Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Tesis de Licenciatura

El número de Champernowne en los grafos de Bruijn

Lucía Irene Cavatorta
LU: 145/02 - *lcavat@dc.uba.ar*

Directora: Dra. Verónica Becher

Buenos Aires - Argentina

Resumen

0,1234567891011121314151617181920212223242526272829303132..
Éste es el primer ejemplo de un número normal en base 10, propiedad que dice que todos los bloques de dígitos de igual longitud ocurren con la misma frecuencia en la expansión decimal (cada dígito ocurre con frecuencia 1/10, los bloques de dos dígitos ocurren con frecuencia 1/100, etc). Éste número fue ideado por D.G. Champernowne en 1933 y sigue siendo el ejemplo más celebrado de un número normal, por tener una definición tan simple, y por ser tan fácil de computar.

En esta tesis reinterpretamos la demostración de normalidad original de Champernowne usando caminos en los clásicos grafos de Bruijn para el alfabeto 0,1,2,3,...,9. Éstos son grafos dirigidos sobre las palabras de una longitud dada; con la propiedad fundamental de que el grafo de línea del grafo de palabras de longitud k coincide con el de palabras de longitud k+1. Usando esta propiedad interpretamos los segmentos sucesivos de la expansión fraccionaria del número de Champernowne como caminos en grafos de Bruijn de palabras de longitud k, para k =2,3,4,...

Abstract

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031 32..
This is the first example of a normal number in base 10, a property that states that every block of digits of the same length appears with the same frequency in the decimal expansion of a given number (each digit appears with a frequency of 1/10, every block of lenght 2 appears with a frequency of 1/100, ect.). This number was thought by D.G. Champernowne in 1933 and it still is the most celebrated example of a normal number, since it has such a simple definition and its computation is extremely easy.

In this thesis we will reinterpret Champernowne's demostration of the normality of his number using paths over the classic de Bruijn graphs for the alphabet 0,1,2,3,...,9. These are directed graphs of words of a given length with the fundamental property that each n-dimensional de Bruijn graph is the line graph of the (n-1)-dimensional de Bruijn graph. Using this property we will interpret the successive segments of the fractional expansion of Champernowne's number as paths over de Bruijn graphs of words of length k, with k = 2,3,4,...

Índice

1. Introducción

Los números reales normales en el sentido de Borel [6], son números reales que en su expansión fraccionaria tienen a todos los bloques de dígitos de igual longitud con la misma frecuencia relativa. Se dicen absolutamente normales si esta equifrecuencia ocurre al expresar el número en toda base mayor o igual que 2. La absoluta normalidad es una versión débil de aleatoriedad, ya que asegura que, a la larga, ningún bloque de dígitos estará favorecido o castigado.

En 1914 Borel define y demuestra que la gran mayoría de los números reales son absolutamente normales (en términos de teoría de la medida esto significa que el conjunto de los números reales absolutamente normales tiene medida de Lebesgue igual a 1). Inmediatamente, Borel plantea el problema de dar ejemplos. Desde entonces, ha sido mucho más sencillo conjeturar la normalidad de un número que demostrarla. Tal es así que son muy pocos los ejemplos conocidos, y en el sentido mismo de Borel [8], no son muy satisfactorios. No se conoce de ellos otras propiedades que la de ser un ejemplo de un número normal [15, 14, 16]. Para aquellos que tienen un método para construilos, defortunadamente, éste es computacionalmente intratable [4, 5].

Aunque el problema de dar ejemplos de números normales en bases particulares ha sido abordado con más éxito [3, 2], sigue siendo un problema matemáticamente y computacionalmente difícil. Por ejemplo, aún no se sabe si las constantes fundamentales como π, y e, son normales en base 10 (se conjetura que sí) [1].

El primer ejemplo de un número normal en base 10 fue ideado por Champernowne en 1933 [9]:

$$0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031 32\ldots$$

Y sigue siendo el ejemplo más celebrado, por tener una definición tan simple, y ser extremadamente fácil de computar. A partir del número de Champernowne se han dado variantes y generalizaciones, como por ejemplo la de Copeland y Erdös [10]. Recientemente se consiguieron nuevos ejemplos con formulaciones analíticas en términos de series, y con algoritmos rápidos para calcularlos, por ejemplo [3].

En esta tesis nos proponemos reinterpretar la demostración de normalidad del número de Champernowne en términos de caminos en los clásicos grafos de Bruijn[11].

Recordemos que los grafos de Bruijn son grafos dirigidos sobre palabras de un alfabeto finito con más de un símbolo. Los grafos de Bruijn son Eulerianos (son fuertemente conexos y cada nodo tiene el mismo grado de entrada que de salida), además poseen una buena propiedad: el grafo de línea de palabras de longitud k coincide con el grafo de palabras de longitud $k+1$. Usando esta propiedad de los grafos de Bruijn planeamos interpretar los segmentos iniciales de la expansión fraccionaria del número de Champernowne como caminos en grafos de Bruijn de palabras de longitud k, para k $= 2, 3, 4, \ldots$, en el alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, ..., \mathtt{9}\}$ que se corresponde con la base 10.

Así obtendremos una demostración de la propiedad de normalidad del número de Champernowne más orgánica que la original, con el propósito de dar un marco general que permita dar demostraciones de normalidad de otros números.

2. Preliminares

2.1. Notación

Aunque el número de Champernowne es un número real entre 0 y 1, lo veremos desde su representación en base 10, concentrándonos exclusivamente en su expansión fraccionaria vista como una secuencia de símbolos 0, 1, 2, ...9 infinita a derecha.

Para referirnos a una secuencia finita de estos símbolos, hablaremos indistintamente de *bloques* o *palabras*. La longitud de una palabra w (denotada $|w|$) es la cantidad de símbolos en w. Para indicar las posiciones dentro de una palabra w lo haremos contando desde 1 a $|w|$. Para indicar el símbolo de w en la posición i, escribimos $w[i]$. Para indicar la palabra comprendida entre las posiciones i y j escribimos $w[i..j]$. Un prefijo de una palabra w es un segmento inicial de w; escribimos $w\upharpoonright i$ para referirnos al prefijo de w de longitud i. Un sufijo de una palabra w es un segmento final de w.

Decimos que una palabra u *ocurre* en w en la posición i si $u = w[i..i+|u|-1]$. Usamos la función $\#occ(u,w)$ para contar la cantidad de ocurrencias de u en w:

$$\#occ(u,w) = \#\{i \mid w[i..i+|u|-1] = u\}$$

Para denotar la concatenación de dos palabras u y v escribimos simplemente uv. En general, dado un alfabeto A, escribimos A^k para denotar todas las palabras de longitud k. Trabajaremos con el alfabeto $\{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2},\mathtt{3},\mathtt{4},\mathtt{5},\mathtt{6},\mathtt{7},\mathtt{8},\mathtt{9}\}$. Dado un símbolo $\mathtt{a}$, escribiremos $\mathtt{a}^k$ para indicar la palabra que se obtienen de concatenar k veces el símbolo $\mathtt{a}$. Así, $\mathtt{0}^k\mathtt{1}$ es la palabra que tiene k 0s, y luego un 1.

En ocasiones usaremos el orden lexicográfico entre palabras, denotado $\preceq$. El orden entre los símbolos 0 al 9, coincide con el orden numérico $\leq$ entre los dígitos 0 al 9. Asimismo, el orden lexicográfico entre palabras de igual longitud coincide con el orden numérico $\leq$ entre los números correspondientes.

