

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

TESIS DE LICENCIATURA

METODOS DE OPTIMIZACION
VS.
METODOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DIRECTORA
PROF. ANA MARIA CLARA RUEDIN

AUTORES
Maria Claudia Acuña (L.U. 489/83)
Andrea Laura Roggiani (L.U. 2385/84)

1997

INDICE

1. Resumen	2
2. Introducción	3
3. Métodos de Optimización	
3.1 Conceptos Generales	7
3.2 Direcciones de descenso	12
3.3 Golden Section Search	14
3.4 Método de Newton	15
3.5 Modificaciones al Método de Newton	17
3.6 Método de Quasi Newton	19
3.7 Direcciones Conjugadas. Método del Gradiente Conjugado	25
3.8 Método del paso restrictivo. Regiones de confianza	31
4. Métodos de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	
4.1 Conceptos Generales	33
4.2 Métodos de un paso	
4.2.1 Método de Euler o de la tangente	35
4.2.2 Método de Heun o Euler Mejorado	37
4.2.3 Método de Taylor de orden mayor	38
4.2.4 Método de Runge Kutta	39
4.3 Métodos multipaso	
4.3.1 Método de Adams-Bashforth-Moulton	41
4.3.2 Método de Milne Simpson	41
5. Método propuesto por F.H. Branin	42
6. Problemas	46
7. Conclusiones	51
8. Bibliografía	58
9. Apéndice	59

1. RESUMEN

Se realiza un estudio comparativo de diferentes métodos de optimización y diferentes métodos de resolución de ecuaciones diferenciales para resolver varios problemas de prueba. Este trabajo surge a partir de la idea propuesta por el Dr. Hugo Scolnik basada en la relación que establece Davidenko entre el método de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineales y el método de Euler para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales.

SUMMARY

We achieve a comparative study of different methods for solving differential equations applied to various test problems. This work arises from an idea of Dr. Hugo Scolnik based on the relation that Davidenko establishes between Newton's method for solving a non-linear system and Euler's method for solving a system of differential equations.

2. INTRODUCCION

Dado un sistema de ecuaciones de la forma:

$$F(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \text{ con } T \in \mathbb{R} \text{ y } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados.} \quad (1)$$

Davidenko propone para resolverlo tomar un continuo de problemas $G(x,t)$, $0 \leq t \leq T$, tales que $G(x_0,0)=0$ y $G(x,T)=F(x)$.

Se particiona el intervalo $[0,T]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p = T$, de modo que en cada paso k se resuelve el problema $G(x, t_k) = 0$ obteniéndose como solución x_k , que servirá de aproximación inicial para el problema $G(x, t_{k+1}) = 0$.

Para T tendiendo a infinito una función posible sería $G(x,t) = F(x) - e^{-t} F(x_0)$.

Sea $x(t)$ una curva solución tal que $G(x(t), t) = 0$,

igualando $G(x(t), t) = 0 = F(x(t)) - e^{-t} F(x_0)$,

y diferenciando $J(x(t)) x'(t) + e^{-t} F(x_0) = 0$,

$$\text{donde } J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \text{ y } e^{-t} F(x_0) = F(x(t)).$$

Se obtiene así $x'(t) = -[J(x)]^{-1} F(x)$

$$\text{esto es: } \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = -[J(x(t_k))]^{-1} F(x(t_k))$$

Si se elige $t_k = k$ y se denota $x_k = x(k)$ se obtienen estimaciones $x_1, x_2, \dots, x_i$ que son las iteraciones del método de Newton para resolver el sistema, es decir:

$$x_{k+1} = x_k - [J(x_k)]^{-1} F(x_k).$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} J(x) x'(t) &= -F(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2)$$

por el método de Euler.

Teniendo esta relación entre un método para resolver ecuaciones no lineales y un método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales se quieren establecer nuevas comparaciones.

Se propone resolver el sistema (2) utilizando diferentes métodos de resolución de ecuaciones diferenciales y comparar dichos resultados con los obtenidos al resolver el sistema original (1) por métodos de optimización para sistemas no lineales. En el desarrollo se emplearán rutinas de IMSL, programando en lenguaje Fortran 5.0 (Microsoft).

Este trabajo surge de una idea del **Dr. Hugo Scolnik**.

Ejemplo

Se considera el problema:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} = 0, \quad x_0 = (0,0).$$

Davidenko propone resolverlo definiendo un continuo de problemas $G(x,t)$, $0 \leq t \leq T$ tales que

$$\begin{cases} G(x_0,0) = 0 \\ G(x,T) = F(x) \end{cases} \quad (1)$$

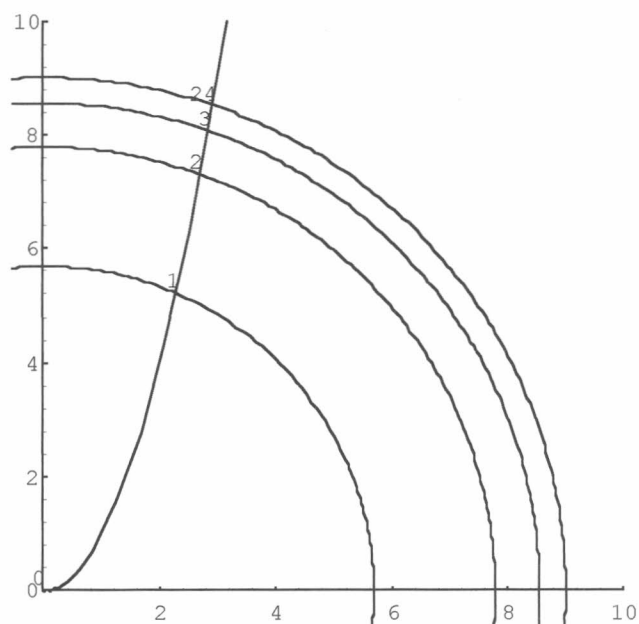
en cada paso k se resuelve el problema $G(x_k, t_k) = 0$ y se obtiene x_k que servirá de aproximación para el problema $G(x_k, t_{k+1})$.

Sea $G(x,t) = F(x) - e^{-t} F(x_0)$ se observa que cumple con las condiciones (1):

$$\begin{aligned} G(x_0, 0) &= F(x_0) - e^{-0} F(x_0) = 0 \\ \text{para } t \rightarrow \infty \quad G(x, t) &= F(x) - e^{-t} F(x_0) = F(x), \quad \text{ya que } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0. \end{aligned}$$

Entonces el problema inicial se resuelve tomando

$$G(x, t_k) = F(x) - e^{-t_k} F(x_0) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 - e^{-t_k}(-9) \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{y } t_k = k.$$



t	x_1	x_2
0	0	0
1	1,391770026	1,93702381
2	1,527768057	2,33407524
3	1,570605738	2,46680238
4	1,585610227	2,51415979
5	1,591035973	2,53139547
6	1,593019621	2,53771151
7	1,593747707	2,54003175
8	1,594015332	2,54088488
9	1,594113755	2,54119866
10	1,594149959	2,54131409
11	1,594163277	2,54135655
12	1,594168176	2,54137217
13	1,594169979	2,54137792
14	1,594170642	2,54138003
15	1,594170886	2,54138081
16	1,594170975	2,5413811
17	1,594171008	2,5413812
18	1,594171021	2,54138124
19	1,594171025	2,54138126
20	1,594171027	2,54138126
21	1,594171027	2,54138126
22	1,594171027	2,54138126
23	1,594171028	2,54138126
24	1,594171028	2,54138127

El problema inicial era resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} = 0, \quad x_0 = (0, 0),$$

se propuso resolverlo por un continuo de problemas

$$G(x, t) = F(x) - e^{-t} F(x_0), \text{ con } 0 \leq t \leq T$$

y se obtuvo una curva solución $x(t)$ tal que $G(x(t), t) = 0$.

