$ -dimensional dada por  $x_i = f_i(t_1, \dots, t_r)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) es una solución del sistema si las ecuaciones se satisfacen al reemplazar las  $x_i$  por las  $f_i$  y los diferenciales correspondientes.

Para reducir un sistema de EDP's a un *sistema de Pfaff* se sigue el siguiente procedimiento: si el sistema contiene ecuaciones de orden mayor que 1 (ecuaciones que involucran derivadas parciales de orden 2 o superior), se pueden reducir a ecuaciones de orden 1 introduciendo nuevas funciones que representen a esas derivadas superiores.

Luego se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma  $F_i(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p; \dots, \frac{\partial z_r}{\partial x_s}, \dots) = 0$  donde las  $z$ 's son las incógnitas y las  $x$ 's las variables independientes. Si se define  $\frac{\partial z_r}{\partial x_s} = t_{rs}$ , el sistema original puede ser reemplazado por el *sistema de Pfaff* compuesto por las ecuaciones  $F_i(\underline{x}; \underline{z}; \underline{t}) = 0, dz_r - \sum_s t_{rs} dx_s = 0$ . La solución del sistema original está asociado a las variedades  $r$ -dimensionales que son solución del *sistema de Pfaff*.

Una *forma diferencial exterior* es una expresión de la forma:  $\sum A_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$  donde los coeficientes  $A_{i_1 \dots i_p}$  son funciones de las  $x$ 's. Entre estas expresiones se define un producto anti-conmutativo ( $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$ ), llamado *producto exterior* (o *producto wedge*). Con la suma y el producto exterior, estas expresiones definen el *álgebra de formas exteriores*. Sobre este álgebra (desarrollada por Grassmann), Cartan definió la operación de *diferenciación exterior* que es invariante respecto de cualquier cambio de variables:

$$d(\sum A_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) = \sum dA_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

donde los diferenciales  $dA_{i_1 \dots i_p}$  se expresan como combinaciones lineales de los  $dx_1, \dots, dx_n$ .

Si se considera el *sistema de Pfaff*:  $\omega_1 = 0, \dots, \omega_k = 0$ , se deduce que cualquier solución del sistema, también será solución de las ecuaciones  $d\omega_1 = 0, \dots, d\omega_k = 0$ . De modo más general, cualquier solución del sistema, será solución del *ideal diferencial*  $I = \langle \omega_1, \dots, \omega_k \rangle$

### 3.3.2. Solución general de un sistema diferencial

Un *elemento de contacto*  $E_{p,K}$  en una variedad  $V$  es un par  $(p, K)$  donde  $p \in V$  es un punto de la variedad y  $K \subseteq T_p(V)$  es un subespacio del espacio tangente en  $p$  de dimensión  $k$ .

Si  $x_1, \dots, x_n$ , son coordenadas locales en un abierto que contiene al punto  $p$ , entonces el elemento de contacto  $E_{p,K}$  puede ser representado paramétricamente por ecuaciones de la forma  $dx_i = L_i(v_1, \dots, v_k)$  donde los  $L_i$ 's son formas lineales en los  $k$  parámetros:  $v_1, \dots, v_k$ . Se dice que una forma diferencial  $\omega$  se anula en  $E_{p,K}$  si al reemplazar las coordenadas de  $p$  por las variables  $x_1, \dots, x_n$  de los coeficientes de  $\omega$  y los  $L_i$  por los diferenciales  $dx_i$ , la forma es 0.

Sea  $I$  un ideal diferencial, se dice que un elemento de contacto  $E_{p,K}$  es un *elemento integral* de  $I$  si toda forma de  $I$  se anula en  $E_{p,K}$ .

Una solución  $r$ -dimensional del ideal diferencial  $I$  se denomina *variedad integral* y se define como: una subvariedad  $W$   $r$ -dimensional tal que los elementos de contacto  $E_{p,K}$  donde  $K = T_p W$  para todo  $p \in W$  son elementos integrales de  $I$ .

Para definir el concepto de *solución general* de un ideal diferencial  $I$ , Cartan definió las nociones de *elemento integral general* y *elemento integral regular*. Una *solución general*  $r$ -dimensional de  $I$  es una variedad  $r$ -dimensional cuyos puntos son *elementos integrales generales* de  $I$  y al menos un punto es un *elemento integral regular*.

El teorema de existencia de soluciones generales establece que un elemento de contacto regular  $r$ -dimensional es un elemento de contacto de una variedad integral, o sea de una solución del ideal diferencial  $I$ .

### 3.3.3. Soluciones singulares de un sistema diferencial

Las soluciones singulares de un sistema diferencial son aquellas que no pertenecen a la solución general. Para lidiar con el problema de encontrar este tipo de soluciones, Cartan describió un método que no pudo demostrar rigurosamente pero que en la práctica le permitió encontrarlas.

El método consiste en agregar cierto tipo de ecuaciones al sistema para que las soluciones singulares del sistema original sean soluciones generales del nuevo sistema.

## 3.4. La escuela de Ehresmann

El contenido de esta sección fue elaborado a partir de [Hae05].

Ehresmann fue discípulo de Cartan. Junto con sus alumnos Reeb y Haefliger, fueron quienes formalizaron la *teoría de foliaciones*.

### 3.4.1. Introducción

A continuación se definen algunos conceptos y objetos de estudio.

Una *distribución*  $K$  de dimensión  $p$  (o de  $p$ -planos) y clase  $C^r$  sobre una variedad  $V$  se define del siguiente modo: a cada punto  $x \in V$  se le asocia un subespacio del espacio tangente ( $K(x) \subset T_x(V)$ ). Los subespacios varían de modo  $r$ -diferenciable al variar el punto  $x$ . La dimensión  $p$  es la dimensión de  $K(x)$  en los puntos genéricos (o sea en los puntos no singulares).

Si  $n$  es la dimensión de  $V$ , se dice que  $q = n - p$  es la codimensión de  $K$ . Por la dualidad entre *campos de vectores* y *formas diferenciales*, localmente  $K$  puede definirse por la anulación de un sistema de  $q$  1-formas (i.e. *ecuaciones de Pfaff*) linealmente independientes.

Una *subvariedad integral* de  $K$  es una subvariedad conexa de  $V$  de dimensión  $p$  tangente en cada punto  $x$  a  $K(x)$ .  $K$  se dice *completamente integrable* si por cada punto de  $V$  pasa una única subvariedad integral y además  $V$  es la unión disjunta de las subvariedades integrales.

Ejemplos:

- Si  $p = 1$  (o sea  $K$  es un campo de vectores),  $K$  es completamente integrable (esto resulta de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales).
- Una distribución de codimensión 1 está dada por una ecuación de Pfaff  $\omega$  y la condición de integrabilidad es  $\omega \wedge d\omega = 0$ . En este caso, existe localmente una función no nula  $\lambda$  (llamada *factor integrante*) y una función  $\phi$  (llamada *integral primera*) tal que  $\omega = \lambda d\phi$ . (Observación: es el caso particular en que la *clase* de  $\omega$  es 1 según la clasificación de Frobenius y es el caso particular estudiado por Euler).

### 3.4.2. La tesis de Reeb

Ehresmann le propuso a Reeb estudiar las propiedades globales de las distribuciones completamente integrables, inspirado por un problema propuesto por Hopf en 1935:

- Existe sobre la *3-esfera de Riemann* un campo de vectores nunca nulo  $v$  tal que el producto escalar  $v \cdot \text{rot}(v) = 0$  (donde  $\text{rot}(v)$  es el rotor de  $v$ ). Esta condición es equivalente a la condición de *completa integrabilidad* de la ecuación de Pfaff asociada a  $v$  (por dualidad):  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

En 1944 escribieron el trabajo fundacional de la *teoría de foliaciones*. En ese trabajo además de responder afirmativamente al problema de Hopf, publicaron el *teorema de estabilidad global*:

**Teorema 3.4.1** (Reeb). *Si  $K$  es una distribución completamente integrable de dimensión  $n-1$  definida por una forma de Pfaff y si  $C_{n-1}$  es una subvariedad integral compacta con grupo de homotopía finito, toda subvariedad integral en una vecindad es homeomorfa a  $C_{n-1}$ . Si además  $V_n$  (la variedad ambiente) es compacta, todas las subvariedades integrales completas son homeomorfas a  $C_{n-1}$  y definen una fibración en  $V_n$ . Y si  $V_n$  es cualquier variedad tal que todas sus subvariedades integrales completas son compactas, entonces son homeomorfas entre sí y definen una fibración en  $V_n$ .*

Este teorema determina (con las hipótesis correspondientes) que si la variedad ambiente es compacta, entonces las subvariedades integrales completas son las fibras de un fibrado cuya base es  $\mathbb{S}^1$ . Y que si el espacio ambiente no es necesariamente compacto pero todas las subvariedades integrales completas sí lo son, entonces la base del fibrado es una recta.

La definición de foliación fue dada por Reeb en 1947.

Una *foliación* de dimensión  $p$  de una variedad diferenciable  $V$  de dimensión  $n$  es, a grosso modo, una descomposición de  $V$  en subvariedades conexas de dimensión  $p$  llamadas *hojas*, las cuales se aglomeran localmente como subconjuntos de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ , tal que la segunda coordenada es constante. El ejemplo más simple es la foliación de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  donde las hojas son los  $p$ -planos de la forma  $\mathbb{R}^p \times c$  donde  $c \in \mathbb{R}^{n-p}$ .