2.2. Grafos de Bruijn

Recordemos que un grafo dirigido es un par (S,E), donde S es un conjunto finito de nodos y E es una relación binaria en S. El grado de entrada de un nodo v es $\#\{w : (w,v) \in E\}$, y su grado de salida es $\#\{w : (v,w) \in E\}$.

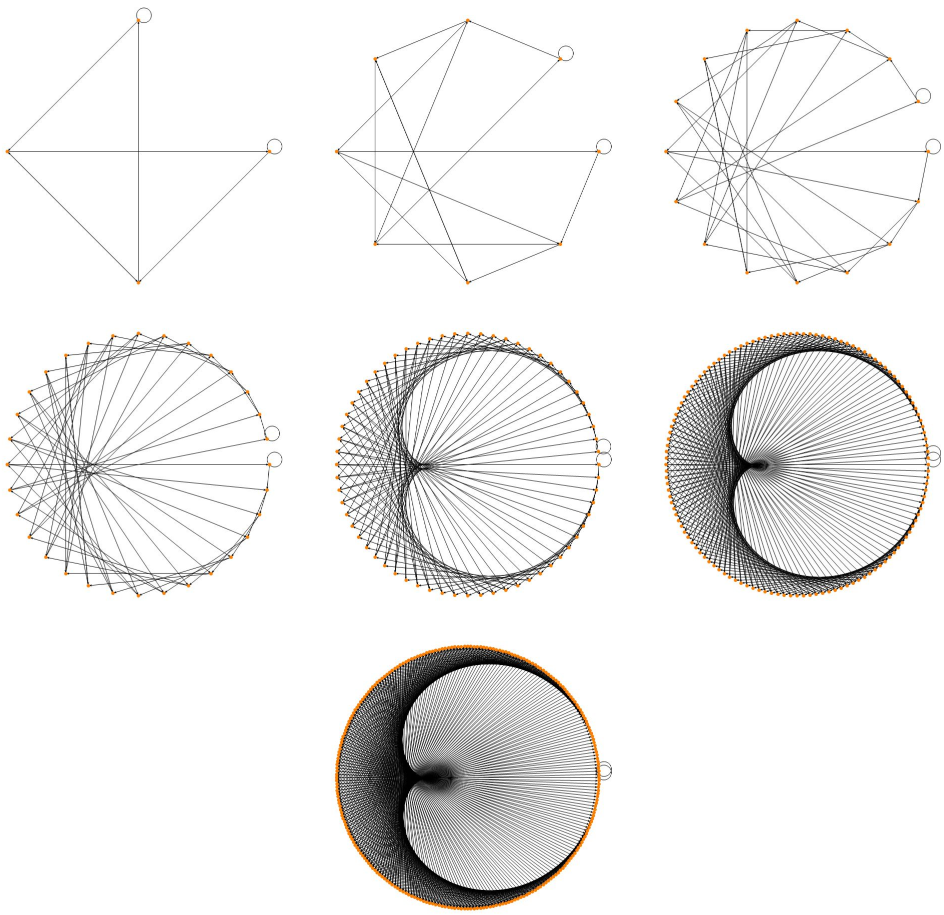
Un camino de longitud $n-1$ en un grafo (S,E) es una secuencia $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ donde $v_i \in S$, $\forall i$, $1 \leq i < n$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $\forall i$, $1 \leq i < n$. Un camino es Hamiltoniano si cada elemento de S aparece en el camino exactamente una vez. Un ciclo Hamiltoniano es un camino cerrado que termina en el nodo con el que comienza. Un ciclo Euleriano es un camino que atraviesa cada arista de E exactamente una vez, pasa por todos los nodos y termina en el nodo con el que comienza. Una exposición de estos temas de teoría de grafos se puede encontrar en los libros [12] o [13].

Un grafo de Bruijn de orden k es un grafo cuyos nodos son todas las palabras de longitud k que se pueden formar sobre un alfabeto dado y cuyas aristas unen palabras que se superponen en $k-1$ símbolos, de modo que el sufijo de una coincide con el prefijo de la otra.

Definición 1 (grafo de Bruijn de palabras de longitud k). *Sea $k \geq 2$ y A un alfabeto finito. El grafo $B_{k,\#A} = (A^k, E)$ es tal que*

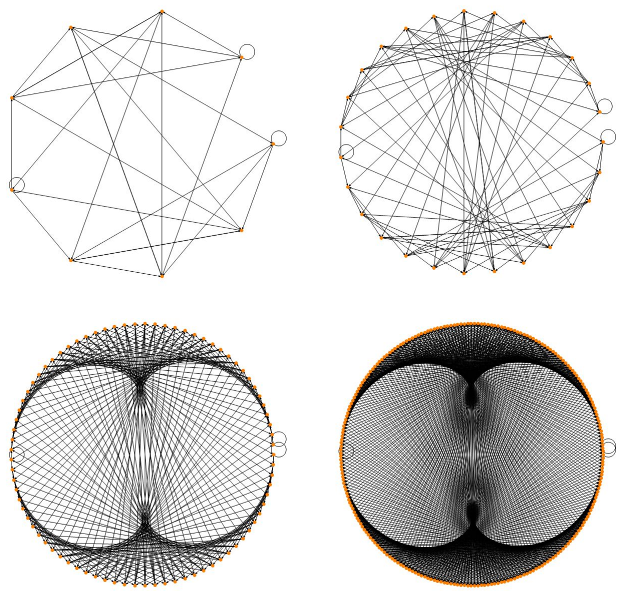
$$E = \{(v,w) : \ v,w \in A^k \ \wedge \ v[2\ldots k] = w[1\ldots(k-1)]\}.$$

Grafos de Bruijn para un alfabeto de 2 símbolos Las siguientes figuras ilustran una sucesión de grafos de Bruijn para un alfabeto de 2 símbolos.



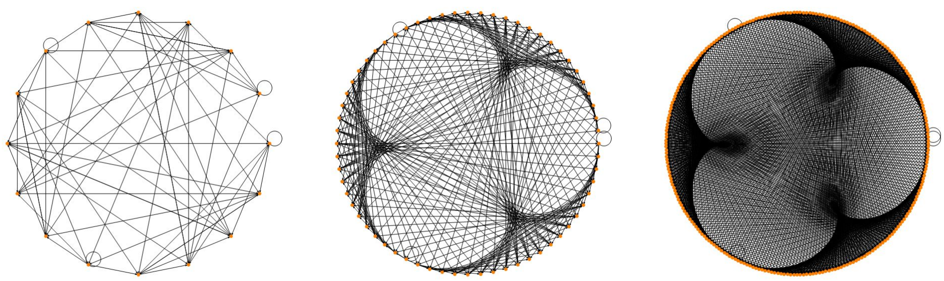
Cuadro 1: Grafo de Bruijn de orden 2 a 8 para alfabetos de 2 símbolos

Grafos de Bruijn para un alfabeto de 3 símbolos Las siguientes figuras ilustran una sucesión de grafos de Bruijn para un alfabeto de 3 símbolos.