Luego

$$G(x(t), t) = F(x(t)) - e^{-t} F(x_0) = 0.$$

Diferenciando esta igualdad respecto de t resulta

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \frac{\partial G_i}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial G_i}{\partial x_2} x_2'(t) + \frac{\partial G_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_1} = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \quad y \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} = e^{-t} F(x_0)$$

Entonces

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} x_2'(t) + e^{-t} F(x_0) = 0$$

$$e^{-t} F(x_0) = F_i(x(t))$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix}$$

llegamos a una ecuación diferencial

$$\boxed{x'(t) = -J^{-1} F}$$

3. MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES.

OPTIMIZACIÓN PUEDE SER DEFINIDO COMO LA CIENCIA QUE TRATA DE DETERMINAR LA “ MEJOR “ SOLUCIÓN A CIERTOS PROBLEMAS DEFINIDOS MATEMÁTICAMENTE , GENERALMENTE MODELOS DE REALIDAD FÍSICA. INVOLUCRA EL ESTUDIO DE CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN PARA PROBLEMAS, LA DETERMINACIÓN DE MÉTODOS ALGORÍTMICOS DE SOLUCIÓN, EL ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE LOS MISMOS Y EXPERIMENTACIONES COMPUTACIONALES CON MÉTODOS BAJO CONDICIONES ESPECÍFICAS Y CON PROBLEMAS DE LA VIDA REAL.

(Practical Methods of Optimization , Capítulo 1 - R. Fletcher -).

A continuación se describirán brevemente los distintos métodos de optimización de funciones; para mayor detalle consultar [FLE/87], [DEN/83] y [LUE/89].

3.1 CONCEPTOS GENERALES

Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se considera el problema de la forma :

minimizar $f(x)$ sujeto a $x \in D$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Se distinguen dos tipos de soluciones posibles: puntos mínimos locales y puntos mínimos globales.

Definición: Un punto $x^* \in D$ se dice que es un punto *mínimo relativo o punto mínimo local* de f en D si existe $\varepsilon > 0$, tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in D$ a una distancia ε de x^* (es decir $|x - x^*| < \varepsilon$).

Si $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in D$ tal que $0 < |x - x^*| < \varepsilon$, entonces se dice que x^* es un *punto mínimo relativo estricto* de f en D .

Definición: Un punto $x^* \in D$ se dice que es un *punto mínimo global* de f en D , si $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in D$.

Si $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in D$, $x \neq x^*$, entonces se dice que x^* es un *punto mínimo global estricto* de f en D .

Se presupone que x^* (mínimo) existe, es único y que será encontrado por el método a utilizar; pero en realidad x^* puede no existir por ejemplo: $f(x) = x^3$, o puede no ser único por ejemplo: $f(x) = \max(-x - 1, 0, x - 1)$.

En la mayoría de los casos solo es posible encontrar un mínimo relativo que puede no ser un mínimo global.

Definición: Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *diferenciable con continuidad* en $x \in \mathbb{R}^n$, si $(\partial f / \partial x_i)(x)$ existe y es continua para $i = 1, \dots, n$.

Definición: La función f se dice que es *diferenciable con continuidad* en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^n$ (notación: $f \in C^1(D)$), si es diferenciable con continuidad en cada punto de D .

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad en x , se define el *gradiente* de f en x como:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T$$

Notación: $\nabla f(x) = g(x)$.

Definición: Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad, se dice que es *dos veces diferenciable con continuidad* en $x \in \mathbb{R}^n$, (notación: $f \in C^2(D)$), si $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(x)$ existe y es continuo para $1 \leq i, j \leq n$.

Se define el *hessiano* de f en x como la matriz de $n \times n$ cuyos elemento i, j son

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Notación: $\nabla^2 f(x) = G(x)$.

Para poder establecer condiciones que satisfaga el punto mínimo se considerarán movimientos desde el punto en alguna dirección. A lo largo de cualquier dirección la función puede ser tratada como una función de una variable.

Lema: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad en D , entonces para $x \in D$ y $s \in D$ no nula, la derivada direccional de f en x en la dirección de s existe y es igual a:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x) = \nabla f(x)^T s.$$

Lema: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable con continuidad en D , entonces para $x \in D$ y $s \in D$ no nula, la segunda derivada direccional de f en x en la dirección de s existe y es igual a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x) = s^T \nabla^2 f(x) s.$$

A partir de estos conceptos se derivan condiciones que debe satisfacer un punto mínimo relativo.

Condición Necesaria de Primer Orden:

Sea $f \in C^1(D)$, si x^* es un **punto mínimo relativo** de f en D , entonces se verifica que $\nabla f(x^*) = 0$.

Condición Necesaria de Segundo Orden:

Sea $f \in C^2(D)$, si x^* es un **punto mínimo relativo** de f en D , entonces para todo $s \in \mathbb{R}^n$ $s^T \nabla^2 f(x^*) s \geq 0$.

Condición Suficiente de Segundo Orden:

Sea $f \in C^2(D)$, x^* es un **punto mínimo relativo estricto** de f en D , si se verifica:

- i) $\nabla f(x^*) = 0$,
- ii) $\nabla^2 f(x^*)$ es una matriz definida positiva.

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{C}$ (escalares complejos) y $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$ se dice que v es un *autovector* de A y a es el *autovalor* asociado si se verifica que $A v = a v$.

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, se dice que:

A es *definida positiva* si $v^T A v > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo,

A es *semidefinida positiva* si $v^T A v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

A es *definida negativa o semidefinida negativa* si $-A$ es definida positiva o semidefinida positiva respectivamente.

A es *indefinida* si no es ni definida negativa, ni definida positiva.

Si A es una matriz simétrica las siguientes definiciones son equivalentes:

- (i) Todos los autovalores de A son positivos.
- (ii) LL^T (Choleski) factores de A existen con l_{ii} positivos.
- (iii) LDL^T factores existen con $l_{ii} = 1$ y d_{ii} positivos.
- (iv) Todos los pivotes en eliminación Gaussiana sin pivoteo son positivos.
- (v) Todos los principales menores de A son positivos.
- (vi) A es definida positiva.

Existen diferentes métodos para minimizar funciones. Si el problema es de 2 o de 3 variables alguna clase de bisección en cada una de las mismas es aplicada en forma repetida para establecer la región en la cual existe el mínimo. Otro posible método es generar puntos en una región fija, seleccionando aquel que dentro de un gran número de intentos sea la mejor aproximación; existen variantes en la forma aleatoria de elegir estos puntos. El esfuerzo de implementación de estos métodos, evaluado en términos del número de veces en que es necesario evaluar la función, crece rápidamente y generalmente es del orden de 2^n .