**Definición 3.4.2.** Sea  $V$  una variedad de dimensión  $n$  y clase  $\mathbb{C}^\infty$ . Una foliación de clase  $\mathbb{C}^r$  y dimensión  $p$  de  $V$ , es un atlas maximal  $\mathcal{F}$  de clase  $\mathbb{C}^r$  en  $V$  con las siguientes propiedades:

- Si  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  entonces  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^{n-p}$ .
- Si  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces el cambio de coordenadas  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es de la forma  $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ . Esta condición dice que los cambios de coordenadas entre las cartas de  $\mathcal{F}$  están dados por difeomorfismos locales que preservan las hojas.

Del trabajo de tesis de Reeb se desprendieron cinco problemas que guiaron el desarrollo de la teoría durante las décadas siguientes:

1. Si una variedad  $V$  admite una distribución  $K$  de dimensión  $p$ , admite una foliación de dimensión  $p$ ? Más precisamente,  $K$  es homotópico a una distribución completamente integrable?
2. Existe una foliación analítica real de codimensión 1 sobre  $\mathbb{S}^3$ ? Toda foliación de codimensión 1 de  $\mathbb{S}^3$  tiene una hoja compacta?
3. En una foliación topológica, las hoja vecinas a una hoja compacta  $F$  simplemente conexa, son homeomorfas a  $F$ ? De manera equivalente, una submersión topológica propia es una fibración?
4. Si una foliación sobre una variedad compacta tiene todas sus hojas compactas, cada hoja posee un sistema fundamental de vecindades saturadas por las hojas, o sea el grupo de holonomía de cada hoja es finito?
5. Bajo qué condiciones una forma de Pfaff holomorfa completamente integrable con singularidades, admite localmente una integral primera?

### 3.5. El problema de clasificación en el caso holomorfo

El contenido de esta sección fue elaborado a partir de [LN07].

### 3.5.1. Introducción

El problema de clasificación de foliaciones holomorfas en variedades complejas es un problema en el que se está trabajando actualmente. En particular tiene interés el caso de foliaciones de codimensión uno.

Una foliación singular holomorfa de codimensión uno en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ , puede ser definida en una carta afin  $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ , por una ecuación diferencial del tipo  $\omega = 0$  donde  $\omega$  es una 1-forma integrable con coeficientes polinomiales tal que  $\omega \wedge d\omega = 0$ . O sea, está dada localmente por una ecuación de Pfaff que satisface la condición de integrabilidad definida por Frobenius. Si se define  $\omega$  del siguiente modo:

$$\omega = \sum_{j=1}^n A_j(z) dz_j$$

donde los  $A_j$  son polinomios en  $z \in \mathbb{C}^n$ , la condición de integrabilidad  $\omega \wedge d\omega = 0$  es equivalente a la condición de Jacobi:

$$A_i \left( \frac{\partial A_k}{\partial z_j} - \frac{\partial A_j}{\partial z_k} \right) + A_j \left( \frac{\partial A_i}{\partial z_k} - \frac{\partial A_k}{\partial z_i} \right) + A_k \left( \frac{\partial A_j}{\partial z_i} - \frac{\partial A_i}{\partial z_j} \right) = 0$$

para cualquier terna  $1 \leq i < j < k \leq n$ . Si se fija el grado máximo de los polinomios, se puede ver que los coeficientes de los  $A_j$  satisfacen ecuaciones algebraicas cuadráticas, las cuales definen un subconjunto algebraico del conjunto de todas las formas polinomiales de un cierto grado. Este subconjunto permite parametrizar a todas las 1-formas integrables (con el grado de los  $A_j$  fijo) o sea, permite parametrizar a las foliaciones correspondientes. El conjunto algebraico es el *espacio de moduli de foliaciones proyectivas*. El problema de clasificación consiste en determinar las componentes irreducibles del espacio de moduli.

### 3.5.2. Foliaciones en espacios proyectivos

A continuación se enuncian algunas definiciones y resultados del estado actual de la teoría:

**Teorema 3.5.1.** *Toda foliación de codimensión uno en  $\mathbb{P}^n$  puede ser definida por 1-formas polinomiales en cartas afines.*

**Definición 3.5.2.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $\mathbb{P}^n$ , una recta  $L_1$  inmersa linealmente en  $\mathbb{P}^n$  se dice invariante por  $\mathcal{F}$  si está contenida en una hoja o en  $\text{sing}(\mathcal{F})$  (donde  $\text{sing}(\mathcal{F})$  es el lugar singular de la foliación).

**Definición 3.5.3.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $\mathbb{P}^n$  y  $L_1$  una recta inmersa linealmente en  $\mathbb{P}^n$ ,  $\text{Tang}(\mathcal{F}, L_1)$  es el número de tangencias contadas con multiplicidad entre  $\mathcal{F}$  y  $L_1$ .

**Proposición 3.5.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de codimensión uno en  $\mathbb{P}^n$ ,  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas no invariantes por  $\mathcal{F}$ , entonces  $\text{Tang}(\mathcal{F}, L_1) = \text{Tang}(\mathcal{F}, L_2)$ .  $\text{Tang}(\mathcal{F}, L_1)$  es por definición, el grado de  $F$ .*

**Definición 3.5.5.** El conjunto de foliaciones de codimensión uno y grado  $k$  en  $\mathbb{P}^n$  se denota  $\text{Fol}(n, k)$ .

**Proposición 3.5.6.** *Es posible identificar  $\mathbb{F}ol(n,k)$  con un subconjunto algebraico de un cierto espacio proyectivo  $\mathbb{P}^N$ . Sea  $\Lambda_{k+1}(n)$  el espacio vectorial de las 1-formas en  $\mathbb{C}^{n+1}$  cuyos coeficientes son polinomios homogéneos de grado  $k+1$ . Tomando  $N+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda_{k+1}(n))$ , surge que  $\mathbb{P}(\Lambda_{k+1}(n)) \simeq \mathbb{P}^N$ . Una forma  $\Omega \in \Lambda_{k+1}(n)$  representa a una foliación en  $\mathbb{P}^n$  si satisface las siguientes ecuaciones:*

1.  $\Omega \wedge d\Omega = 0$  (que defina un ideal diferencial)
2.  $R_{\perp}\Omega = 0$  (que sea invariante por el campo radial)

*Estas ecuaciones imponen condiciones algebraicas a los coeficientes de  $\Omega$ . Por lo tanto  $\mathbb{F}ol(n,k)$  puede ser identificado con el subconjunto algebraico de  $\mathbb{P}(\Lambda_{k+1}(n))$  cuyos elementos satisfacen estas ecuaciones.*

**Proposición 3.5.7.** *Para todo  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{F}ol(n,0)$  tiene una única componente irreducible.*

**Teorema 3.5.8.**  *$\mathbb{F}ol(n,1)$  ( $n \geq 3$ ) tiene 2 componentes irreducibles.*

**Teorema 3.5.9.**  *$\mathbb{F}ol(n,2)$  ( $n \geq 3$ ) tiene 6 componentes irreducibles.*

# Capítulo 4

## Implementación

### 4.1. Descripción del proyecto

#### 4.1.1. Introducción

El proyecto surgió como complemento de los sistemas de álgebra conmutativa para estudiar el *espacio de moduli de foliaciones proyectivas*.

Como se mencionó en los preliminares esas foliaciones están dadas por ideales diferenciales definidos por una sola forma ( $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^r(d)$ ) invariante por el campo radial. O sea que  $\omega$  debe satisfacer dos ecuaciones:

- $\omega \wedge d\omega = 0$  (que defina un *ideal diferencial*)
- $R_{\perp}\omega = 0$  (que sea invariante por el *campo radial*)

Estas dos ecuaciones imponen condiciones a los coeficientes de la forma  $\omega$ :

- $\omega \wedge d\omega = 0 \Leftrightarrow$  todos los coeficientes de  $\omega \wedge d\omega$  son 0 (porque  $\omega \wedge d\omega$  pertenece al espacio vectorial  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{2r+1}(2d-1)$ )
- $R_{\perp}\omega = 0 \Leftrightarrow$  todos los coeficientes de  $R_{\perp}\omega$  son 0 (porque  $R_{\perp}\omega$  pertenece al espacio vectorial  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{r-1}(d+1)$ )

O sea que fijados  $n$ ,  $r$  y  $d$ , es posible traducir el estudio de este *espacio de moduli* al estudio de *variedades algebraicas* sobre el anillo de polinomios en los coeficientes de  $\omega$ .

Por ejemplo: si  $\omega$  es la forma genérica en  $\Omega_{\mathbb{C}^5}^3(4)$  (en este caso,  $n = 4, r = 3, d = (4)$ ):

$$\omega = \sum_{\#I=3} \sum_{|\underline{k}|=4} a_{\underline{k}}^I x^{\underline{k}} d\underline{x}_I$$

Es posible estudiar el espacio de foliaciones de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$  parametrizadas por los coeficientes de  $\omega$ , a partir de estudiar el ideal generado por los coeficientes polinomiales de  $\omega \wedge d\omega$  y  $R_{\perp}\omega$  en  $\mathbb{C}[a_{\underline{k}}^I]$  ( $\#I = 3, |\underline{k}| = 4$ )

Los sistemas de álgebra conmutativa tienen limitaciones para realizar operaciones con formas genéricas del álgebra diferencial. Pero pueden tratar adecuadamente los ideales de anillos de polinomios.