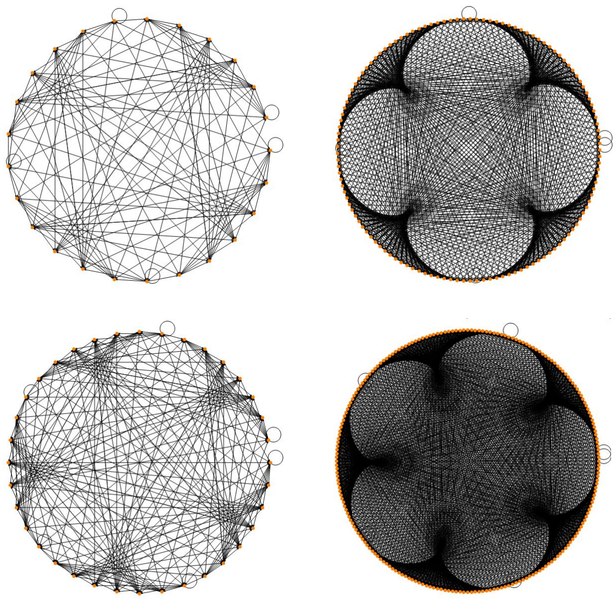
Cuadro 2: Grafo de Bruijn de orden 2 a 5 para alfabetos de 3 símbolos

Grafos de Bruijn para un alfabeto de 4 símbolos Las siguientes figuras ilustran una sucesión de grafos de Bruijn para un alfabeto de 4 símbolos.



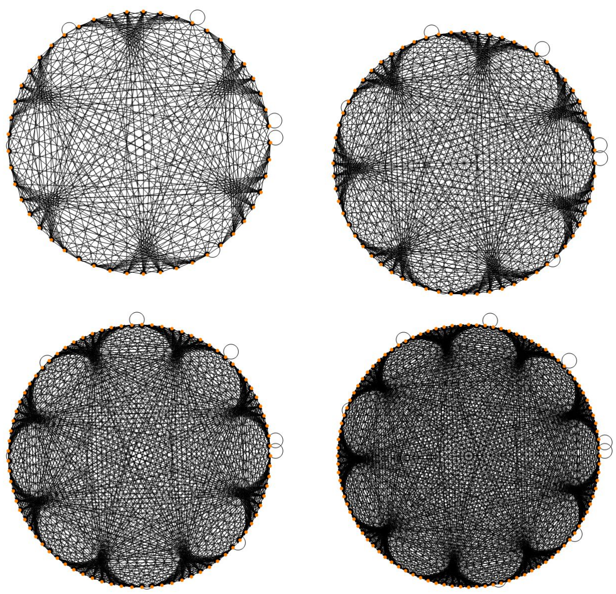
Cuadro 3: Grafo de Bruijn de orden 2 a 4 para alfabetos de 4 símbolos

Grafos de Bruijn para un alfabeto de 5 y 6 símbolos Las siguientes figuras ilustran una sucesión de grafos de Bruijn para un alfabeto de 5 símbolos.



Cuadro 4: Grafo de Bruijn de orden 2 y 3 para alfabetos de 5 y 6 símbolos

Grafos de Bruijn para un alfabeto de 7,8, 9 y 10 símbolos Las siguientes figuras ilustran algunos grafos de Bruijn para alfabetos de 7,8, 9 y 10 símbolos.



Grafo de Bruijn de orden 2 para alfabetos de 7,8, 9 y 10 símbolos

La siguiente observación se desprende inmediatamente de la definición. Sea N el cardinal del alfabeto A.

Observación 2.

1. *$B_{k,\#A}$ tiene N^k nodos y N^{k+1} aristas.*

2. *Cada nodo de $B_{k,\#A}$ tiene grado de entrada y de salida exactamente N.*

En los grafos de Bruijn, se pueden etiquetar las aristas en $B_{k,\#A}$ con palabras de longitud $k+1$, de tal forma que cada etiqueta da una identificación inequívoca de cada arista.

Definición 3 (Etiquetas de aristas y caminos)**.** *Sea $k \geq 2$ y $B = (A^k, E)$:*

1. *Una arista $(v, w) \in E$ se etiqueta $v[1 \dots k]w[k]$.*
2. *Un camino $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ se etiqueta $v_1[1 \dots k]v_2[k]v_3[k] \dots v_n[k]$.*

Nota Para la demostración se relajará la notación de los grafos obviando en el subindice el cardinal. Como la base para la demostración es 10 escribiremos B_i en vez de $B_{i,10}$.

2.3. Notación asintótica de Bachmann-Landau.

2.3.1. "big O"

La notación "big O" (llamada así porque utiliza el símbolo O) describe el comportamiento en el límite de una función para argumentos muy pequeños o muy grandes, generalmente en términos de una función más simple.

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones definidas sobre cierto subconjunto de números reales. Decimos que $f(x)$ es del orden de $g(x)$, y escribimos $f(x) \in O(g(x))$, si y solo si existe un número positivo real M y un número real x_0 tales que para todo $x > x_0$, $|f(x)| \leq M \cdot g(x)$.

La notación "big O" también puede utilizarse junto con otros operadores aritméticos en ecuaciones mas complejas. Por ejemplo, $h(x) + O(f(x))$ denota a las funciones que tienen el crecimiento de $h(x)$ más una parte cuyo crecimiento esta limitado al de $f(x)$. Luego, $g(x) = h(x) + O(f(x))$ expresa lo mismo que $g(x) - h(x) \in O(f(x))$.

Propiedades algebraicas

Multiplicación por una constante

1. *Sea k una constante y $f \in O(g)$ entonces $k \cdot f \in O(g)$.*

Producto

1. *Si $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2)$, entonces $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 g_2)$.*
2. *$f \cdot O(g) \in O(f \cdot g)$.*

Suma

1. *Si $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2)$, entonces $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2)$.*
2. *Si f y g son funciones positivas, $f + O(g) \in O(f + g)$.*

2.3.2. "little o"

La relación $f(x) \in o(g(x))$ se lee como "$f(x)$ es little o de $g(x)$". Intuitivamente, quiere decir que $g(x)$ crece mucho más rápido que $f(x)$. Formalmente, afirma que el limite de $f(x)/g(x)$ es cero, conforme x se aproxima a infinito.

Para funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas algebraicamente, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ generalmente se calcula utilizando la regla de L'Hospital.

Algunas propiedades útiles

1. $o(f) + o(f) \subseteq o(f)$
2. $o(f)o(g) \subseteq o(fg)$
3. $o(o(f)) \subseteq o(f)$
4. $o(f) \subset O(f)$, *por lo tanto las propiedades anteriores aplican en la mayoría de las combinaciones de* o *y* O.

La afirmación "$f(x) \in o(g(x))$" generalmente se escribe como $f(x) = o(g(x))$, haciendo un pequeño abuso de notación. Lo mismo ocurre con la notación "big O".

2.4. La definición de normalidad

Definición 4 (Borel 1909). *Un número real es normal en base* $b \geq 2$ *si su expansión fraccionaria* S *en base* b *cumple que para toda palabra* γ_p *del alfabeto* $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, (\mathtt{b}-\mathtt{1})\}$, *donde* $|\gamma_p| = p$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#occ(S\restriction x, \gamma_p)}{x} = b^{-p}$$

Usando la notación asintótica de "little o", la condición del límite no es otra cosa que pedir que

$$\#occ(S\restriction x, \gamma_p) = b^{-p}x + o(x).$$

3. El número de Champernowne es normal

En 1933 Champernowne [9] define el número:

$$0.12345678910111213141516...$$

y demuestra que es normal en base 10.