Un algoritmo es considerado aceptable si las iteraciones x_k se van acercando al mínimo relativo y convergen rápidamente al punto mínimo x^* . Las iteraciones terminarán cuando algún test de convergencia sea satisfecho.

En la mayoría de los casos solo es posible mostrar que el vector gradiente tiende a cero, es decir que el algoritmo converge a lo que se denomina un punto estacionario.

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad en x , se dice que x es un punto estacionario o de ensilladura si:

$$\nabla f(x) = 0$$

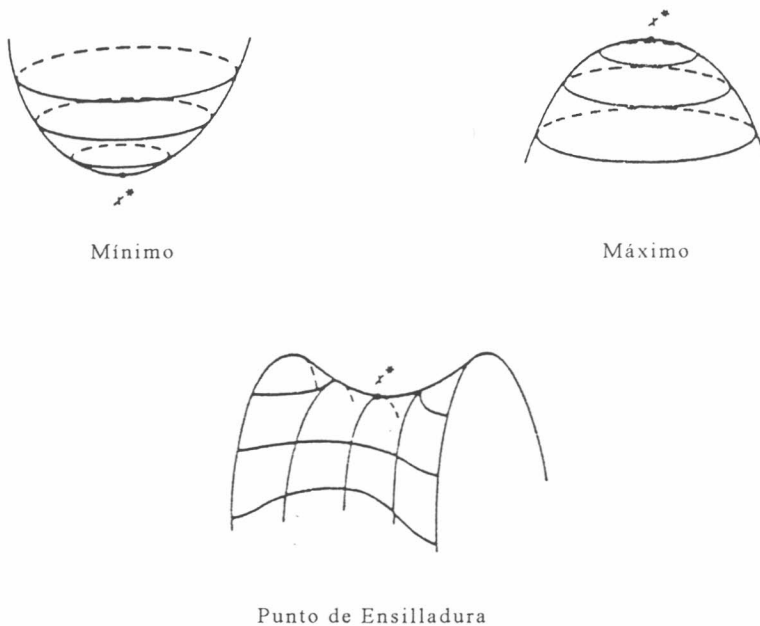


Figura 1. -Diferentes tipos de puntos estacionarios.

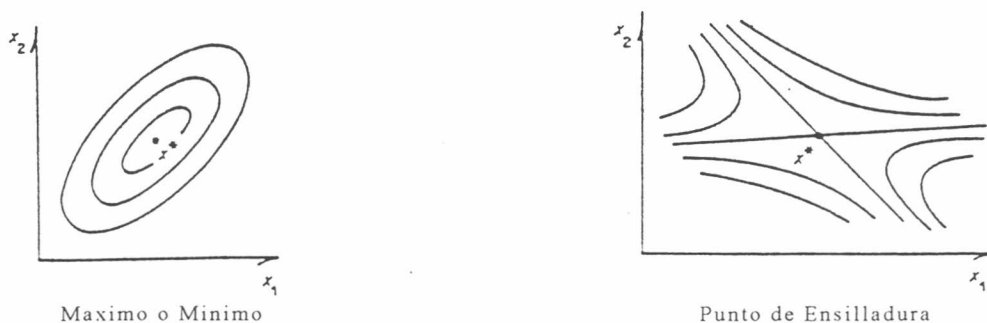


Figura 2. - Curvas de nivel de las funciones que determinan los puntos de la Figura 1.

Un método usualmente se basa en:

- un modelo, es decir alguna aproximación conveniente de la función que permita predecir la localización del mínimo, generalmente se usan los modelos cuadráticos.

- una estrategia global que establece como se usará el modelo para obtener propiedades de convergencia satisfactorias. Hay dos estrategias principales: la más tradicional y más utilizada búsqueda lineal y la del paso restrictivo o región de confianza.

La estructura básica de una iteración en un método de búsqueda lineal es:

- determinar la dirección de búsqueda s_k
- encontrar α_k que minimice $f(x_k + \alpha s_k)$
- calcular $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$

Diferentes métodos corresponden a diferentes formas de determinar s en el paso a), basado en la información disponible del modelo elegido.

El paso b) es el denominado subproblema de búsqueda lineal; se puede emplear búsqueda lineal exacta en la cual se busca el mínimo exacto o establecer ciertas condiciones para obtener un mínimo aproximado en cuyo caso se dice que es una búsqueda lineal inexacta.

Definición: La norma es una función $\| \cdot \|$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\|v\| \geq 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n, \text{ y si } \|v\| = 0 \text{ entonces } v=0.$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Para $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$\|v\|_\infty = \max |v_i|, 1 \leq i \leq n \text{ (norma infinito)}$$

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \text{ (norma uno)}$$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (v_i)^2 \right)^{1/2}, \text{ (norma dos o euclídeana)}$$

Si se define el error en la iteración k como: $h_k = |x_k - x^*|$

y si $h_k \rightarrow 0$, es posible calcular cuan rápido las iteraciones convergen a x^* .

Definición: Se dice que un método tiene convergencia de orden p si:

$$\frac{\|h_{k+1}\|}{\|h_k\|^p} \rightarrow a \text{ donde } a > 0.$$

El caso más importante es aquel en el que $p=1$ (convergencia lineal o de primer orden) y $p=2$ (convergencia cuadrática o de segundo orden).

Cuando el límite definido anteriormente no existe se define la convergencia en términos de:

$$\text{convergencia lineal} \quad \frac{\|h_{k+1}\|}{\|h_k\|} \leq a$$

$$\text{convergencia cuadrática} \quad \frac{\|h_{k+1}\|}{\|h_k\|^2} \leq a$$

Cuando la constante a tiende a cero en la convergencia lineal se denomina convergencia superlineal.

3.2 DIRECCIONES DE DESCENSO

La estrategia global para resolver un problema de minimización, es asegurarse que en cada paso el valor de f decrezca, y que ese decrecimiento sea significativo. De este modo la idea es elegir direcciones a partir del punto actual x_k en la cual f decrezca y un nuevo punto x_{k+1} en dicha dirección de manera que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Dichas direcciones se denominan **direcciones de descenso**. En términos matemáticos, s es una dirección de descenso a partir de x_k si la derivada direccional de f en x_k en la dirección s es negativa, esto es:

$$\nabla f(x_k)^T s < 0.$$

Si esta propiedad se cumple, se garantiza que $f(x_k + \alpha s) < f(x_k)$ para α suficientemente pequeño y positivo.

Para un vector s dado, la derivada direccional de f en la dirección s es directamente proporsional al tamaño de s ; es razonable que se normalice y que se tome la dirección

$$\text{como } \frac{s}{\|s\|}.$$

Todo método que elige direcciones con la propiedad anterior, denominada propiedad descendiente se denominan **métodos de descenso**.