Este proyecto cubre ese vacío, o sea permite escribir explícitamente las ecuaciones que definen al ideal asociado a la foliación dada por  $\omega$ . Una vez que se tienen las ecuaciones del ideal se puede, por ejemplo, intentar calcular la dimensión de sus componentes irreducibles.

#### 4.1.2. Descripción de la Implementación

El proyecto está implementado en *perl*, que es un lenguaje multiplataforma, interpretado y débilmente tipado. Está orientado al manejo de strings y expresiones regulares y tiene tres tipos de datos nativos: scalars (números y strings), arrays y hashmaps.

El proyecto está compuesto por los siguientes módulos:

- *diffAlg.pm*: una librería de funciones matemáticas
- *Form.pm*: una clase que encapsula los casos particulares de la librería *diffAlg.pm* (formas, polinomios y escalares)
- *Tools.pm*: una librería de herramientas de propósito general
- *cmd*: un programa de línea de comando para realizar operaciones

Cada forma diferencial está representada por dos archivos:

- uno que contiene los términos de la forma propiamente
- y otro de *metadata* que contiene información complementaria, por ej.: cantidad de variables ( $n$ ), el diferencial ( $r$ ), el grado ( $d$ ) y las variables

Cada término de una forma diferencial está compuesto por un coeficiente, un monomio y un diferencial. Una forma se representa con un hash map en el que cada par clave-valor define un término de la forma. El valor es el coeficiente del término y la clave codifica la información del multigrado del monomio y el diferencial. El hashmap se almacena en disco en una Berkeley DB.

**Ejemplo.** Consideremos la 1-forma genérica con  $n = 2, r = 1, d = 2$ :

$$\omega = a_1 x_1^2 x_2^0 dx_1 + a_2 x_1^1 x_2^1 dx_1 + a_3 x_1^0 x_2^2 dx_1 + a_4 x_1^2 x_2^0 dx_2 + a_5 x_1^1 x_2^1 dx_2 + a_6 x_1^0 x_2^2 dx_2$$

El contenido del archivo de la forma es:

$$\begin{aligned} 1; 0, 2 &= \mathbf{a}_{1;0,2} \\ 1; 1, 1 &= \mathbf{a}_{1;1,1} \\ 1; 2, 0 &= \mathbf{a}_{1;2,0} \\ 2; 0, 2 &= \mathbf{a}_{2;0,2} \\ 2; 1, 1 &= \mathbf{a}_{2;1,1} \\ 2; 2, 0 &= \mathbf{a}_{2;2,0} \end{aligned}$$

Y el contenido del archivo de metatadata es:

```

n = 2
r = 1
d = 2
formFile = w
formVars = a1;1,1 a2;1,1 a1;2,0 a2;0,2 a2;2,0 a1;0,2

```

La decisión de trabajar almacenando las formas en disco se debe a que la cantidad de términos crece exponencialmente. Por ejemplo: la cantidad de términos de una 5-forma de grado 12 en  $\mathbb{P}^{10}$ , es:

$$\binom{10+12}{12} \binom{11}{5} = 298750452$$

## 4.2. Componentes de Software

### 4.2.1. La librería *diffAlg.pm*

En esta librería están implementadas las operaciones de álgebra diferencial. Está compuesta por tres grupos de funciones:

- *Funciones combinatorias*: funciones auxiliares para generar formas diferenciales genéricas
- *Construcción de campos y formas*: funciones que construyen campos de vectores y formas diferenciales
- *Operaciones*: operaciones del álgebra diferencial (*wedge*, *contraccion*, *derivadaLie*, etc.)

#### Funciones combinatorias

El objetivo del proyecto es construir y operar con formas genéricas del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^r(d)$ . Estas son combinaciones lineales de los generadores en las que los coeficientes son variables. Por ejemplo para  $n = 2, r = 1, d = 2$ :

$$\omega = a_1 x_1^2 x_2^0 dx_1 + a_2 x_1^1 x_2^1 dx_1 + a_3 x_1^0 x_2^2 dx_1 + a_4 x_1^2 x_2^0 dx_2 + a_5 x_1^1 x_2^1 dx_2 + a_6 x_1^0 x_2^2 dx_2$$

Donde los  $a_i$  son las indeterminadas del anillo de polinomios  $\mathbb{C}[a]$ . La base canónica del espacio vectorial es:

$$\underline{x}^k \otimes d\underline{x}_I \text{ (con } |k| = d, \#I = r)$$

Donde los  $\underline{x}^k$  son los monomios de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$  y los  $d\underline{x}_I$  son los diferenciales  $\{dx_0, \dots, dx_n\}$ . Para construir esta base es necesario generar todos los monomios y diferenciales. Las funciones de la librería que generan estos objetos son:

- *combN\_R*: genera todos los subconjuntos de  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos ( $r, n \in \mathbb{N}, r \leq n$ ). Estos son los diferenciales de  $\Omega^r$ .

- *monomialsDegrees*: genera todas las secuencias de longitud  $n$  de elementos de  $\mathbb{N}_0$ , tal que la suma de los mismos sea  $d$  ( $n, d \in \mathbb{N}$ ). Estos son los exponentes de los monomios de  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ .

### Funciones de construcción de campos y formas

Como se mencionó previamente, las formas diferenciales están representadas por dos hashmaps almacenados en disco como BerkeleyDBs: uno que contiene los términos de la forma propiamente y otro que contiene información complementaria.

Las funciones de esta librería generan el archivo que contiene los términos de la forma.

**Ejemplo.** El contenido del archivo (clave = valor) que representa a la siguiente forma ( $n = 2, d = 2, r = 1$ ):

$$\omega = a_1 x_1^2 x_2^0 dx_1 + a_2 x_1^1 x_2^1 dx_1 + a_3 x_1^0 x_2^2 dx_1 + a_4 x_1^2 x_2^0 dx_2 + a_5 x_1^1 x_2^1 dx_2 + a_6 x_1^0 x_2^2 dx_2$$

es:

$$1; 2, 0 = a_1$$

$$1; 1, 1 = a_2$$

$$1; 0, 2 = a_3$$

$$2; 2, 0 = a_4$$

$$2; 1, 1 = a_5$$

$$2; 0, 2 = a_6$$

Los valores de hashmap son los coeficientes, mientras que las claves se arman a partir del diferencial y los exponentes del monomio del término separados por ','.

La librería construye los siguientes objetos matemáticos:

- *formas diferenciales*
- *campos de vectores*: si se fija el grado  $d$  de los términos, los campos de vectores tienen estructura de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por  $\underline{x}^k \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $\text{con } |k| = d, 1 \leq i \leq n + 1$ ). En términos de implementación son indistinguibles de las 1-formas diferenciales. Lo que distingue a un campo de vectores de una 1-forma es el uso que se hace de él.
- *polinomios homogéneos*: los polinomios homogéneos de grado  $d$  definen un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial generado por los monomios  $\underline{x}^k$  ( $\text{con } |k| = d$ ). Los polinomios son 0-formas diferenciales.

Las funciones de construcción de la librería son las siguientes:

- *formCoefficients*: devuelve una forma diferencial genérica de  $\Omega_{\mathbb{C}^n}^r(d)$
- *polynomialCoefficients*: devuelve un polinomio genérico de grado  $d$  (o sea la forma genérica de  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^0(d)$ )

- *vectorField*: devuelve el campo de vectores genérico de  $T_{\mathbb{C}^n}(d)$
- *radialField*: devuelve el *campo radial* ( $T_{\mathbb{C}^n}(1)$ )

### Operaciones

Este grupo de funciones define las operaciones básicas del álgebra diferencial:

- *wedge*: calcula el *wedge* ( $\wedge$ ) de dos formas diferenciales
- *wedgeFormPoly*: calcula el *wedge* entre una forma diferencial y un polinomio
- *wedgePolyPoly*: calcula el producto de dos polinomios
- *wedgeScalar*: multiplica una forma diferencial por un escalar
- *contraction*: calcula la contracción de un campo de vectores con una forma diferencial
- *contractionOne*: contrae una 1-forma diferencial contra un campo de vectores
- *diffExt*: calcula el diferencial exterior de una forma diferencial
- *diffPoly*: calcula la derivada de un polinomio de  $\mathbb{C}^n(d)$  (o sea el diferencial de una 0-forma)
- *add*: calcula la suma de dos formas diferenciales
- *addPoly*: calcula la suma de dos polinomios
- *LieDerivative*: calcula la derivada de Lie entre un campo de vectores y una forma diferencial

#### 4.2.2. La clase *Form.pm*

La clase *Form.pm* está motivada por dos aspectos:

- Encapsular las funciones de la librería *diffAlg.pm*: porque la librería implementa funciones distintas para casos particulares de las operaciones, por ejemplo: la función *wedgeFormPoly* implementa un caso particular de *wedge* (entre una forma y un polinomio)
- Sobrecarga de operadores: en perl es posible sobrecargar algunos operadores (ej.: +,  $\wedge$ ) que simplifican la escritura de expresiones en los programas

Los métodos de la clase son los siguientes:

- *newForm*: el constructor de la clase
- *add*: calcula la suma de dos formas
- *wedge*: calcula el *wedge* de dos formas
- *wedgeScalar*: calcula el producto de un escalar por una forma

- *contraction*: calcula la contracción de una forma por un campo de vectores
- *vectorField*: construye un campo de vectores
- *lieDerivative*: calcula la derivada de Lie de una forma diferencial con un campo de vectores
- *d*: calcula el diferencial de una forma
- *R*: construye el *campo radial*

#### 4.2.3. La librería *Tools.pm*

La librería *Tools.pm* define un conjunto de funciones complementarias de propósito general. Conceptualmente están agrupadas del siguiente modo:

- *funciones de administración*: administran el directorio de trabajo
- *funciones de creación de formas*: permiten crear formas diferenciales concretas
- *funciones matemáticas*: calculan los generadores de la imagen y del núcleo del morfismo que define una forma diferencial
- *funciones de traducción*: construyen objetos matemáticos de interés expresados en lenguajes específicos (*Singular*, *Macaulay2*, *Octave*). Por ejemplo un ideal en un anillo de polinomios o una matriz numérica

#### 4.2.4. El programa *cmd*

El programa *cmd*, es una utilidad de línea de comando que permite ejecutar de modo conveniente las funciones de la librería *Tools.pm*.