La expansión fraccionaria del número de Champernowne es simplemente la yuxtaposición de los números naturales en su orden natural. Es decir, si tomamos la sucesión T tal que $t_0 = 0$ y $t_{i+1} = t_i + 1$, entonces el número de Champernowne se entiende como la concatenación de los t_i, en forma consecutiva a partir de t_1. A cada uno de estos lo denotaremos término. Notar que $t_i = i$.

Lo que sigue es una demostración de la normalidad del número de Champernowne basada en grafos de Bruijn. Para ello dejaremos de pensar al número de Champernowne como un número y consideraremos su expansión fraccionaria como una secuencia infinita a derecha de símbolos $\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{9}$ a la que llamaremos S.

Debemos ver que S cumple que para toda palabra γ_p del alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}\}$, donde $|\gamma_p| = p$, y para toda posición x,

$$\#occ(S \upharpoonright x, \gamma_p) = 10^{-p}x + o(x).$$

4. Demostración de normalidad utilizando grafos de Bruijn

La idea de la demostración es partir S en segmentos consecutivos de la forma $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}$, para $i = 1$ en adelante.

Para demostrar la propiedad de normalidad debemos contar la cantidad de ocurrencias de γ_p hasta cada posición x de S. Dada la posición x, contaremos la cantidad de ocurrencias de γ_p en $S\restriction x$ sumando la cantidad de ocurrencias en los segmentos consecutivos $\mathtt{1}..\mathtt{9}$, $\mathtt{10}..\mathtt{99}$,.., $\mathtt{10}^{k-1}..\mathtt{9}^{k}$. Reservaremos la letra k para denominar al último segmento que debemos examinar.

Notemos que en la posición x la secuencia S tiene un símbolo 0, 1,... o 9. Este símbolo ocurre dentro de un término de la sucesión T mencionada anteriormente, aunque no necesariamente será el último símbolo de un término de T. Para determinar k, primero seleccionamos el último término completo de T en $S\restriction x$. Llamaremos a este término n. El segmento $\mathtt{10}^{k-1}..\mathtt{9}^{k}$ es el que contiene al término n. A la posición en el segmento anterior del último símbolo del término n la llamaremos y. Es decir, $S\restriction x$ comienza con $\mathtt{1}..\mathtt{9}$ $\mathtt{10}^{1}..\mathtt{9}^{2}$ $\mathtt{10}^{2}..\mathtt{9}^{3} \ldots \mathtt{10}^{k-2}..\mathtt{9}^{k-1}\mathtt{10}^{k-1}..n$, y el término $n+1$ aparece partido como sufijo de $S\restriction x$, o bien no aparece, y $\mathtt{10}^{k-1} \preceq n \preceq \mathtt{9}^{k}$.

Cada segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}$, donde $1 \leq i \leq k$, será interpretado como un camino en el grafo B_i. El término n es una palabra en el alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}\}$ que requiere k símbolos para ser escrito y es la etiqueta de un nodo en B_k.

Para contar la cantidad de ocurrencias de γ_p en $S\restriction x$ acotaremos las ocurrencias de γ_p en el segmento inicial de S hasta el término n. Dado que la propiedad de normalidad es asintótica, no necesitamos hacer el cálculo exacto de la cantidad de ocurrencias, sino dar una expresión para la cantidad de ocurrencias que se contabilizan y una cota superior para las ocurrencias extra que no se contabilizan exactamente. Usaremos primero la notación asintótica “big O”. Y luego la expresaremos usando la notación “little o”. Sumaremos:

1. la cantidad de ocurrencias de γ_p en cada segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}$, para $i = 1..(k-1)$.
2. la cantidad de ocurrencias de γ_p en el segmento $\mathtt{10}^{k-1}..n$.
3. la cantidad de veces que γ_p aparece a caballo entre los k segmentos recién mencionados.

La fórmula que utilizaremos para contar la cantidad de ocurrencias de γ_p en $S\restriction x$ es:

$$\#occ(1..n, \gamma_p) = \sum_{i=1}^{k-1} \#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}, \gamma_p) + \#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p)$$

La cuenta anterior no considera las ocurrencias a caballo entre los segmentos. Las mismas se tratarán más adelante.

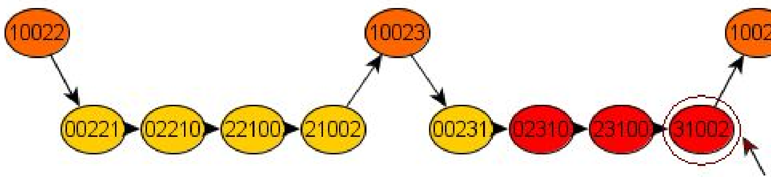
La cantidad $\#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}, \gamma_p)$ incluye dos clases de ocurrencias de γ_p, a las que llamamos, al igual que Champernowne, las *ocurrencias sin dividir* y *ocurrencias divididas*. Las primeras son todas las ocurrencias de γ_p como subpalabra propia de los términos $\mathtt{10}^{i-1}, \ldots, \mathtt{9}^{i}$. Las segundas son las ocurrencias de γ_p cuando aparece a caballo entre dos términos.

Al sumar la cantidad de las ocurrencias divididas y sin dividir de γ_p se obtiene la cantidad total de ocurrencias en un camino en un grafo de Bruijn. Esto coincide con la cantidad de veces que el camino atraviesa un nodo cuya etiqueta tiene como prefijo precisamente a γ_p.

Sea el grafo de Bruijn B_i, el camino que hace el número de Champernowne sobre él se corresponde con el segmento $10^{i-1}..9^i$. Para unir cualquier término t_{i_1} con su consecutivo t_{i_2} se deben recorrer, aparte de los dos nodos etiquetados t_{i_1} y t_{i_2}, una cantidad de nodos intermedios. Esta cantidad es exactamente $i-1$. Los nodos intermedios son todos aquellos cuyas etiquetas son sufijos de t_{i_1} concatenados con prefijos de t_{i_2}. Cuando γ_p ocurre al comienzo de un nodo intermedio a partir del $(i-p)$-ésimo nodo intermedio contándolos desde 0, decimos que ocurre dividida. Debido a que γ_p tiene longitud p, si ocurre al comienzo de alguno de los nodos intermedios anteriores implica que ocurre como subpalabra propia del nodo etiquetado t_{i_1}, en este caso decimos que γ_p ocurre sin dividir.

Notar que si $p > i$ entonces γ_p sólo puede aparecer dividida. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

Ejemplo Supongamos $i = 5$ y $p = 3$ y un alfabeto de 10 símbolos.

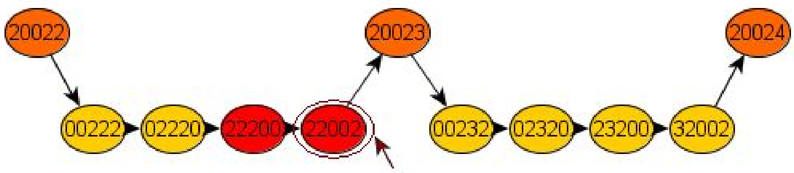


Consideremos el camino que une a los términos del segmento 10022 10023 10024. Queremos contar la cantidad de ocurrencias de la palabra 310. Puede observarse que la misma ocurre en los nodos pintados de rojo. Pero sólo en el último ésta aparece al comienzo. Según la explicación anterior 310 debería aparecer dividida solo una vez. Y no ocurre sin dividir ya que no se encuentra como subpalabra de ningún nodo anaranjado (aquellos etiquetados con los términos del segmento). Si consideramos el segmento formado por los términos anteriores, nos queda:

100221002310024

podemos apreciar que 310 efectivamente ocurre una sola vez en el mismo.