Método del mayor descenso o del gradiente

Es un método de búsqueda lineal en el que se elige la dirección s como :

$$s_k = -g(x_k).$$

El algoritmo iterativo resultante es:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g(x_k),$$

donde α_k es un escalar no negativo que minimice a $f(x_k - \alpha g(x_k))$.

Puede implementarse realizando una búsqueda lineal inexacta en cuyo caso bajo ciertas condiciones se demuestra que converge globalmente a un punto mínimo local o a un punto de ensilladura. El orden de convergencia resulta ser lineal.

Búsqueda lineal

Una iteración del algoritmo de búsqueda lineal consiste en:

calcular una dirección de descenso s_k ,

tomar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$, para algún α_k tal que x_{k+1} resulte un punto aceptable como próxima iteración. (1)

El término búsqueda lineal se refiere al procedimiento para elegir α_k en (1).

La idea es encontrar α_k de manera que $f(x_{k+1})$ decrezca respecto de $f(x_k)$, pero esta simple condición para la búsqueda no garantiza que x_k converja a un punto mínimo de f .

Se establecen ciertos criterios para la elección de α_k de manera de no permitir pequeñas reducciones en el valor de f y de eliminar valores similares .

Para eliminar los puntos que provocan poco decrecimiento en el valor de f se establece que α_k satisfaga la siguiente condición:

$$f(\alpha) \leq f(0) + \alpha \rho f'(0), \quad \rho \in (0, \frac{1}{2})$$

Para eliminar valores similares de α_k se establece que:

$$f(\alpha) \geq f(0) + \alpha (1-\rho) f'(0), \quad \rho \in (0, \frac{1}{2})$$

Condiciones de Goldstein

$$f(\alpha) \leq f(0) + \alpha \rho f'(0)$$

$$f(\alpha) \geq f(0) + \alpha (1-\rho) f'(0), \quad \rho \in (0, 1/2)$$

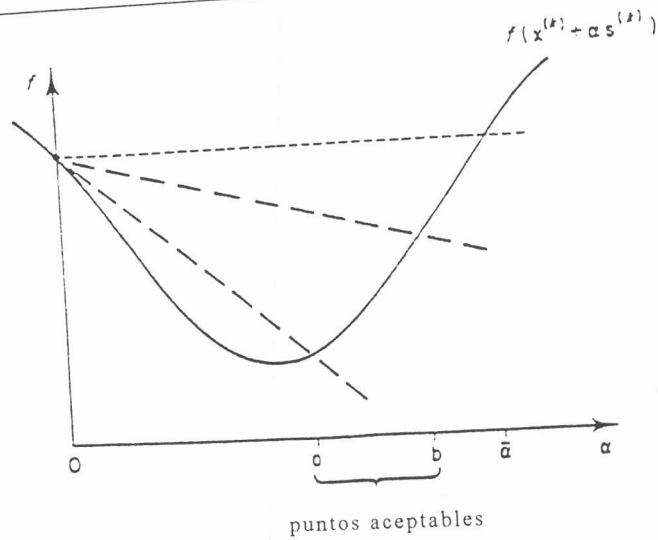


Figura 3. - Condiciones de Goldstein.

La segunda condición resulta muy restrictiva y puede excluir el punto mínimo de f , por esta razón se reemplaza la misma por la siguiente:

$$f'(\alpha) \geq \sigma f'(0), \quad \sigma \in (\rho, 1)$$

Condiciones de Wolfe Powell

$$f(\alpha) \leq f(0) + \alpha \rho f'(0), \quad \rho < 1/2$$

$$f'(\alpha) \geq \sigma f'(0), \quad \sigma \in (\rho, 1)$$

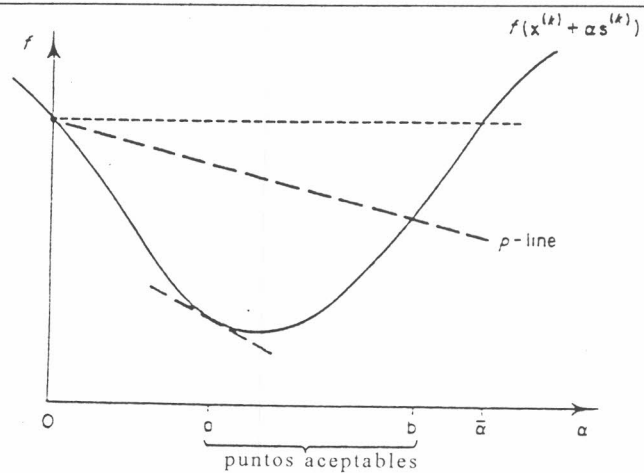


Figura 4. Condiciones de Wolfe-Powell.

3.3 GOLDEN SECTION SEARCH

Es un método de búsqueda que se aplica a funciones unimodales.

Definición: Una función $f(x)$ se dice unimodal en $I=[a, b]$ si existe un único número p tal que:

$f(x)$ es decreciente en $[a, p]$

$f(x)$ es creciente en $[p, b]$.

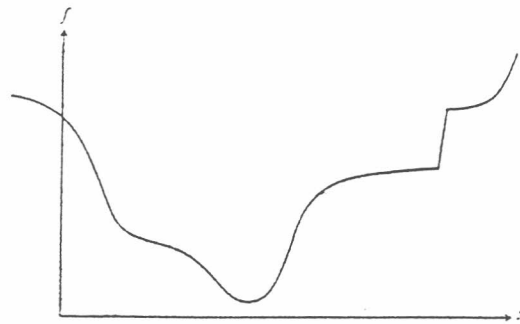


Figura 5. - Función Unimodal.

Si $f(x)$ es una función unimodal en el intervalo $[a, b]$, es posible reemplazar el intervalo con un subintervalo que contenga el valor mínimo de la misma. La idea del método es dividir el intervalo $[a, b]$ en relación 1:T donde T es aproximadamente 1,618 obteniendo dos puntos v_1 y v_2 de manera que $(v_1-a : v_2-b)$ mantengan la relación 1:T. Los puntos v_1 y v_2 se calculan como:

$$v_1 = a + \frac{1}{1+T} (b-a), \quad v_2 = b - \frac{1}{1+T} (b-a)$$

Pueden ocurrir dos cosas:

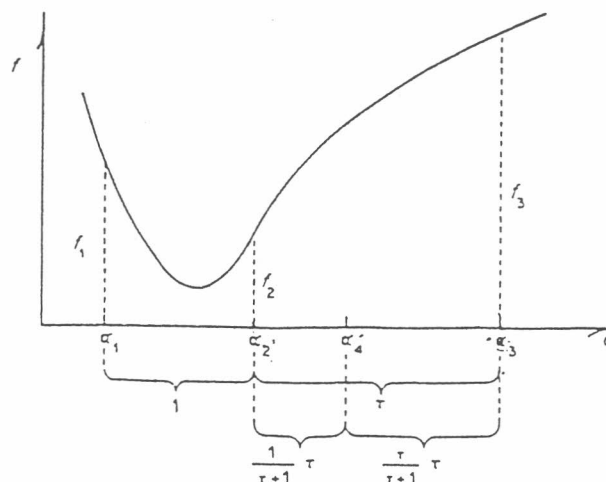


Figura 6. - Golden section search.