### 4.3. Algoritmos Combinatorios

Las ideas para calcular la complejidad algorítmica fueron tomadas de [Wil02, Capítulos 1 y 2].

Una forma diferencial genérica es una forma en la que los coeficientes son variables. Para poder implementar una  $r$ -forma diferencial genérica de grado  $d$  hay que poder construir todas las  $r$ -formas monomiales de grado  $d$ .

Por lo tanto, es necesario definir algoritmos que permitan:

1. generar todas las  $r$ -formas en  $n$  variables
2. generar todos los monomios de grado  $d$  en  $n$  variables

### 4.3.1. Algoritmo: Combinatorio $\binom{n}{r}$

El problema de generar todas las  $r$ -formas en  $n$  variables es el problema de generar todos los subconjuntos de  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos.

En un sentido estricto, este algoritmo devuelve la lista de todas las secuencias crecientes de longitud  $r$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Es claro que hay una correspondencia biyectiva entre estas secuencias y los subconjuntos de  $r$  elementos.

A continuación se presenta el algoritmo y posteriormente se describe su complejidad.

**Algoritmo 4.3.1** (Algoritmo combinatorio).

⇐ **INPUT**:  $pos$ : la posición dentro de la lista de *elementos* a partir de la cual calcular el combinatorio,  $n$  : cantidad de variables del espacio,  $r$ : el cardinal de los subconjuntos de elementos del combinatorio

⇒ **OUTPUT**: La lista de secuencias de los elementos del combinatorio  $\binom{n}{r}$

1. para cada valor entero  $i$  en el rango  $[pos, \dots, n - r + 1]$
2.     `secuencia[length(secuencia)-r] := i`
3.     si  $r == 1$  (si es el último elemento de la secuencia actual)
4.         asignar la nueva secuencia de  $r$  elementos a la lista
5.     else
6.         llamar recursivamente (parámetros:  $i + 1, n, r - 1$ )

Para calcular la complejidad temporal del algoritmo, el criterio que se adoptará será contar la cantidad de asignaciones (paso 2 del algoritmo).

**Definición.** Sea  $F(n, r)$  (con  $1 \leq r \leq n$ ) la cantidad de asignaciones del algoritmo.

Es posible sistematizar el conteo a partir de una relación de recurrencia teniendo en cuenta lo siguiente:

1. Sea  $S$  una secuencia creciente de longitud  $r$ , ésta puede dividirse en dos partes:  $S := S' + a$ , donde  $S'$  es una secuencia de longitud  $r - 1$  y  $a \in \{1, \dots, n\}$ . (Designemos a  $S'$  como el *prefijo* y a  $a$  como el *último elemento* de  $S$ )
2. Notar que para obtener una secuencia a partir de su *último elemento* y su *prefijo* hace falta una sola asignación.
3. Por lo tanto, como la lista que devuelve el algoritmo tiene  $\binom{n}{r}$  secuencias, si se tienen en cuenta solamente las asignaciones del *último elemento* de cada secuencia, hay  $\binom{n}{r}$  asignaciones.
4. En relación a los prefijos, hay que notar que el único elemento del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  que no puede pertenecer al prefijo de una secuencia creciente de longitud  $r$ , es  $n$ .

5. Por lo tanto, la cantidad de asignaciones asociadas a los *prefijos* de las secuencias es  $F(n-1, r-1)$

Entonces, la relación de recurrencia queda definida del siguiente modo:

$$F(n, r) = F(n-1, r-1) + \binom{n}{r}$$

Y la fórmula cerrada asociada es:

$$F(n, r) = \sum_{i=1}^r \binom{n-r+i}{i}$$

El peor caso del algoritmo ocurre cuando  $F(n, r)$  se maximiza. Analizando el cociente  $F(n, r)/F(n, r-1)$  puede verificarse que el máximo se alcanza cuando  $r = n/2$ .

Para mostrar que el algoritmo no es polinomial es suficiente con encontrar una cota inferior no polinomial de  $F(n, r)$  para el peor caso.

**Proposición 4.3.2.**  $2^{n/2} < F(n, n/2) < 2^n$

Para verificar la proposición hay que suponer que  $r = n/2$  ( $n$  par, el caso impar es análogo), y notar que:

$$\binom{r}{i} = \binom{n/2}{i} < \binom{n/2+i}{i} = \binom{n-r+i}{i}$$

Para todo  $1 \leq i \leq n/2$ . Entonces:

$$2^{n/2} = \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n/2}{i} < \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n/2+i}{i} = F(n, n/2)$$

Y por otro lado:

$$F(n, n/2) = \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n/2+i}{i} < \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

**Corolario 4.3.3.** *El orden del algoritmo es  $O(2^n)$*

### 4.3.2. Algoritmo: Monomials Degrees

El problema de generar los monomios de grado  $d$  en  $n$  variables es, esencialmente, el de computar los exponentes.

Este algoritmo resuelve el problema equivalente de generar todas las secuencias de longitud  $n$  de elementos de  $\mathbb{N}_0$ , tal que la suma de los mismos sea  $d$ .

A continuación se presenta el algoritmo y posteriormente se describe su complejidad.

**Algoritmo 4.3.4** (Algoritmo monomialsDegrees).

⇐ **INPUT:** *pos:* la posición en la tira del exponente a calcular, *n:* cantidad de variables del espacio, *degree:* el grado total restante que queda por asignar

⇒ **OUTPUT**: La lista de secuencias de exponentes de los monomios de un polinomio homogéneo genérico de grado total  $n$

1. si *pos* no es el último exponente de la tira
2.     para cada valor entero  $i$  en el rango decreciente  $[degree, \dots, 0]$
3.         asignar el exponente  $i$  en la posición *pos* de la tira
4.         llamar recursivamente (parámetros:  $pos + 1$ , *vars*,  $degree - i$ )
5. si no (*pos* es el último exponente de la tira)
6.     asignar *degree* en la posición *pos*
7.     asignar la nueva secuencia de  $n$  elementos a la lista

Para calcular la complejidad temporal del algoritmo, el criterio que se adoptará será contar la cantidad de asignaciones (pasos 3 y 6 del algoritmo).

**Definición.** Sea  $F(n, d)$  la cantidad de asignaciones del algoritmo. (Donde  $n$  es la cantidad de variables del espacio y  $d$  el grado total de los monomios)

Para sistematizar el conteo hay que tener en cuenta lo siguiente: si  $S$  es una secuencia de elementos de  $\mathbb{N}_0$  de longitud  $n$  y suma  $d$ , ésta se puede escribir como  $S := S' + a$  (donde  $S'$  es el *prefijo* y  $a \in \mathbb{N}_0$  es el *ultimo elemento* de  $S$ ). Hay que notar que  $S'$  no es una instancia de menor complejidad del mismo problema que  $S$ :

1.  $S$  es una secuencia del problema: devolver las secuencias de longitud  $n$  cuyos elementos suman exactamente  $d$ .
2. Mientras que  $S'$  es una secuencia (de menor complejidad) del problema: devolver las secuencias de longitud  $n$  tal que la suma de sus elementos sea  $\leq d$

Designando  $F_1(n, d)$  y  $F_2(n, d)$  a la cantidad de secuencias asociadas a los problemas 1) y 2) respectivamente, es claro que:

$$F(n, d) = F_1(n, d) + \sum_{i=1}^{n-1} F_2(i, d)$$

Porque  $F_1(n, d)$  cuenta la cantidad de asignaciones de *ultimos elementos* de las secuencias del algoritmo. Y el segundo sumando ( $\sum_{i=1}^{n-1} F_2(i, d)$ ) cuenta la cantidad de asignaciones asociadas a los prefijos de las secuencias.

También es claro que:

$$F_2(n, d) = F_1(n, d) + F_1(n, d - 1) + \dots + F_1(n, 0) = \sum_{j=0}^d F_1(n, j)$$

Porque la cantidad de secuencias de longitud  $n$  cuya suma es  $\leq d$  es equivalente a considerar los casos en que la suma es: exactamente  $d$ , exactamente  $d - 1$ , etc.