Ahora supongamos $i = 5$ y $p = 2$ y un alfabeto de 10 símbolos. Consideremos el camino que une a los términos del segmento 20022 20023 20024.



Queremos contar la cantidad de ocurrencias de la palabra 22. Se puede observar que la misma ocurre al comienzo de 2 nodos intermedios. Y además ocurre como subpalabra del primer nodo. Es decir, es subpalabra del primer término del segmento en cuestión. Sin embargo, ¿Es correcto afirmar que la palabra 22 ocurre 2 veces dividida y una vez sin dividir? Si consideramos: 200222002320024, podemos apreciar que 22 solo ocurre 2 veces. El error proviene de considerar el primer nodo intermedio pintado de rojo. Recordemos que la definición indica que sólo deben contarse las ocurrencias a partir del $(i-p)$-ésimo nodo intermedio numerándolos desde 0. Dado que la cantidad de nodos intermedios es 4, su numeración es: $0, 1, 2, 3$. Como $(i-p)$ es 3 y el primer nodo pintado tiene número 2, por lo tanto no debe contarse.

4.1. Contando $\#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i, \gamma_p)$ en B_i

A continuación daremos la expresión del numero de ocurrencias de γ_p en un segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$. Recordemos que el segmento es la yuxtaposición de todas las palabras de longitud i en orden lexicográfico creciente, excepto las palabras que comienzan con `0`. Y como ya explicamos anteriormente debemos considerar las ocurrencias de γ_p dividida y sin dividir.

4.1.1. Ocurrencias de γ_p sin dividir

Debemos contar la cantidad de ocurrencias de γ_p sin dividir en el segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$. La cuenta debe partirse en 2 casos: cuando γ_p comienza con `0` y cuando no. Además se debe considerar que la misma vale cuando la longitud de γ_p es $p < i$ si comienza con `0` o $p \leq i$ si no. Pero cuando la longitud es $p > i$ la cantidad de apariciones sin dividir es 0.

Caso γ_p no comienza con `0`: La ocurrencia de γ_p puede comenzar en cualquier posición a partir de la cual quepa íntegramente. Son en total $i - p + 1$ posiciones distintas.

En caso de que ocurra a partir de la primera posición entonces quedan $i-p$ posiciones que pueden cubrirse con cualquiera de los diez símbolos `0` a `9`. Es decir, se pueden formar 10^{i-p} términos que contienen a γ_p en la primera posición.

Sin embargo, si γ_p no ocurre desde la primera posición recordar que ésta puede albergar cualquier símbolo excepto el `0`. Por lo tanto habrá $i - p - 1$ posiciones que pueden cubrirse con cualquiera de los diez símbolos, y una posición que puede tomar solamente valores entre 1 y 9, la primera. Por lo tanto se pueden formar $(i-p)10^{i-p-1}9$, palabras distintas que no comienzan con γ_p.

En total, si γ_p no comienza con `0`, su cantidad de ocurrencias es exactamente:

$$10^{i-p} + (i-p)10^{i-p-1}9. \tag{1}$$

Caso γ_p comienza con `0`: Si γ_p comienza con `0` entonces seguro no ocurre desde la primera posición de ninguna de las palabras de longitud i en $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$. Por lo tanto, la cantidad de ocurrencias de γ_p es exactamente:

$$(i-p)10^{i-p-1}9. \tag{2}$$

4.1.2. Ocurrencias de γ_p dividida

Para la cantidad de ocurrencias dividida daremos una cota superior de las mismas. Por lo tanto no es necesario discriminar si γ_p comienza o no con `0`.

Se deben considerar en el grafo B_i aquellos nodos intermedios en el camino entre dos palabras sucesivas del orden lexicográfico, t_1 y t_2 de longitud i. Estos nodos intermedios son exactamente $i-1$. Por otro lado, si γ_p ocurre dividida, es decir, a caballo entre t_1 y t_2, entonces esta ocurrencia de γ_p ocurre a partir de una posición de t_1 *mayor* que $i - p + 1$. Esto significa que de los nodos intermedios entre t_1 y t_2 deben descartarse los primeros $i-p$ nodos. Por lo que, en el camino entre t_1 y t_2 hay a lo sumo $p-1$ nodos cuyas etiquetas podrían comenzar con γ_p.

La cantidad de términos del segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$ es exactamente $10^i - 10^{i-1}$. Por lo tanto la cantidad de nodos intermedios cuyas etiquetas podrían ser γ_p es a lo sumo $(p-1)(10^i - 10^{i-1} - 1)$. Sin embargo esto es cierto sólo si $p \leq i$.

Cuando $p > i$ no sólo no hay ocurrencias sin dividir, sino que podemos garantizar que la cantidad de ocurrencias divididas está comprendida en la cota anterior.

En conclusión la cantidad de ocurrencias divididas de γ_p es a lo sumo $(p-1)(10^i - 10^{i-1} - 1)$, y esta expresión es menor que $(p-1)(10^i)$. Como p es un valor fijo, acotamos la expresión por

$$O(10^i). \tag{3}$$

4.1.3. En total las ocurrencias divididas y sin dividir

Las expresiones (1) y (2) dan la cantidad de ocurrencias de γ_p sin dividir según dos casos mutuamente excluyentes. Esta cantidad es $10^{i-p} + (i-p)10^{i-p-1}9$ o bien $(i-p)10^{i-p-1}9$. Éstas difieren en 10^{i-p} por lo que no afectará al valor asintótico que se quiere demostrar. Para realizar el resto de los cálculos utilizaremos (1) por ser la mayor de las dos. Y cuando le sumamos la cota (3) de la cantidad de ocurrencias de γ_p dividida obtenemos:

$$\#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i, \gamma_p) = 10^{i-p} + (i-p)10^{i-p-1}9 + O(10^i) \tag{4}$$

A continuación se expresa la ecuación anterior usando la longitud del segmento bajo consideración. De esta forma nos vamos acercando a una expresión más útil para demostrar la condición de normalidad.

El segmento es $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$, sea x_i su longitud (observar que x_i es un valor numérico). Se obtiene

$$x_i = |\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i| = i\ 10^{i-1}9$$

Reemplazando por x_i en la ecuación (4) y distribuyendo 10^{-p} queda:

$$\#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i, \gamma_p) = 10^{i-p} + 10^{-p}x_i + (-p)10^{i-p-1}9 + O(10^i) \tag{5}$$

4.2. Contando $\#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p)$ en B_k

De este segmento solo debemos contar la cantidad de ocurrencias desde $\mathtt{10}^{k-1}$ hasta el término n. Al igual que Champernowne, expresaremos los k símbolos de n de esta manera:

término n

posición	1	2	...	$k-2$	$k-1$	k
símbolo	$\mathtt{m_{k-1}}$	$\mathtt{m_{k-2}}$	...	$\mathtt{m_2}$	$\mathtt{m_1}$	$\mathtt{m_0}$

Los símbolos $\mathtt{m_{k-1}}, \ldots, \mathtt{m_0}$ son símbolos del alfabeto $\{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{9}\}$. Para representar su valor numérico escribiremos $m_{k-1}, \ldots, m_0$ Dado que el segmento $\mathtt{10}^{k-1}..n$ no contiene términos que comiencen con $\mathtt{0}$, el símbolo $\mathtt{m_{k-1}} \neq \mathtt{0}$.