1) si $f(v_1) \leq f(v_2)$ el mínimo debe estar en el subintervalo $[a, v_2]$, en éste caso se reemplaza b con v_2 y se vuelve a realizar el mismo procedimiento en el nuevo subintervalo.

2) si $f(v_2) \leq f(v_1)$ el mínimo debe estar en el subintervalo $[v_1, b]$, en éste caso se reemplaza a con v_1 y se realiza el mismo procedimiento en el nuevo subintervalo.

Este procedimiento continúa hasta que algún test de convergencia sea satisfecho.

Se demuestra que el método tiene convergencia lineal :

$$|x_{k+1} - x^*| \leq L |x_k - x^*|, \quad \text{con } L = \frac{T}{1+T}$$

3.4 METODO DE NEWTON

Definición: Una función cuadrática general puede escribirse como:

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + b^T x + c,$$

donde G , b y c son constantes y G es una matriz simétrica.

Por las reglas de diferenciación, resulta

$$\nabla q(x) = \frac{1}{2} (G+G^T)x + b = Gx + b$$

$$\nabla^2 q(x) = G$$

$$G(x_1 - x_2) = g(x_1) - g(x_2)$$

Es decir que $q(x)$ tiene una matriz constante G como hessiano y su gradiente es un función lineal de x .

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f \in C^2(D)$, la idea del método de Newton es que la función a minimizar sea aproximada localmente por una función cuadrática y dicha aproximación sea la que se minimice exactamente. El modelo cuadrático se obtiene desarrollando la función $f(x)$ en un entorno de x_k obteniéndose la siguiente expresión:

$$f(x) \cong f(x_k) + g(x_k)^T (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T G(x_k) (x - x_k)$$

Se busca minimizar este modelo, y el mínimo resultante es :

$$x_{k+1} = x_k - (G(x_k))^{-1} g(x_k).$$

Una iteración del método de Newton puede escribirse como:

a) resolver $G(x_k) s_k = -g(x_k)$

b) tomar $x_{k+1} = x_k + s_k$.

Este método requiere que f tenga derivadas primeras, segundas en cada punto y que $G(x_k)$ sea definida positiva para que este bien definido.

El paso a) requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$, por lo que es conveniente factorizar la matriz G ($G = LDL^T$), facilitándose el chequeo de la condición de que dicha matriz sea definida positiva.

Teorema :

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$ y el hessiano definido positivo en un entorno del mínimo local x^* . Si x_k es suficientemente cercano a x^* para algún k y si $G(x^*)$ es definido positivo entonces el método de Newton es bien definido para todo k y converge cuadráticamente (orden de convergencia 2).

Demostración:

La propiedad de continuidad de f asegura que se puede desarrollar $g(x_k+h)$ por Taylor

$$g(x_k+h) = g(x_k) + G(x_k) h + O(\|h\|^2)$$

si se toma $h = -h_k$, resulta

$$g(x_k - h_k) = g(x_k) - G(x_k) h_k + O(\|h_k\|^2)$$

Si x_k está en un entorno de x^* tal que $G(x_k)$ es definida positiva y $G(x_k)^{-1}$ existe, entonces la iteración k existe y multiplicando por $G(x_k)^{-1}$, resulta

$$\begin{aligned} G(x_k)^{-1} g(x_k - h_k) &= G(x_k)^{-1} g(x_k) - G(x_k)^{-1} G(x_k) h_k + O(\|h_k\|^2) = \\ &= -s_k - h_k + O(\|h_k\|^2) \end{aligned} \quad (1)$$

El error h_k es definido como:

$$h_k = x_k - x^*$$

y si se toma

$$h_{k+1} = x_{k+1} - x^* = x_k + s_k - x^* = x_k - x^* + s_k = h_k + s_k,$$

reemplazando en (1) se obtiene

$$g(x^*) = 0 = -h_{k+1} + O(\|h_k\|^2)$$

por definición de $O(\cdot)$ existe una constante $c > 0$ tal que $\|h_{k+1}\| \leq c \|h_k\|^2$.

Ventajas

Si x_0 , es suficientemente cercano al mínimo local x^* de f con $G(x^*)$ no singular y definida positiva el método converge cuadráticamente a x^* .

Desventajas

El método no tiene convergencia global.

Requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales y derivadas analíticas.

En cada paso se busca un punto crítico del modelo cuadrático que puede ser un mínimo, un máximo o un punto de ensilladura y solo resulta ser un mínimo de f si el hessiano $G(x_k)$ es definido positivo.

3.5 MODIFICACIONES AL METODO DE NEWTON

El método de Newton no puede ser considerado como un algoritmo global, ya que el hessiano $G(x_k)$ puede no ser definido positivo cuando x_k es un punto lejano a la solución. Puede ocurrir también que aún siendo $G(x_k)$ definida positiva el algoritmo no sea convergente y que no produzca decrecimiento en el valor de f . Se han propuesto varias modificaciones al método para eliminar dichos problemas.

1) Método de Newton con búsqueda lineal

Si f no decrece se propone generar una dirección de búsqueda

$$s_k = -G(x_k)^{-1} g(x_k) \quad (2)$$

y luego realizar un algoritmo de búsqueda lineal, (es decir buscar α tal que minimice $f(x_k + \alpha s_k)$).

La mayor dificultad en modificar el método de Newton ocurre cuando $G(x_k)$ no es definida positiva. En la mayoría de los casos es posible calcular s_k según (2) y realizar la búsqueda a lo largo de $\pm s_k$, eligiendo el signo de manera que resulte una dirección de descenso. Pero puede ocurrir que g y s resulten ser perpendiculares, esto es $s^T g = 0$, lo que origina que no haya decrecimiento, ya que

$$f(x+s) = f(x) + s^T g + \frac{1}{2} s^T G s + \dots,$$

como $s^T g = 0$ y $s = -G^{-1} g$, $G s = -g$, resulta

$f(x+s) \cong f(x)$ entonces no hay progreso.

Entonces se requiere alguna modificación adicional para determinar un método de aplicación general.

2) Método de Newton utilizando el criterio del ángulo

Una posibilidad es si $G(x_k)$ no es definida positiva realizar un paso con el método del gradiente, es decir tomar $s_k = -g(x_k)$ y luego hacer búsqueda lineal.

Para evitar que no haya decrecimiento en f se pide que el ángulo entre $g(x_k)$ y s_k cumpla con el criterio del ángulo:

$\theta_k \leq \frac{\pi}{2} - \mu \quad \forall k$, donde $\mu > 0$ es dado por el usuario y $\theta_k \in [0, \frac{\pi}{2}]$ es definido como

$$\cos \theta_k = \frac{-g_k^T s_k}{\|g_k\|_2 \|s_k\|_2}$$

Puede demostrarse que converge a un punto estacionario, pero tiene la *desventaja* que se produce una oscilación propia del método de mayor descenso debido a que la información del modelo cuadrático no es tenida en cuenta.