Por otro lado:

$$F_1(n, d) = \binom{n-1+d}{d}$$

Entonces:

$$F(n, d) = \binom{n-1+d}{d} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^d \binom{i-1+j}{j}$$

Para poder estimar la complejidad se puede acotar  $F(n, d)$  del siguiente modo:

$$\binom{n-1+d}{d} \leq F(n, d) \leq nd \binom{n-1+d}{d}$$

En este caso, a diferencia del algoritmo combinatorio analizado en la sección anterior,  $n$  y  $d$  son independientes. Para determinar el orden del algoritmo se asume que:

- $n, d \rightarrow \infty$
- $n \sim d$

**Proposición 4.3.5.**  $n^{-1/2}4^n < F(n, d) < n^{3/2}4^n$

La verificación de la proposición surge directamente de reescribir la cota inferior a partir de la fórmula de Stirling ( $h! \sim (\frac{h}{e})^h \sqrt{2\pi h}$ ):

$$\binom{n-1+d}{d} \sim n^{-1/2}4^n$$

Por lo tanto:

$$n^{-1/2}4^n \leq F(n, d) \leq n^{3/2}4^n$$

**Corolario 4.3.6.** *El orden del algoritmo es  $O(n^{3/2}4^n)$*

### 4.3.3. Conclusiones

Los algoritmos descritos no son eficientes en el sentido de que su complejidad no es polinomial. No obstante, tienen buena performance para los valores de los parámetros requeridos en los casos de estudio.

## 4.4. Algoritmos de Álgebra Diferencial

A continuación se describen los algoritmos que implementan las operaciones de álgebra diferencial.

#### 4.4.1. Observaciones Preliminares

Vamos a fijar en  $\mathbb{C}^n$  al espacio ambiente.

Sea  $\omega \in \Omega^r(c+r)$  una 1-forma genérica. La podemos escribir de manera única como

$$\omega = \sum_{\substack{I \in \{0,1\}^n \\ |I|=r}} f_I dx_I = \sum_{\substack{I \in \{0,1\}^n \\ |I|=r}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=c}} a_{I,\alpha} X^\alpha dx_I$$

donde  $f_I \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_c$ ,  $a_{\alpha,I} \in \mathbb{C}$  y notamos  $X^\alpha$  como

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

y a  $dx_I$  como

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

donde  $i_1, \dots, i_r$  son las coordenadas de  $I$  tales que  $I_{i_k} = 1$  para  $k = 1, \dots, r$ .

De esta forma, podemos ver a  $\Omega^r(c+r)$  como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con la base

$$\mathcal{B}_{c,r} = \{X^\alpha dx_I\}_{\alpha,I}$$

y a cada  $\omega \in \Omega^r(c+r)$  asociarle las coordenadas  $(a_{\alpha,I})$  en  $\mathcal{B}_{c,r}$ .

Lo mismo se puede hacer para cualquier otro  $\Omega^-(\cdot)$ . La idea de todo esto es expresar las operaciones usuales del algebra diferencial en coordenadas en las bases  $\mathcal{B}_{-, \cdot}$  para poder computar soluciones de ecuaciones.

#### 4.4.2. Wedge : $\omega \wedge \eta$

Sea  $\omega \in \Omega^r(c+r)$  como antes y tomemos  $\eta \in \Omega^s(d+s)$  como

$$\eta = \sum_{\substack{J \in \{0,1\}^n \\ |J|=s}} g_J dx_J = \sum_{\substack{J \in \{0,1\}^n \\ |J|=s}} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta|=d}} b_{J,\beta} X^\beta dx_J.$$

Calculemos  $\omega \wedge \eta$ :

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \left( \sum_{|I|=r} f_I dx_I \right) \wedge \left( \sum_{|J|=s} g_J dx_J \right) = \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=s}} f_I g_J dx_I \wedge dx_J = \\ &= \sum_{\substack{|I|=r \\ |K|=r+s}} f_I g_{K \setminus I} dx_I \wedge dx_{K \setminus I} = \sum_{|K|=r+s} \left( \sum_{|I|=r} s g(I, K \setminus I) f_I g_{K \setminus I} \right) dx_K = \\ &= \sum_{|K|=r+s} h_K dx_K \end{aligned}$$

donde  $sg(I, K \setminus I)$  es el signo del producto  $dx_I \wedge dx_{K \setminus I}$ . Continuando

$$\begin{aligned} h_K &= \sum_{|I|=r} sg(I, K \setminus I) f_I g_{K \setminus I} = \sum_{|I|=r} sg(I, K \setminus I) \left( \sum_{\substack{|\alpha|=c \\ |\beta|=d}} a_{I,\alpha} b_{K \setminus I,\beta} X^{\alpha+\beta} \right) = \\ &= \sum_{|\gamma|=c+d} \left( \sum_{\substack{|I|=r \\ |\alpha|=c}} sg(I, K \setminus I) a_{I,\alpha} b_{K \setminus I,\gamma \setminus \alpha} \right) X^\gamma \end{aligned}$$

Es decir que podemos escribir<sup>(1)</sup>

$$\omega \wedge \eta = \sum_{|K|=r+s} \sum_{|\gamma|=c+d} \left( \sum_{\substack{|I|=r \\ |\alpha|=c}} sg(I, K \setminus I) a_{I,\alpha} b_{K \setminus I,\gamma \setminus \alpha} \right) X^\gamma dx_K$$

**Algoritmo 4.4.1** (Algoritmo  $\phi = \omega \wedge \eta$ ).

$\Leftarrow$  **INPUT:** Dos formas diferenciales  $\omega \in \Omega^r(c+r)$  y  $\eta \in \Omega^s(d+s)$

$\Rightarrow$  **OUTPUT:** Una forma diferencial  $\phi \in \Omega^{r+s}((c+d) + (r+s))$

1. WEDGE := 0 (inicializar el resultado)
2. Construir los monomios y diferenciales de la forma resultante (formCoefficients)
3. Para cada termino t de la forma resultante
4.  $D_\omega :=$  conjunto de los diferenciales aportados por  $\omega$  (combinatorio n,  $r(\omega)$ )
5.  $M_\omega :=$  multigrados de los monomios aportados por  $\omega$  (monomialsDegrees)
6. para cada diferencial  $d_\omega$  de  $D_\omega$
7.  $d_\eta :=$  calcular el diferencial de  $\eta$  asociado a  $d_\omega$  ( $t-d_\omega$ )
8. para cada multigrado  $m_\omega$  de  $M_\omega$
9.  $m_\eta :=$  calcular el multigrado de  $\eta$  asociado a  $m_\omega$  ( $t-m_\omega$ )
10. WEDGE = WEDGE +  $\omega(m_\omega; d_\omega) * \eta(m_\eta; d_\eta)$

<sup>1</sup>Siempre se puede agregar  $I \subset K$  y  $\alpha \subset \gamma$  para simplificar la cuenta.

**4.4.3. Diferencial :  $d\omega$** 

Vamos a calcular el diferencial exterior de  $\omega$ .

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{|I|=r} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_I = \sum_{|K|=r+1} \left( \sum_{i=1}^n sg(\{i\}, K \setminus \{i\}) \frac{\partial f_{K \setminus \{i\}}}{\partial x_i} \right) dx_K = \\ &= \sum_{|K|=r+1} h_K dx_K \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x_i} = \alpha_i X^{\alpha - \varepsilon_i}$ , veamos la pinta que tiene  $h_K$ :

$$\begin{aligned} h_K &= \sum_{i=1}^n sg(\{i\}, K \setminus \{i\}) \frac{\partial f_{K \setminus \{i\}}}{\partial x_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ |\alpha|=c}}^n sg(\{i\}, K \setminus \{i\}) \alpha_i a_{K \setminus I, \alpha} X^{\alpha - \varepsilon_i} = \\ &= \sum_{|\gamma|=c-1} \left( \sum_i sg(\{i\}, K \setminus \{i\}) (\gamma_i + 1) a_{K \setminus I, \gamma + \varepsilon_i} \right) X^\gamma \end{aligned}$$

de esta forma

$$d\omega = \sum_{|K|=r+1} \sum_{|\gamma|=c-1} \left( \sum_i sg(\{i\}, K \setminus \{i\}) (\gamma_i + 1) a_{K \setminus I, \gamma + \varepsilon_i} \right) X^\gamma dx_K$$

**Algoritmo 4.4.2** (Algoritmo  $d\omega$ ).

$\Leftarrow$  **INPUT**: Una forma diferencial  $\omega \in \Omega^r(c+r)$

$\Rightarrow$  **OUTPUT**: Una forma diferencial  $d\omega \in \Omega^{r-1}((c+r))$

1. `DIFFEXT := 0` (inicilizar el resultado)
2. Construir los monomios y diferenciales de la forma resultante (`formCoefficients`)
3. Para cada termino `t` de la forma resultante
4.  $(M_t, D_t) :=$  (multigrado de `t`, diferencial de `t`)
5. para cada diferencial  $d_t$  en  $D_t$
6.  $d_\omega :=$  el diferencial  $D_t$  quitando  $d_t$
7.  $m_\omega :=$  el multiíndice  $M_t$  con el exponente asociado a la variable  $x_t$  incrementado en 1
8. `DIFFEXT = DIFFEXT +  $\omega(m_\omega; d_\omega)$`