4.2.1. Ocurrencias de γ_p dividida

El análisis es similar al que realizamos en la sección 4.1.2, concluyendo que la cantidad de ocurrencias de γ_p dividida es del orden $O(10^k)$. Inclusive podríamos dar una cota más fina ya que solo se debe considerar el segmento hasta el término n. La cantidad de nodos a unir es menor o igual que 10^k, por lo que la cota es:

$$O(10^k). \tag{6}$$

4.2.2. Ocurrencias de γ_p sin dividir en B_k

Al igual que en la sección 4.1.1 para un B_i cualquiera debemos contar la cantidad de términos en los cuales puede ocurrir γ_p una vez que se ha fijado una posición. Sin embargo debemos tener cuidado de no contar aquellos términos mayores que n.

Además, al igual que en la sección 4.1.1, se debería tener el cuidado de discriminar si γ_p comienza o no con `0` para realizar la cuenta de las ocurrencias. Sin embargo ya hemos visto en esa sección que las ocurrencias de γ_p comenzando con `0` son menores que las ocurrencias de γ_p cuando no comienza con `0` y que la diferencia entre ambas no afecta la cota buscada. Dado que el análisis en esta sección es análogo al antes mencionado, sólo contaremos las ocurrencias para γ_p no comenzando con `0`.

Supongamos que γ_p se encuentra a partir de una posición j (contando de izquierda a derecha a partir de 1) dentro de un término. Entonces existen $k-(j+p)+1$ posiciones que pueden tomar cualquier símbolo entre `0` y `9`. Éstas son las posiciones a la derecha de la ocurrencia de γ_p. Entonces, cuando $j \geq 1$, la cantidad de posibles sufijos es

$$10^{k-(j+p)+1} \tag{7}$$

Las posiciones que quedan a la izquierda de γ_p, es decir las posiciones 1 a $j-1$, no pueden elegirse libremente, ya que no debemos contar los términos mayores que n.

En la posición 1 puede haber cualquier símbolo con valor entre $\mathtt{1}$ y $\mathtt{m_{k-1}}-\mathtt{1}$ sin restringir la elección de los demás símbolos de las posiciones que se encuentran a la derecha suyo. Es decir, para las posiciones 2 y $j-1$ se podrá elegir cualquier símbolo. La cantidad de posibles prefijos para cada uno de los sufijos contados en (7) sin pisar el valor $\mathtt{m_{k-1}}$ en la primera posición es

$$(m_{k-1}-1)10^{j-2} \tag{8}$$

Sin embargo, si el primer símbolo se fija con valor $\mathtt{m_{k-1}}$ entonces el siguiente inmediatamente a la derecha sólo podrá tomar valores entre `0` y $\mathtt{m_{k-2}}-\mathtt{1}$ sin restringir los valores que tomarán los $j-3$ posiciones siguientes. Así sucesivamente hasta el símbolo $\mathtt{m_{k-j+1}}$ dado que el primer símbolo de γ_p está en la posición j. La cantidad de posibles prefijos para cada uno de los sufijos con $\mathtt{m_{k-1}}$ en la primera posición es

$$\sum_{l=k-j+1}^{k-2} m_l 10^{l+j-k-1} \tag{9}$$

Por último hay que tener en cuenta qué es lo que ocurre si todas las posiciones desde la 1 hasta la $j-1$ son los símbolos $\mathtt{m_{k-1}}, \mathtt{m_{k-2}}, \ldots, \mathtt{m_{k-j+1}}$. Según cuáles sean los símbolos en las posiciones j a $j+p-1$ contaremos cuantas palabras de longitud k con prefijo $\mathtt{m_{k-1}}, \mathtt{m_{k-2}}, \ldots, \mathtt{m_{k-j+1}}$ pueden contener a γ_p en la posición j. La cantidad máxima es la argumentada en (7), que es $10^{k-j-p+1}$. Hay tres casos mutuamente excluyentes, y cada uno determina un valor racional θ entre 0 y 1.

- Caso la subpalabra $\mathtt{m}_{\mathtt{k-j}}..\mathtt{m}_{\mathtt{k-(j+p)+1}} \prec \gamma_p$. Entonces γ_p no puede ocurrir en la posición j y por lo tanto $\theta = 0$.
- Caso la subpalabra $\mathtt{m}_{\mathtt{k-j}}..\mathtt{m}_{\mathtt{k-(j+p)+1}} = \gamma_p$. La cantidad de palabras que contienen a γ_p es una fracción de $10^{k-j-p+1}$ ya que los símbolos de más a la derecha de γ_p no se modifican libremente, sino que llegan hasta conformar el término n. Esto determina $0 < \theta < 1$.
- Caso la subcadena $\mathtt{m}_{\mathtt{k-j}}..\mathtt{m}_{\mathtt{k-(j+p)+1}} \succ \gamma_p$. Entonces γ_p va a haber aparecido en la posición j, y todas las siguientes posiciones pudieron tomar cualquier símbolo. Esto determina $\theta = 1$.

Por lo tanto tenemos que la cantidad de posibles sufijos es:

$$\theta 10^{k-j-p+1}, \tag{10}$$

Finalmente, la cantidad total de ocurrencias de γ_p sin dividir en la posición j de un término es (10), más el factor (7) por la suma de (8) y (9):

$$\begin{cases} 10^{k-j-p+1}\theta & ,j=1 \\ 10^{k-j-p+1}\left(\theta + (m_{k-1}-1)\,10^{j-2}\right) & ,j=2 \\ 10^{k-j-p+1}\left(\theta + (m_{k-1}-1)\,10^{j-2} + \displaystyle\sum_{l=k-j+1}^{k-2} m_l 10^{l+j-k-1}\right) & ,j>2 \end{cases} \tag{11}$$

La separación en casos se debe a que, cuando γ_p aparece en la primera posición, $j = 1$, sólo debemos contar los valores a la derecha de γ_p. (Es el mismo análisis que lleva a la conclusión (10).) Si γ_p aparece en la segunda posición, $j = 2$, entonces además de contar los valores a la derecha de γ_p, debemos contar los posibles valores para la única posición antes de γ_p.

La sumatoria en (9) se anula ya que no exiten prefijos distintos (en la primera posición se encuentra $\mathtt{m}_{\mathtt{k-1}}$ y a partir de la segundo aparece γ_p).

Por último, si γ_p aparece a partir de la tercera posición, debemos contar los valores a la derecha de γ_p. y también todos los posibles símbolos anteriores a γ_p.