3) Método de Newton utilizando autovectores

Si $g(x_k)=0$ y $G(x_k)$ es indefinida se trata de un punto de ensilladura. Al ser $G(x_k)$ indefinida tiene autovalores positivos y negativos; se propone tomar x_{k+1} como:

$x_{k+1} = x_k + \alpha v_i$, donde v_i es el autovector asociado a un autovalor negativo de $G(x_k)$ y realizar búsqueda lineal.

Se demuestra que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, ya que

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha v_i) = f(x_k) + \alpha v_i^T g(x_k) + \frac{\alpha^2}{2} v_i^T G(x_k) v_i + \dots,$$

como v_i es autovector de G , $G(x_k) v_i = \lambda_i v_i$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha v_i) = f(x_k) + \alpha v_i^T g(x_k) + \frac{\alpha^2}{2} v_i^T \lambda_i v_i$$

como

$$\frac{\alpha^2}{2} v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i \frac{\alpha^2}{2} v_i^T v_i; \quad v_i^T v_i = \|v_i\|^2; \quad \lambda_i < 0 \quad y \quad \alpha v_i^T g(x_k) = 0$$

resulta que

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Esta modificación del método de Newton tiene la *desventaja* de introducir muchos cálculos para obtener los autovalores.

4) Método de Newton modificando el hessiano

Si el hessiano G tiene autovalores positivos y negativos, este método busca perturbar dicha matriz de manera que todos sus autovalores resulten positivos.

El método consiste en resolver

$$H_k s_k = -g(x_k), \quad \text{con } H_k = G(x_k) + u I$$

y donde u es el menor valor que asegure que H_k sea definida positiva.

Se demuestra que el método converge a un punto estacionario, pero tiene la desventaja que se puede provocar un alejamiento del problema inicial dependiendo de la magnitud del valor de u .

5) Método de Newton utilizando la dirección de la curvatura negativa

Si G es indefinida se propone tomar la dirección de descenso dada por la curvatura negativa, es decir una dirección que satisfaga las condiciones:

$$s_k^T G(x_k) s_k < 0 \quad y \quad s_k^T g(x_k) \leq 0.$$

Se utiliza una factorización de $G(x_k) = LDL^T$ y se resuelve

$$\begin{aligned} L^T s_k &= \sigma a, \quad \text{donde } a_i = 1 \text{ si } d_{ii} < 0 \\ a_i &= 0 \text{ si } d_{ii} \geq 0 \text{ y} \\ \sigma &= \pm 1 \text{ tal que se verifique } s_k^T g(x_k) \leq 0. \end{aligned}$$

Una *desventaja* del método es que si $G(x_k)$ es indefinida la descomposición LDL^T puede no existir.

3.6 METODO DE QUASI NEWTON

La idea básica de un algoritmo satisfactorio es combinar una estrategia con convergencia global y además que la misma sea localmente rápida.

La principal desventaja del método de Newton es que se necesitan fórmulas para calcular la matriz de derivadas segundas. Han surgido métodos a partir de este utilizando solo las derivadas primeras, como el denominado método de Newton con diferencias finitas, en el cual se estima la matriz de derivadas segundas por diferencias finitas a partir del vector gradiente, pero la matriz resultante puede no ser definida positiva, se requieren n evaluaciones del gradiente y un conjunto de ecuaciones lineales debe resolverse en cada iteración.

Estas desventajas son superadas por el método de Quasi Newton, el cual es como el método de Newton con búsqueda lineal excepto que la matriz $G(x_k)^{-1}$ es aproximada por una matriz simétrica definida positiva H_k la cual es actualizada en cada iteración.

La estructura básica de una iteración del método de Quasi Newton resulta ser:

- a) se toma $s_k = -H_k g(x_k)$
- b) se hace búsqueda lineal a lo largo de s_k para encontrar α_k y se toma $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$
- c) se actualiza H_k para obtener H_{k+1} .

La matriz inicial H_0 puede ser cualquier matriz definida positiva, se puede tomar $H_0 = I$.

El punto más interesante en el estudio de éste método es la forma en que se aproxima a la matriz de derivadas segundas. La idea es construir dicha aproximación utilizando información del vector gradiente en varios puntos y que se asegure que luego de varias iteraciones, en el paso k se llegue a que la matriz que aproxima al hessiano sea muy cercana al verdadero valor del mismo.

Fórmulas para construir la matriz aproximada

Fórmula de Rango 1

Si se define:

$$\delta_k = \alpha_k s_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\gamma_k = g_{k+1} - g_k$$

y se desarrolla $g(x_{k+1})$ por Taylor, se obtiene

$$g(x_{k+1}) = g(x_k + \delta_k) = g(x_k) + G(x_k) \delta_k + \dots, \text{ y}$$

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = G(x_k) \delta_k + O(\|\delta_k\|^2).$$

Para funciones cuadráticas los términos de orden superior se anulan, es decir se cumple la igualdad: $g(x_{k+1}) - g(x_k) = G(x_k) \delta_k$.

Los vectores δ_k y γ_k solo pueden calcularse una vez calculado x_{k+1} .

La igualdad $H_k \gamma_k = \delta_k$ no necesariamente va a cumplirse, definiéndose la condición de Quasi Newton o de la secante.

Condición del método de Quasi Newton o de la secante

$$H_{k+1} \gamma_k = \delta_k .$$

Una forma de construir una matriz que aproxime a la inversa del hessiano y que cumpla con dicha condición es tomar:

$$H_{k+1} = H_k + E_k = H_k + a u u^T , \quad \text{donde } E_k \text{ es una matriz de rango 1.}$$

Por la condición de Quasi Newton resulta

$$\begin{aligned} H_{k+1} \gamma_k &= H_k \gamma_k + a u u^T \gamma_k = \delta_k \\ a u u^T \gamma_k &= \delta_k - H_k \gamma_k \\ (u^T \gamma_k) a u &= \delta_k - H_k \gamma_k , \end{aligned}$$

entonces si se toma $u = \delta_k - H_k \gamma_k$,

resulta $u^T \gamma_k a = 1$ y $a = \frac{1}{u^T \gamma_k}$ se llega así a la fórmula de rango 1

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= H_k + \frac{1}{u^T \gamma_k} (\delta_k - H_k \gamma_k) (\delta_k - H_k \gamma_k)^T = \\ &= H_k + (\delta_k - H_k \gamma_k) \frac{(\delta_k - H_k \gamma_k)^T}{(\delta_k - H_k \gamma_k)^T \gamma_k} \end{aligned}$$

El método termina, para funciones cuadráticas con $H_{n+1} = G(x_n)^{-1}$.

Teorema

Si f es bien definida, y si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son independientes, entonces el método de la fórmula 1 termina para funciones cuadráticas en a lo sumo $n+1$ búsquedas con $H_{k+1} = G(x_k)^{-1}$.