#### 4.4.4. Contracción : $\langle Y, \omega \rangle$

Sea  $Y \in T(s-1)$  un campo de vectores. Tenemos que  $Y$  se escribe como

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i \partial x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\delta|=s}} y_{i,\delta} X^\delta \partial x_i$$

donde por  $\partial x_i$  entendemos  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Calulemos la contracción de  $\omega$  por  $Y$ :

$$\begin{aligned} \langle Y, \omega \rangle &= \sum_{i,I} Y_i f_I \langle \partial x_i, dx_I \rangle = \sum_{|K|=r-1} \left( \sum_i sg(i, K + \varepsilon_i) Y_i f_{K+\varepsilon_i} \right) dx_K = \\ &= \sum_{|K|=r-1} h_K dx_K \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_K &= \sum_i sg(i, K + \varepsilon_i) Y_i f_{K+\varepsilon_i} = \sum_i \sum_{\substack{|\delta|=s \\ |\alpha|=c}} sg(i, K + \varepsilon_i) y_{i,\delta} a_{K+\varepsilon_i,\alpha} X^{\alpha+\delta} = \\ &= \sum_{|\gamma|=s+c} \left( \sum_{i,\delta} sg(i, K + \varepsilon_i) y_{i,\delta} a_{K+\varepsilon_i,\gamma \setminus \delta} \right) X^\gamma \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\langle Y, \omega \rangle = \sum_{|K|=r-1} \sum_{|\gamma|=s+c} \left( \sum_{\substack{i \\ |\delta|=s}} sg(i, K + \varepsilon_i) y_{i,\delta} a_{K+\varepsilon_i,\gamma \setminus \delta} \right) X^\gamma dx_K$$

**Algoritmo 4.4.3** (Algoritmo  $\langle Y, \omega \rangle$ ).

$\Leftarrow$  **INPUT**: Una forma diferencial  $\omega \in \Omega^r(c)$  y un campo de vectores  $Y \in T(s-1)$

$\Rightarrow$  **OUTPUT**: Una forma diferencial  $\phi \in \Omega^{r-1}(c+s)$

1. **CONTRACTION** := 0 (inicializar el resultado)
2. Construir los monomios y diferenciales de la forma resultante (formCoefficients)
3. Para cada termino  $t$  de la forma resultante
4.  $(M_t, D_t) :=$  (multigrado de  $t$ , diferencial de  $t$ )
5.  $M_Y :=$  multigrados de los monomios aportados por  $Y$  (monomialsDegrees)
6. para cada variable del espacio  $x_i$

7. si  $dx_i$  no ocurre en  $D_t$
8. para cada multigrado  $m_Y$  de  $M_Y$
9.  $d_\omega :=$  construir el diferencial de  $\omega$  ( $D_t \wedge dx_i$ )
10.  $m_\omega :=$  calcular el multigrado de  $\omega$  asociado a  $m_Y$  ( $M_t - m_Y$ )
11.  $\text{CONTRACTION} = \text{CONTRACTION} + \omega(m_\omega; d_\omega) * Y(m_Y; \partial x_i)$

# Capítulo 5

## Casos de estudio

### 5.1. Observaciones preliminares

A continuación se darán algunas definiciones para poder estudiar ciertos aspectos del espacio de foliaciones proyectivas.

**Definición 5.1.1.** Una 1-forma *logarítmica*  $\omega \in \mathbb{P}^n$  se define en coordenadas homogéneas como:

$$\omega = \left( \prod_{i=1}^r f_i \right) \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{df_i}{f_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i F_i df_i$$

donde  $r \geq 2$ ,  $f_1, \dots, f_r$  son polinomios homogéneos,  $F_i = (\prod_{j \neq i} f_j)$  y los escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  verifican:

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \deg(f_i) = 0$$

**Definición 5.1.2.** Una 1-forma *racional*  $\omega \in \mathbb{P}^n$  se define en coordenadas homogéneas como:

$$\omega = gr(f)fdg - gr(g)gdf$$

donde  $f$  y  $g$  son polinomios homogéneos y  $gr(f)$ ,  $gr(g)$  son los grados de  $f$  y  $g$ .

Como se mencionó en la última sección de la reseña histórica, al conjunto de foliaciones de codimensión uno y grado  $k$  en  $\mathbb{P}^n$  se lo denota  $\mathbb{Fol}(n,k)$ . Una foliación de  $\mathbb{Fol}(n,k)$  se representa en coordenadas homogéneas por una 1-forma de grado  $k + 1$ .

Se mencionó también que  $\mathbb{Fol}(n,1)$  ( $n \geq 3$ ) consta de 2 componentes irreducibles:

1.  $\mathcal{R}(n; 1, 2)$ : son formas racionales tal que  $\deg(f) = 1, \deg(g) = 2$ .
2.  $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$ : son formas logarítmicas tal que  $\deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = 1$ .

Por último,  $\mathbb{Fol}(n,2)$  ( $n \geq 3$ ) consta de 6 componentes irreducibles:

1.  $\mathcal{R}(n; 2, 2)$ : son formas racionales tal que  $\deg(f) = \deg(g) = 2$ .

2.  $\mathcal{R}(n; 1, 3)$ : son formas racionales tal que  $\deg(f) = 1$  y  $\deg(g) = 3$ .
3.  $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$ : son formas logarítmicas tal que  $\deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = \deg(f_4) = 1$ .
4.  $\mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$ : son formas logarítmicas tal que  $\deg(f_1) = \deg(f_2) = 1$  y  $\deg(f_3) = 2$ .
5.  $PBL(n, 2)$ : son formas que son pull-back de foliaciones en  $\mathbb{P}^2$  por una aplicación racional:  $\phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$
6.  $\mathcal{A}f(n; 1, 2, 3; 1, -1)$ : a esta componente se la conoce como *componente excepcional*.

## 5.2. Componentes irreducibles

El problema de entender las componentes irreducibles del espacio de moduli de foliaciones proyectivas fue el que motivó el desarrollo de **diffAlg**. Lo que se conoce hasta ahora está expuesto en [LN07].

El objetivo era tratar de extender los resultados conocidos a  $\mathbb{F}ol(n, 3)$ . Pero eso no fue posible porque, a pesar de que con **diffAlg** se puede generar el ideal de ecuaciones, los sistemas de álgebra conmutativa (*Singular* y *Macaulay2*) no pueden calcular la *base de Gröbner* requerida para hacer una *descomposición primaria* del ideal.

Por lo tanto tuvimos que orientar el estudio en otras direcciones.

### 5.2.1. Folioaciones en $\mathbb{P}^2$

Es un resultado conocido que los elementos del conjunto  $\mathbb{F}ol(2, k)$  (el conjunto de foliaciones en  $\mathbb{P}^2$  de grado  $k + 1$ ) definen una única componente irreducible.

En *Singular* y *Macaulay2* se puede computar el espacio de moduli de foliaciones de  $\mathbb{P}^2$  grado a grado. Para eso primero es necesario generar el ideal con **diffAlg**. Por ejemplo, el siguiente programa calcula las foliaciones en  $\mathbb{F}ol(2, 1)$  (que equivalen a 1-formas de grado 2 integrables y proyectivas):

```
$w = newForm(3,1,2,"w","a");
my $integ = $w ^ d$w;
renameForm($integ, "integ");
renameForm(contraction(R(3), $w),"contr");
toSingular("integ", "contr");
```

De modo análogo se puede computar el ideal para grados superiores. A continuación se detallan los resultados de este análisis:

espacio	grado	componentes	dimensión
Fol(2,0)	1	1	3
Fol(2,1)	2	1	8
Fol(2,2)	3	1	15
Fol(2,3)	4	1	24
Fol(2,4)	5	1	35
Fol(2,5)	6	1	48
Fol(2,6)	7	1	63
Fol(2,7)	8	1	80

Donde el "grado" es el grado de los monomios de las formas diferenciales, las "componentes" es la cantidad de componentes de la variedad en el espacio de moduli y la "dimensión" es la dimensión de la variedad. Este análisis permite verificar en estos casos que  $\text{Fol}(2,k)$  define una única componente y que la dimensión de  $\text{Fol}(2,k)$  es  $(k+1)(k+3)$ . Esto último se debe a que las únicas ecuaciones que tienen relevancia son las de radialidad. Estas tienen la codimensión correcta.

Este resultado es útil como cota de la dimensión de la componente pull-back:  $PBL(n,k)$  para cualquier  $k$ .

### 5.3. Espacio tangente

Las definiciones de deformaciones infinitesimales de una foliación, se encuentran en el apéndice de "Deformaciones y Unfoldings".

El espacio tangente en un punto  $\omega$  del espacio de moduli se identifica con las *deformaciones infinitesimales* de  $\omega$  módulo la deformación en la dirección de  $\omega$ .

La dimensión del espacio tangente en un punto regular de una variedad tiene la misma dimensión que la variedad, o sea que a partir de esa información local se puede extraer información global.

El espacio tangente en un punto es un espacio vectorial. `diffAlg` permite calcular una base del mismo.