Variando la posición de γ_p, para $j = 1, 2, \ldots, k - p + 1$, usando los casos de (11), podemos acotar la cantidad de ocurrencias sin dividir de γ_p así:

$$\begin{aligned} & 10^{k-p}\theta + 10^{k-p-1}\left(\theta + m_{k-1} - 1\right) + \\ & \sum_{j=3}^{k-p+1} 10^{k-j-p+1}\left(\theta + (m_{k-1}-1)\,10^{j-2} + \sum_{l=k-j+1}^{k-2} m_l 10^{l+j-k-1}\right) = \\ & \theta\left(10^{k-p} + 10^{k-p-1}\right) + 10^{k-p-1}\left(m_{k-1} - 1\right) + \\ & \sum_{j=3}^{k-p+1} 10^{k-j-p+1}\left(\theta + (m_{k-1}-1)\,10^{j-2} + \sum_{l=k-j+1}^{k-2} m_l 10^{l+j-k-1}\right) \end{aligned}$$

Si sacamos el factor común 10^{-p} en la sumatoria externa y el factor común 10^{j-k-1} de la sumatoria interna, tenemos:

$$\theta 10^{k-p}\left(1+10^{-1}\right)+10^{k-p-1}\left(m_{k-1}-1\right)+$$

$$10^{-p}\sum_{j=3}^{k-p+1}\left(10^{k-j+1}\theta+10^{k-j+1}10^{j-2}\left(m_{k-1}-1\right)+10^{k-j+1}10^{j-k-1}\sum_{l=k-j+1}^{k-2}m_l10^l\right) =$$

Simplificamos los exponentes y obtenemos:

$$\theta 10^{k-p}\left(1+10^{-1}\right)+10^{k-p-1}\left(m_{k-1}-1\right)+$$

$$10^{-p}\sum_{j=3}^{k-p+1}\left(10^{k-j+1}\theta+10^{k-1}\left(m_{k-1}-1\right)+\sum_{l=k-j+1}^{k-2}m_l10^l\right) =$$

$$\theta 10^{k-p}\left(1+10^{-1}\right)+10^{-p}\sum_{j=3}^{k-p+1}\left(10^{k-j+1}\theta\right)+$$

$$\left(m_{k-1}-1\right)10^{k-p-1}+10^{-p}\left(\sum_{j=3}^{k-p+1}\left(m_{k-1}-1\right)10^{k-1}+\sum_{j=3}^{k-p+1}\sum_{l=k-j+1}^{k-2}m_l10^l\right) =$$

$$O(10^k)+10^{-p}\left((k-p)(m_{k-1}-1)10^{k-1}+\sum_{j=3}^{k-p+1}\sum_{l=k-j+1}^{k-2}m_l10^l\right) \tag{12}$$

A partir del siguiente análisis lograremos juntar ambas sumatorias en una y eliminar la variable j. Cuanto mayor es el valor de j mayor es el rango en el que varía l. El valor del que parte l es variable, pero el último valor que alcanza es siempre el mismo. Por lo tanto conforme va variando j, l toma un nuevo valor y repite todos los anteriores. La máxima cantidad de veces que puede repetirse un valor l, es la cantidad de valores distintos que toma j, $k-p-1$. Conforme va aumentado j se van repitiendo más valores l; pero cada uno una vez menos que el anterior. Para cada valor, la cantidad de veces menos que se repite es la cantidad de valores que hay entre él y el primer valor que tómo l, $k-2$.

Por lo tanto la cantidad de veces que se repite un valor l es:

$$(k-p-1)-(k-2-l)=l-p+1$$

Esto nos permite reescribir (12) así:

$$10^{-p}\left((k-p)(m_{k-1}-1)10^{k-1}+\sum_{l=p}^{k-2}\left(l-p+1\right)m_l10^l\right)+O(10^k). \tag{13}$$

Nuevamente necesitamos expresar la cantidad de ocurrencias de γ_p en el segmento dado en función de la longitud del mismo. Sea y a la longitud del segmento $\texttt{10}^{k-1}..\texttt{n}$, donde

$$y=k\left(\sum_{l=0}^{k-2}m_l10^l+(m_{k-1}-1)10^{k-1}\right) \tag{14}$$

Veamos que podemos expresar (13) como

$$10^{-p}y + O(10^k). \tag{15}$$

Es suficiente ver que la diferencia entre $10^{-p}y$ y el primer sumando de (13) es $O(10^k)$:

$$\begin{aligned}
k\left(\sum_{l=0}^{k-2} m_l 10^l + (m_{k-1}-1)10^{k-1}\right) - \left(\sum_{l=p}^{k-2}(l-p+1)m_l 10^l + (k-p)(m_{k-1}-1)10^{k-1}\right) &= \\
\sum_{l=0}^{p-1} k\ m_l 10^l + \sum_{l=p}^{k-2} k\ m_l 10^l - \sum_{l=p}^{k-2}(l-p+1)m_l 10^l + p(m_{k-1}-1)10^{k-1} &= \\
O(k\ 10^p) + \sum_{l=p}^{k-2}(k-l+p-1)\ m_l\ 10^l + O(10^{k-1}) &= \\
\sum_{i=1}^{k-p-1}\ (k-i)\ m_{p+i-1}\ 10^{p+i-1} + O(10^{k-1}) & \quad (16)
\end{aligned}$$

La cota inferior de la diferencia es 0. Si la misma se alcanzara implicaría que ambas expresiones son iguales y por lo tanto la aproximación de (13) por (14) sería exacta. Lo importante es que la diferencia no sea de un orden mayor a 10^k.
Concluimos:

$$10^{-p}y - (10^{-p})\left(\sum_{l=p}^{k-2}(l+1-p)m_l 10^l + (k-p)(m_{k-1}-1)10^{k-1}\right) = O(10^k).$$

4.2.3. En total las ocurrencias divididas y sin dividir en B_k

Dado que (6) acota la cantidad de ocurrencias dividida de γ_p simplemente por $O(10^k)$, y sumándola a la cantidad de ocurrencias sin dividir (15) tenemos

$$\#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}y + O(10^k) \tag{17}$$

4.3. $\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p)$

Nos queda ver que la sumatoria de las ocurrencias de γ_p a lo largo de los caminos sobre los grafos B_1 hasta B_k efectivamente cumple con la propiedad de normalidad. Teníamos que:

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = \sum_{i=1}^{k-1} \#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i, \gamma_p) + \#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p)$$

De la sección 4.1 sabemos que:

$$\#occ(\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i, \gamma_p) = 10^{i-p} + 10^{-p}x_i - p10^{i-p-1}9 + O(10^i)$$

donde x_i denota la longitud del segmento $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^i$. Entonces,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = \sum_{i=1}^{k-1}\left(10^{i-p} + 10^{-p}x_i - p10^{i-p-1}9 + O(10^i)\right) + \#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p)$$

De la sección 4.2 sabemos que:

$$\#occ(\mathtt{10}^{k-1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}y + O(10^k)$$

donde y es la longitud del segmento $\mathtt{10}^{k-1}..n$. Entonces,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(10^{i-p} + 10^{-p}x_i - p10^{i-p-1}9 + O(10^i)\right) + 10^{-p}y + O(10^k)$$

Distribuyendo la sumatoria,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}\sum_{i=1}^{k-1} 10^i + 10^{-p}\sum_{i=1}^{k-1} x_i - p10^{-p-1}9\sum_{i=1}^{k-1} 10^i + \sum_{i=1}^{k-1} O(10^i) + 10^{-p}y + O(10^k)$$

Queremos expresar esta cantidad en función de la longitud del segmento $\mathtt{1}..n$. Sea

$$X = |\mathtt{1}..\mathtt{9}^{k-1}| == \sum_{i=1}^{k-1} x_i$$

Luego,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}(\frac{(10^k-1)}{10-1} - 1) + 10^{-p}X + (-p)10^{-p-1}9(\frac{(10^k-1)}{10-1} - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} O(10^i) + 10^{-p}y + O(10^k)$$

Asociando,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = \frac{10^{-p}(1 + (-p)10^{-1}9)}{10-1}(10^k - 1 - (10-1)) + 10^{-p}(X+y) + \sum_{i=1}^{k-1} O(10^i) + O(10^k)$$