Demostración:

como f es cuadrática, $G(x_k) \delta_k = \gamma_k$

por inducción se quiere ver que $H_i \gamma_j = \delta_j$, para $j = 1, 2, \dots, i-1$

$i=2$, $H_2 \gamma_1 = \delta_1$ por construcción, tal que verifica condición de Quasi Newton

$i=3$, $H_3 \gamma_2 = \delta_2$ por construcción,

se quiere ver que $H_3 \gamma_1 = \delta_1$

$$\begin{aligned} H_3 &= H_2 + a u u^T \\ H_3 \gamma_1 &= H_2 \gamma_1 + a u u^T \gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a u u^T \gamma_1 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_1}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = \\
 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2^T - \gamma_2^T H_2^T) \gamma_1}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = \\
 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2^T \gamma_1 - \gamma_2^T H_2^T \gamma_1)}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = \\
 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2^T G \delta_1 - \gamma_2^T \delta_1)}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = \\
 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2^T G \delta_1 - (G \delta_2)^T \delta_1)}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = \\
 &= \frac{(\delta_2 - H_2 \gamma_2) (\delta_2^T G \delta_1 - \delta_2^T G \delta_1)}{(\delta_2 - H_2 \gamma_2)^T \gamma_2} = 0
 \end{aligned}$$

entonces resulta:

$$H_3 \gamma_1 = H_2 \gamma_1 = \delta_1.$$

Generalizando

$$\begin{aligned}
 H_{n+1} \gamma_i &= \delta_i \\
 H_{n+1} \gamma_n &= \delta_n, \quad y \quad \gamma_n = G(x_n) \delta_n \\
 H_{n+1} G(x_n) \delta_n &= \delta_n, \quad \text{entonces } H_{n+1} G(x_n) = I, \quad H_{n+1} = G(x_n)^{-1}.
 \end{aligned}$$

La fórmula de rango 1 tiene dos grandes desventajas:

- 1) no mantiene la condición de definida positiva de la matriz H_k
- 2) el denominador puede llegar a anularse, o puede ocasionar dificultades si se hace demasiado pequeño.

Formula de Rango 2 - Método DFP, Davidon-Fletcher-Powell -

Esta fórmula se obtiene permitiendo una corrección de rango 2 a la matriz H_k , la cual puede escribirse como:

$$H_{k+1} = H_k + a u u^T + b v v^T.$$

Teniendo en cuenta que debe cumplirse la condición de la secante y tomando ,

$$u = \delta_k \quad y$$

$$v = H_k \gamma_k, \quad \text{se llega a la fórmula:}$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{H_k \gamma_k \gamma_k^T H_k}{\gamma_k^T H_k \gamma_k}$$

El proceso resulta ser:

se toma como matriz inicial H_0 cualquier matriz simétrica definida positiva y cualquier punto inicial x_0 , empezando con $k = 0$

a) se toma $s_k = -H_k g(x_k)$

b) se minimiza $f(x_k + \alpha_k s_k)$ con respecto a α , para obtener x_{k+1} , $\delta_k = \alpha_k s_k$, y $g(x_{k+1})$

c) se toma $\gamma_k = g(x_{k+1}) - g(x_k)$, y se actualiza H_{k+1} según la fórmula DFP.

Este método trabaja bien en la práctica, se ha demostrado que es mucho más eficiente que el método de mayor descenso y también algo más eficiente que el método del Gradiente Conjugado.

Ventajas

Para funciones cuadráticas

- a) termina en a lo sumo n iteraciones con $H_{n+1} = G(x_n)^{-1}$
- b) preserva la condición de la secante
- c) genera direcciones conjugadas y gradientes conjugados cuando $H_0 = I$.

Para funciones en general

- a) preserva la condición de definida positiva de la matriz H_k , por lo tanto se mantiene la propiedad descendiente
- b) requiere $3n^2 + O(n)$ multiplicaciones por iteración
- c) tiene orden de convergencia superlineal
- d) tiene convergencia global para funciones estrictamente convexas (con búsqueda lineal exacta).

Teorema

Si para todo k se verifica $\delta_k^T \gamma_k > 0$, entonces la fórmula de rango 2 preserva la condición de definida positiva de la matriz H_k .

Demostración:

Para cualquier x se tiene

$$x^T H_{k+1} x = x^T H_k x + \frac{(x^T \delta_k)^2}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{(x^T H_k \gamma_k)^2}{\gamma_k^T H_k \gamma_k}$$

si se define $a = H_k^{1/2} x$,
 $b = H_k^{1/2} \gamma_k$

se puede escribir la igualdad anterior como

$$x^T H_{k+1} x = \frac{(a^T a)(b^T b) - (a^T b)^2}{(b^T b)} + \frac{(x^T \delta_k)^2}{\delta_k^T \gamma_k}$$

también se observa que

$$\delta_k^T \gamma_k = \delta_k^T g_{k+1} - \delta_k^T g_k,$$

y como x_{k+1} es el punto mínimo de f a lo largo de δ_k , resulta $\delta_k^T g_{k+1} = 0$, entonces $\delta_k^T \gamma_k = -\delta_k^T g_k$, y por definición $\delta_k^T \gamma_k = \alpha_k g_k^T H_k g_k$,

$$x^T H_{k+1} x = \frac{(a^T a)(b^T b) - (a^T b)^2}{(b^T b)} + \frac{(x^T \delta_k)^2}{\alpha_k g_k^T H_k g_k}$$

Los términos de la derecha de la igualdad son positivos, el primero por la desigualdad de Cauchy y el segundo por la condición de definida positiva de H_k . Se debe demostrar que no se anulan simultáneamente.

El primer término se anula solo si a y b son proporcionales, esto implicaría que x_k y δ_k fueran proporcionales es decir $x = B\gamma_k$, pero en este caso resultaría :

$$\delta_k^T x = B\delta_k^T \gamma_k = B \alpha_k g_k^T H_k g_k \neq 0$$

Entonces $x^T H_{k+1} x > 0$, para todo x no nulo.

Es importante ver que para la demostración α_k es elegido de manera que sea el punto mínimo de la búsqueda lineal lo que permite concluir que $\delta_k^T \gamma_k > 0$. En realidad cualquier α_k que mantenga la condición $\delta_k^T \gamma_k > 0$, puede ser utilizado en el algoritmo y H_{k+1} será definida positiva.

Para funciones cuadráticas el método DFP produce direcciones conjugadas con respecto a G y termina en n pasos con $H_n = G(x_n)^{-1}$, donde G es el hessiano de la función.

Teorema

Si f es una función cuadrática, G el hessiano definido positivo entonces para el método DFP se verifica :

$$\begin{aligned} \delta_i^T G \delta_j &= 0, & 0 \leq i < j \leq k \\ H_{k+1} G \delta_i &= \delta_i & \text{para } 0 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Demostración

Para f cuadrática se verifica

$$\gamma_k = g_{k+1} - g_k = G x_{k+1} - G x_k = G \delta_k.$$

Además

$$H_{k+1} G \delta_k = H_{k+1} \gamma_k = \delta_k \quad (1)$$

La demostración se hará por inducción.

La igualdad (1) se cumple para $k = 0$, asumiendo que es verdadera para $k-1$, se probará que se cumple para k .