#### 5.3.1. Caso de estudio: $\mathcal{L}(4; 1, 1, 2)$

Para ilustrar el procedimiento, consideremos la siguiente 1-forma genérica  $\omega \in \mathcal{L}(4; 1, 1, 2)$  (que se corresponde con un punto regular del espacio de moduli):

$$\omega = \lambda_1 f_2 f_3 df_1 + \lambda_2 f_1 f_3 df_2 + \lambda_3 f_1 f_2 df_3$$

$$f_1 = x_1$$

$$f_2 = x_2$$

$$f_3 = x_1^2 - x_2^2 + ix_3^2 - ix_4^2$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -\frac{1+i}{2}$$

Para generar los polinomios  $f_1, \dots, f_3$  ver el apéndice correspondiente. El programa que genera la forma  $\omega$  es:

```
$f1 = newForm('f1');
$f2 = newForm('f2');
$f3 = newForm('f3');

$w1 = ($f2 ^ $f3) ^ d($f1);
$w2 = wedgeScalar(i, ($f1 ^ $f3) ^ d($f2));
$w3 = wedgeScalar(-(i+1)/2, ($f1 ^ $f2) ^ d($f3));
$w = $w1 + $w2 + $w3;
```

El programa que calcula las deformaciones infinitesimales proyectivas de  $\omega$  es:

```
$w = newForm('w');
$n = newForm(4,1,3,'n','b');

renameForm(contraction(R(4), $n), 'contraccion');
renameForm($w ^ d$n + d$w ^ $n, 'deformaciones');
toSingular("deformaciones",'contraccion');
```

Este programa genera el ideal de ecuaciones que expresan las dos condiciones: que la forma descienda al espacio proyectivo y que sea una deformación de  $\omega$ . La última línea del programa genera un archivo para *Singular*. Y por ejemplo se puede calcular la dimensión de dicho espacio:

Ejecutar <sup>1</sup>:

```
Singular deformaciones__contraccion.singular
dim(groebner(I));
```

La dimensión de las deformaciones infinitesimales es 17, por lo tanto la dimensión del espacio tangente es 16 (porque hay que cocientar por la deformación en la dirección de  $\omega$ ). Para calcular específicamente los generadores de este espacio en el formato interno de **diffAlg**, se puede proceder de la siguiente manera en la línea de comando:

```
./cmd -gK deformaciones__contraccion
./cmd -tS deformaciones__contraccion_gK
./cmd -eG deformaciones__contraccion_gK.singular
```

Estos comandos generan los 17 archivos correspondientes a los generadores de las deformaciones infinitesimales.

---

<sup>1</sup>Observar que en este caso las ecuaciones son lineales, de modo que el cálculo de la base de Gröbner se reduce a triangular un matriz

## 5.4. Deformaciones y Unfoldings

En esta sección se comparan *deformaciones* y *unfoldings* de una foliación dada. Se suponen conocidos los contenidos del apéndice correspondiente en el que se definen los conceptos

### 5.4.1. Caso de estudio: $\mathcal{L}(4; 1, 1, 2)$

Este caso de estudio se anexa al caso anterior (espacio tangente). La idea es calcular la dimensión de los espacios de la sucesión exacta (definida en el apéndice):

$$\sigma_1 : 0 \longrightarrow K(\omega) \longrightarrow U(\omega) \longrightarrow D(\omega)$$

asociados a una 1-forma  $\omega$ . La dimensión de  $D(\omega)$  como se mostró anteriormente es 17.

El programa que calcula las ecuaciones que definen a  $K(\omega)$  (*factores integrantes*) y  $U(\omega)$  (*unfoldings*) es el siguiente:

```
$w = newForm("w");
$h = newForm(4,0,4,"h","a" );
$n = newForm(4,1,3,"n","b");

$factIntegrantes = $h ^ (d$w)+$w ^ (d$h);
$unfoldings = ($h ^ (d$w))-($w ^ ($n-(d$h)));
```

Cabe aclarar que la condición de radialidad está implicada por la condición de unfolding, por lo tanto no hay que contraer a  $\$n$  con el campo radial

En este análisis surge que las dimensiones de los espacios vectoriales  $K(\omega)$ ,  $U(\omega)$  y  $D(\omega)$  son respectivamente: 1, 17 y 17. Esto muestra que la dimensión de la proyección de  $U(\omega)$  en  $D(\omega)$  es 16, por lo tanto existe una deformación que no proviene de un unfolding.

### 5.4.2. Conclusiones

Este caso de estudio se muestra cómo es posible calcular la homología del complejos  $\sigma_1$  para una forma diferencial fija. Esa información es valiosa porque aclara la relación entre las deformaciones y los unfoldings de la foliación asociada, algo que no estaba explorado hasta ahora.

Este tema está desarrollado en profundidad en [Mol12].

## Capítulo 6

# Conclusiones

Si bien el proyecto fue pensado para calcular las componentes irreducibles de foliaciones de codimensión 1 en  $\mathbb{P}^n$  de grado 3, esto no fue posible porque la técnica empleada por los programas de álgebra conmutativa, las *bases de Gröbner*, tienen una complejidad doblemente exponencial.

El proyecto fue fundamental para calcular la dimensión del espacio tangente en un punto del *espacio de moduli de foliaciones proyectivas*. Esto se debe a que el espacio tangente está dado por ecuaciones lineales y este cálculo tiene complejidad polinomial. Por ejemplo, esto permite determinar si dos puntos regulares dados están en distintas componentes, esto se puede ver comparando las dimensiones de sus respectivos espacios tangentes.

Este proyecto pudo realizarse combinando conocimientos provenientes de distintas disciplinas. Demostró gran utilidad para extraer conclusiones de diversos casos de estudio, por ejemplo: la conexión entre deformaciones y unfoldings. Permitió enunciar conjeturas y construir contraejemplos. En particular el trabajo doctoral [Mol12] hizo uso intensivo de las capacidades de este proyecto.

## Capítulo 7

# Trabajos futuros

Un trabajo futuro a realizar es el de computar la dimensión de las componentes logarítmicas y racionales. Para eso se debe generar un programa heurístico que calcule la dimensión del espacio tangente en un punto regular logarítmico o racional elegido al azar.

La dimensión del espacio tangente en un punto se calcula como el rango de una matriz. En los ejemplos estas matrices son esparsas y de gran tamaño, por lo cual nos vimos en la necesidad de hacer una aplicación que triangule este tipo de matrices. Los programas de cálculo numérico (*Octave*, *Matlab*) tienen limitaciones para tratar estos casos. El problema que se nos presentó es poder controlar la propagación de los errores con operaciones de punto flotante. Una alternativa que implementamos fue considerar las operaciones en cuerpos finitos, dando un resultado exacto. Quedaría pendiente solucionar el problema en característica 0.

## Capítulo 8

# Apéndices

### 8.1. Operaciones con diffAlg

#### 8.1.1. Los programas *perl*

Los programas en *perl* deben incluir el siguiente encabezado:

```
#!/usr/bin/perl
use DB_File;
use Form;
use Tools;
require "formrc";
```

Hay dos formas de empezar a trabajar en un programa: cargando una forma diferencial que ya existe en el directorio de trabajo o crear una forma genérica (donde los coeficientes son variables). La instrucción es la misma con distintos parámetros. Por ejemplo, si en el directorio de trabajo ya está creada la forma  $\omega$ , la instrucción:

```
$w = newForm("omega");
```

la carga y se la asigna a la variable  $\$w$ . Por otro lado, si se quiere trabajar con una forma genérica, se la puede construir mediante:

```
$w = newForm(4,1,2,"omega","a");
```

en este caso se crea el archivo `omega` que representa una 1-forma de grado 2 en las variables  $x_1, \dots, x_4$ , donde los coeficientes son las variables  $a_i$ , y se la asigna a la variable  $\$w$ .

Las operaciones entre formas diferenciales son operadores sobrecargados. La siguiente tabla describe sus características:

<i>operador</i>	<i>descripcion</i>	<i>ejemplo</i>
$\wedge$	wedge de dos formas	$\$w \wedge \$h$
$+$	suma dos formas	$\$w + \$h$
$-$	resta dos formas	$\$w - \$h$
$\parallel$	contrae una forma por un campo	$\$campo \parallel \$forma$
$d$	diferencial de una forma	$d\$w$
$R$	es el campo radial	$R$

A modo de ejemplo se detalla un programa que permite calcular las ecuaciones de las 1-formas integrables de grado 2 en las variables  $x_1, \dots, x_4$ :

```
#!/usr/bin/perl
use DB_File;
use Form;
use Tools;
require "formrc";

$w = newForm(4,1,2,"omega", "a");
$w ^ d$w;
```

### 8.1.2. Creación manual de formas diferenciales y polinomios

Para definir manualmente formas diferenciales, debe seguirse el siguiente procedimiento:

1. Crear un archivo de texto con cierto formato.
2. Editar el archivo para ingresar los coeficientes.
3. Transformar el archivo de texto en una Berkeley DB.

Supongamos que se quiere crear la siguiente forma diferencial:

$$\omega = 2x_1^2 dx_2 + x_2 x_3 dx_3 + 3x_4^2 dx_4$$

Se trata de una 1-forma homogénea de grado 2 en las variables  $x_1, \dots, x_4$ . Para crear el archivo de texto se emplea el comando:

```
cmd -d 4 1 2 omega
```

Este comando genera el archivo de texto `omega.mk`. El archivo de texto contiene pares (`clave=valor`) donde la clave codifica el diferencial y el multigrado de cada término (separados por ";") y el valor es el coeficiente de dicho monomio. Por ejemplo, el par: `2;2,0,0,0` = 2 representa al término  $2x_1^2 dx_2$ .