Dado que $|\mathtt{1}..n| = X + y$, llamando $z = X + y$ tenemos,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}(z) + \frac{(10^{-p} + (-p)10^{-p-1}9)}{10-1}(10^k - 1 - (10-1)) + O(10^k) + O(10^k)$$

Puede verse que $\frac{(10^{-p}+(-p)10^{-p-1}9)}{10-1}(10^k - 1 - (10-1)) + O(10^k) + O(10^k)$ es $O(10^k)$, queda entonces:

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}(z) + O(10^k)$$

Teniendo en cuenta que $z = X + y$ entonces

$$z \geq \sum_{i=1}^{k-1} x_i = \sum_{i=1}^{k-1} i10^{i-1}9 \geq (k-1)10^{k-2}9 \ (para\ k \geq 2).$$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{10^k}{(k-1)10^{k-2}9} = \lim_{k\to\infty} \frac{10^2}{9}\frac{1}{k-1} = 0$ entonces $O(10^k) = o(z)$ queda,

$$\#occ(\mathtt{1}..n, \gamma_p) = 10^{-p}(z) + o(z)$$

Dado que n denotaba el último término completo de $S{\upharpoonright}x$, el siguiente término aparece cortado; por lo tanto su longitud es $\leq k$ y la cantidad extra de ocurrencias de γ_p está comprendida en lo calculado anteriormente. Esto se debe a que no son más de k entre divididas y sin dividir. La diferencia entre x y z, es menor que k.

Falta ver qué ocurre con las apariciones a caballo de γ_p entre los segmentos $\mathtt{10}^{i-1}..\mathtt{9}^{i}$. Dado que la cantidad de segmentos es k y que el tamaño de γ_p es p, entonces la cantidad extra de apariciones no es mayor que kp.

Por lo tanto $\#occ(S{\upharpoonright}x, \gamma_p)$ está correctamente acotado de la siguiente forma

$$\#occ(S{\upharpoonright}x, \gamma_p) = 10^{-p}(x) + o(x).$$

Queda demostrada la normalidad de la secuencia S, el número de Champernowne.

5. La demostración de Champernowne y la nuestra

En su demostración Champernowne comienza considerando la secuencia infinita formada por la concatenación de los segmentos $\mathtt{0}^i, ..., \mathtt{9}^i$, a los que llama s_i, para $1 \leq i$. Champernowne entonces cuenta la cantidad de ocurrencias de γ_p en s_i que es exactamente $(r - p + 1)10^{r-p}$. Nosotros en cambio consideramos la concatenación de los segmentos $\mathtt{10}^{i-1}, ..., \mathtt{9}^i$. Además, a diferencia de la suya, nuestra cuenta queda partida porque al descartar los términos que comienzan con `0` debemos tratar diferente el caso en que γ_p comienza con `0` del que no. Recordar el análisis realizado en (4.1.1). Por otro lado, el modelo que propone Champernowne para contar las ocurrencias divididas se basa en la unión de los términos con una `,` (coma) entre ellos. Lo que plantea Champernowne es contar la cantidad de posiciones en las que la coma puede partir a γ_p. Nosotros para contar las ocurrencias divididas consideramos la cantidad de nodos intermedios que atraviesa el camino para unir dos términos consecutivos. Recordar los ejemplos en (4).

Dado que la secuencia considerada por Champernowne no representa exactamente al número cuya normalidad quiere demostrar, una vez demostrada la normalidad de la misma, debe realizar modificaciones en la secuencia y demostrar que la normalidad se mantiene. De esta manera la demostración de Champernowne tiene 4 pasos: primero demuestra la normalidad de la secuencia antes descripta. Luego demuestra la normalidad de la secuencia formada por la concatenación de los segmentos: $(\mathtt{0}^i..\mathtt{9}^i)^c$, para $1 \leq i$ y cualquier constante c. Luego fija la constante c en 9 y para cada subsegemento $\mathtt{0}^i..\mathtt{9}^i$ va tomando en orden los dígito del alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, ..., \mathtt{9}\}$ y construye una nueva secuencia concatenándolos a cada uno los términos de cada subsegmento. Luego demuestra su normalidad. Por último demuestra que agregando la cadena `123456789` al segmento anterior la normalidad se mantiene. La secuencia resultante de esta última transformación es justamente el número Champernowne.

Si bien Champernowne define su número en base 10, la misma construcción puede hacerse en cualquier otra base mayor que 1, obteniendo un número normal en dicha base. Tanto la demostración de Champernowne como la reescritura que hacemos en este trabajo se trasladan automáticamente a cualquier otra base.

6. Conclusiones

Hemos adaptado la demostración original de Champernowne consistentemente para visualizarla como un camino sobre la sucesión de grafos de Bruijn. Y hemos conseguido una demostración directa de la normalidad del número de Champernowne. Tanto la estrategia original de Champernowne como la nuestra se basan en que los términos de la sucesión de Champernowne son consecutivos respecto del orden de los números naturales. La demostración de Champernowne se extiende a cualquier otra sucesión definida por un orden que nos permita calcular cuál es el número de ocurrencias de una cadena dada en cada segmento inicial de la sucesión. Ésta es la generalización que dieron Copeland y Erdös [10] dando condiciones sobre la sucesión. Cualquier demostración de normalidad basada en esta generalización pueden reescribirse en base a caminos en grafos de Bruijn, como lo hicimos en este trabajo.

Referencias

[1] David H. Bailey and Richard E. Crandall. On the Random Character of Fundamental Constant Expansions, *Experimental Mathematics*, 10:2 , 175–190, 2001.

[2] J. Borwein, D. Bailey, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century.* Natick, MA: A. K. Peters, p. 143, 2003.

[3] David H. Bailey and Richard E. Crandall. Random Generators and Normal Numbers, *Experimental Mathematics*, 11:4 , 527–546, 2004.

[4] V. Becher, S. Figueira. An example of a computable absolutely normal number, *Theoretical Computer Science*, Vol.270, pp. 947-958, 2002.

[5] V. Becher, S. Figueira, R. Picchi, Turing's unpublished algorithm for normal numbers, Theoretical Computer Science, Volume 377, 126-138, 2007.

[6] E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 27:247–271, 1909.

[7] E. Borel. Leçons sur la thèorie des fonctions. Gauthier Villars, 2nd edition, 1914.

[8] E. Borel. La définition en mathématiques. En François Le Lionnais, editor, Les grands courants de la pensée mathématique. Hermann, 1998.

[9] D. Champernowne. The construction of decimals in the scale of ten. *Journal of the London Mathematical Society*, 8:254-260, 1933.

[10] A. Copeland and P. Erdös. Note on normal numbers. *Bulletin American Mathematical Society*, 52:857–860, 1946.

[11] N. G. de Bruijn. A Combinatorial Problem, *Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen*, 49, 758-764, 1946.

[12] Frank Harary. Graph Theory, Addison-Wesley, 1969.

[13] Jonathan Gross, Jay Yellen. Graph Theory and Its Applications, Second Edition, CRC Press, 2006.

[14] M. W. Sierpiński. Démonstration èlèmentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. *Bull. Soc. Math. France*, 45,127–132, 1917.

[15] M. W. Sierpiński. *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa,1964.

[16] A. Turing. A Note on Normal Numbers. *Collected Works of Alan M. Turing, Pure Mathematics*, edited by J. L. Britton, 117–119. North Holland, 1992.