Luego hay que editar el archivo e ingresar los valores de los coeficientes de  $\omega$ :

$$2; 2, 0, 0, 0 = 2$$

$$3; 1, 1, 0, 0 = 1$$

$$4; 0, 0, 0, 2 = 3$$

Para transformar el archivo en una Berkeley DB hay que ejecutar el comando:

```
cmd -b omega.mk
```

Este comando crea los dos archivos que representan a la forma  $\omega$ : el archivo con los términos ("omega") y el de metadata ("omega.meta"). En caso de que se quiera definir manualmente un polinomio el procedimiento es el mismo teniendo en cuenta que un polinomio es una 0-forma.

### 8.1.3. Visualizar una forma diferencial

Una forma diferencial está representada por dos archivos: uno contiene los términos de la forma y otro contiene la metadata. Ambos son archivos con formato Berkeley DB del tipo (`clave=valor`).

Supongamos que en el directorio de trabajo tenemos los archivos correspondientes a una cierta forma  $\omega$ . Para visualizar sus términos hay que ejecutar el comando:

```
cmd -v omega
```

Y para visualizar sus metadata hay que ejecutar el comando:

```
cmd -v omega.meta
```

### 8.1.4. Traducción a Singular y Macaulay2

Al trabajar con formas diferenciales en un cierto espacio vectorial  $\Omega_{\mathbb{P}^k}^r(d)$ , es de gran utilidad saber bajo qué condiciones se anulan sus coeficientes (que son polinomios en un cierto anillo). Ese análisis se traduce en el estudio del ideal definido por los coeficientes.

En este tipo de situaciones es conveniente traducir las ecuaciones del ideal al formato de un lenguaje de álgebra conmutativa como *Singular* o *Macaulay2*. Para ello **diffAlg** provee 2 funciones. Supongamos que en el directorio de trabajo se tiene una forma  $\omega$  cuyo ideal de coeficientes se quiere traducir. En el caso de Singular hay que ejecutar:

```
cmd -tS omega
```

Y en el caso de Macaulay2:

```
cmd -tM omega
```

Estos comandos dejan en el directorio de trabajo los archivos `omega.singular` y `omega.macaulay2` respectivamente.

### 8.1.5. Dimensión de un ideal en Singular

Una vez que se tradujo un ideal al lenguaje *Singular*, uno puede por ejemplo querer calcular su dimensión. Supongamos que en el directorio de trabajo se tiene una forma  $\omega$  y su correspondiente traducción a Singular. Primero hay que cargar el ideal en Singular.

```
Singular omega.singular
```

Y luego dentro de Singular, para calcular la dimensión hay que ejecutar el comando:

```
dim(groebner(I));
```

## 8.2. Deformaciones y Unfoldings

### 8.2.1. Definiciones

En esta sección se mostrará cómo el proyecto **diffAlg** permitió precisar algunas conexiones entre las nociones de *deformación* y de *unfolding* de una foliación proyectiva de un cierto grado fijo.

Trabajaremos con una foliación fija, que por el teorema de Frobenius equivale a  $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d)$  homogénea que verifica:

- Condición de integrabilidad:  $\omega \wedge d\omega = 0$ .
- Contracción con el el *campo radial*:  $i_R(\omega) = 0$ .

A lo largo de la sección  $S$  designará a  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , y  $S_d$  será la componente homogénea de grado  $d$ .

**Definición 8.2.1.** Una *deformación infinitesimal de orden 1* de  $\omega$  está dada por una 1-forma diferencial integrable  $\delta_\omega$  de la siguiente forma:

$$\delta_\omega = \omega + \epsilon\eta$$

donde  $\epsilon^2 = 0$ ,  $\eta \in \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d)$ .

La condición de integrabilidad de  $\delta_\omega$  se sintetiza en la expresión:

$$\omega \Delta \eta := \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta = 0$$

Al conjunto de deformaciones de  $\omega$ , lo denotamos:

$$D(\omega) = \{\eta \in \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d) / \omega \Delta \eta = 0\}$$

**Definición 8.2.2.** Un *unfolding infinitesimal de orden 1* de  $\omega$  está dada por una 1-forma diferencial integrable  $\mu_\omega$  de la siguiente forma:

$$\mu_\omega = \omega + \epsilon\eta + h d\epsilon$$

donde  $\epsilon^2 = \epsilon d\epsilon = 0$ ,  $\eta \in \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d)$ ,  $h \in S_d$ .

La condición de integrabilidad de  $\mu_\omega$  se sintetiza en la expresión:

$$hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)$$

Al conjunto de unfoldings de  $\omega$ , lo denotamos:

$$U(\omega) = \{(h, \eta) \in S_d \times \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d) / hd\omega = \omega \wedge (\eta - dh)\}$$

**Definición 8.2.3.** Un *factor integrante* es un polinomio homogéneo  $h \in S_d$  tal que:

$$hd\omega = -\omega \wedge dh$$

De modo equivalente un factor integrante es un polinomio  $h \in S_d$  tal que:

$$d(\omega/h) = 0$$

Al conjunto de factores integrantes de  $\omega$ , lo denotamos:

$$K(\omega) = \{h \in S_d / hd\omega = -\omega \wedge dh\}$$

Un hecho inmediato de la definición anterior es que:

$$(h, 0) \in U(\omega) \Leftrightarrow h \in K(\omega)$$

Por otro lado, vale la siguiente propiedad:

$$(h, \eta) \in U(\omega) \Rightarrow \eta \in D(\omega)$$

Estos hechos dan lugar a la siguiente sucesión exacta corta:

$$\sigma_1 : 0 \longrightarrow K(\omega) \longrightarrow U(\omega) \longrightarrow D(\omega)$$

### 8.2.2. Clases de isomorfismo

Antes de enunciar las definiciones cabe mencionar que un campo de vectores de grado 0 es de la forma:

$$X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \deg(f_i) = 1$$

**Definición 8.2.4.** El espacio de *clases de isomorfismo de deformaciones* se define del siguiente modo

$$\begin{aligned}\bar{D}(\omega) &= D(\omega)/L(\omega) \\ L(\omega) &= \{L_X(\omega)/ \quad X \text{ es un campo de vectores de grado } 0\}\end{aligned}$$

**Definición 8.2.5.** El espacio de *clases de isomorfismo de unfoldings* se define del siguiente modo

$$\begin{aligned}\bar{U}(\omega) &= U(\omega)/J(\omega) \\ J(\omega) &= \{(i_X(\omega), L_X(\omega))/ \quad X \text{ es un campo de vectores de grado } 0\}\end{aligned}$$

Una observación inmediata es que por la proyección en la segunda coordenada:

$$J(\omega) \longrightarrow L(\omega)$$

Esto permite pasar al cociente la sucesión exacta  $\sigma_1$ :

$$\sigma_2 : 0 \longrightarrow K(\omega)/J_1(\omega) \cap K(\omega) \longrightarrow \bar{U}(\omega) \longrightarrow \bar{D}(\omega)$$

donde  $J_1(\omega)$  designa la primer coordenada de  $J(\omega)$ .

# Bibliografía

- [CA94] Omegar Calvo-Andrade. Irreducible components of the space of holomorphic foliations. *Math. Ann.*, 299(4):751–767, 1994.
- [CA03] Omegar Calvo Andrade. *El espacio de foliaciones holomorfas de codimensión uno*, volume 2 of *Monografías del Seminario Iberoamericano de Matemáticas [Monographs of the Seminario Iberoamericano de Matemáticas]*. Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamerica y Portugal, Tordesillas, 2003.
- [CC52] Shiing-Shen Chern and Claude Chevalley. Obituary: Elie Cartan and his mathematical work. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58:217–250, 1952.
- [CLN79] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheações*, volume 9 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [CLN91] D. Cerveau and A. Lins Neto. Holomorphic foliations in  $\mathbf{CP}(2)$  having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 41(4):883–903, 1991.
- [CLN96] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in  $\mathbf{CP}(n)$ ,  $n \geq 3$ . *Ann. of Math. (2)*, 143(3):577–612, 1996.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [God91] Claude Godbillon. *Feuilletages*, volume 98 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.
- [Hae56] André Haefliger. Sur les feuilletages analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242:2908–2910, 1956.
- [Hae05] André Haefliger. Naissance des feuilletages, d’Ehresmann-Reeb á Novikov, In *Géométrie au vingtième siècle: 1930-2000*. pages 257–271, 2005.
- [Haw05] Thomas Hawkins. Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 59(4):381–436, 2005.
- [LN07] Alcides Lins Neto. *Componentes irredutíveis dos espaços de folheações*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2007. 26o Colóquio Brasileiro de Matemática. [26th Brazilian Mathematics Colloquium].

- [Mol12] Ariel Molinuevo. Unfoldings y deformaciones de foliaciones racionales y logarítmicas. *Tesis Doctoral UBA, a publicar*, 2012.
- [War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.
- [Wil02] Herbert S. Wilf. *Algorithms and complexity*. A K Peters Ltd., Natick, MA, second edition, 2002.