Se tiene que

$$g_k = g_{i+1} + G (\delta_{i+1} + \dots + \delta_{k-1})$$

entonces a partir de la hipótesis y como f es cuadrática

$$\delta_i^T g_k = \delta_i^T g_{k+1} = 0 \quad \text{para } 0 \leq i < k$$

y

$$\delta_i^T G H_k g_k = 0.$$

Como $\delta_i = -\alpha_k H_k g_k$ y como $\alpha_k \neq 0$, se llega a

$$\delta_i^T G \delta_k = 0 \quad \text{para } i < k$$

Nuevamente usando la hipótesis de inducción y que f es cuadrática

$$\gamma_k^T H_k G \delta_i = \gamma_k^T \delta_i = \delta_i^T G \delta_i = 0 \quad 0 \leq i < k$$

y entonces resulta

$$H_{k+1} G \delta_i = H_k G \delta_i = \delta_i \quad 0 \leq i < k.$$

Como los vectores δ_k son direcciones conjugadas con respecto a G y como f es minimizada sucesivamente en dichas direcciones se ve que el método es un método de direcciones conjugadas y también se ve que si H_0 es tomada como la matriz identidad el método resulta ser el método de direcciones conjugadas.

Finalmente $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k$ son los autovectores correspondientes a los autovalores unitarios de la matriz $H_{k+1} G$. Dichos autovectores son linealmente independientes, ya que son direcciones conjugadas respecto a G y entonces $H_n = G(x_k)^{-1}$.

Otra fórmula sugerida por Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno conocida como la **fórmula BFGS** es la siguiente

$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{\gamma^T H \gamma}{\delta^T \gamma} \right) \frac{\delta \delta^T}{\delta^T \gamma} - \frac{(\delta \gamma^T H + H \gamma \delta^T)}{\delta^T \gamma}$$

Esta fórmula trabaja bien en la práctica, mejor que la fórmula DFP. Se ha demostrado que el método BFGS con búsqueda lineal inexacta tiene convergencia global, resultado que no se ha podido probar para el método DFP.

El método de Quasi Newton puede ser aplicado a problemas no diferenciables, en cuyo caso se aproximan las derivadas primeras por diferencias finitas. Otro aspecto importante del método es como representar la matriz aproximada. Una forma como se vio anteriormente es aproximar a G por H_k y otra es tomar $B_k = H_k^{-1}$.

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\gamma^T \gamma}{\gamma^T \delta} - \frac{B \delta \delta^T B}{\delta^T B \delta}$$

Esta fórmula se denomina **dual o complementaria** y se asemeja a la DFP intercambiando H por B y δ por γ .

En la práctica se utiliza H_k como aproximación de $G(x_k)^{-1}$ ya que ésta representación evita resolver un sistema de ecuaciones de la forma: $B_k s_k = -g_k$.

Una idea es representar a B por los factores $L D L^T$ donde L es triangular superior y D es diagonal y definida positiva, con éste método el orden de multiplicaciones para actualizar la matriz es de n^2 , los errores de redondeo son mejor controlados y resulta más fácil reconocer y corregir una matriz indefinida, ésta representación ha sido utilizada en las implementaciones más recientes de los métodos de Quasi Newton.

Generalizando, un proceso iterativo básico para resolver problemas de la forma

minimizar $f(x)$ es

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H g(x_k)^T,$$

donde H es una matriz simétrica y α_k es elegido de manera que minimice $f(x_{k+1})$.

Si H es la inversa del hessiano de f el método resultante es el método de Newton, si H es la matriz identidad se obtiene el método del mayor descenso o método del Gradiente y si H es una matriz que aproxime a la inversa del hessiano se obtienen los métodos de Quasi Newton.

3.7 DIRECCIONES CONJUGADAS - METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Este método puede ser visto como algo intermedio entre el método del Gradiente y el método de Newton. La idea es tratar de acelerar la convergencia lenta del método del Gradiente y evitar la información requerida para evaluar, almacenar e invertir el hessiano en el método de Newton.

Este método se aplicó inicialmente a problemas de tipo cuadrático y luego se extendió a problemas generales.

Definición: Dada una matriz Q simétrica y dos vectores s_1, s_2 , se dice que esos vectores son Q - ortogonales o conjugados con respecto a Q si se verifica

$$s_1^T Q s_2 = 0.$$

Definición: Un conjunto finitos de vectores $s_1, s_2, \dots, s_n$ se dice que son conjugados con respecto a Q , matriz simétrica si se verifica

$$s_i^T Q s_j = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Proposición: Dada una matriz Q simétrica y definida positiva y un conjunto de vectores $s_1, \dots, s_k$ no nulos y conjugados con respecto a Q , entonces esos vectores son linealmente independientes.

Demostración

Dada una combinación lineal de los vectores s_i tal que,

$$\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 + \dots + \gamma_k s_k = 0 \text{ se quiere ver que } \forall i \quad i=1, \dots, k \quad \gamma_i = 0$$

multiplicando miembro a miembro por Q

$$\gamma_1 Q s_1 + \gamma_2 Q s_2 + \dots + \gamma_k Q s_k = 0$$

multiplicando miembro a miembro por s_i^T

$$\gamma_1 s_i^T Q s_1 + \gamma_2 s_i^T Q s_2 + \dots + \gamma_k s_i^T Q s_k = 0$$

Como Q es definida positiva y s_i son direcciones conjugadas, entonces por definición resulta que $s_i^T Q s_j = 0$ para $i \neq j$, entonces el único término de la igualdad anterior que no se anula es para $i = j$, es decir $\gamma_i s_i^T Q s_i$ y como Q es una matriz definida positiva entonces por definición resulta $s_i^T Q s_i > 0$ para s_i no nulo.

Luego resulta que

$$\gamma_i s_i^T Q s_i = 0 \Leftrightarrow \gamma_i = 0 \quad \forall i \quad i=1, \dots, n.$$

Estructura del Método

Una iteración del método del Gradiente Conjugado consiste en:

- determinar la dirección de búsqueda s_k ,
- minimizar $f(x_k + \alpha s_k)$ respecto de α (problema de búsqueda lineal),
- tomar $x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$.

Determinación de la dirección de búsqueda.

Dados x_1 punto inicial, $g(x_1)$ gradiente en x_1 , se toma como dirección de búsqueda inicial s_1 la dirección del gradiente, entonces

$s_1 = -g_1$, se determina α_1 por búsqueda lineal y se determina x_2 como $x_2 = x_1 + \alpha_1 s_1$, se calcula el gradiente en x_2, g_2 y se calcula s_2 como:
 $s_2 = -g_2 + \beta_1 s_1$ de manera que s_1 y s_2 resulten conjugados con respecto a G .

Cálculo de los β_i

Para $i=1$,
 se busca que $s_1^T G s_2 = 0$ y por construcción $s_2 = -g_2 + \beta_1 s_1$
 reemplazando resulta,

$$\begin{aligned} s_1^T G (-g_2 + \beta_1 s_1) &= 0 \\ -s_1^T G g_2 + \beta_1 s_1^T G s_1 &= 0 \end{aligned}$$

despejando

$$\beta_1 = \frac{s_1^T G g_2}{s_1^T G s_1}$$

si se reemplaza β_1 en la fórmula de s_2 se obtiene :

$$s_2 = -g_2 + \frac{s_1^T G g_2}{s_1^T G s_1} s_1$$

En general resulta : $s_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{i=1}^k \beta_i s_i$, y se llega a la siguiente fórmula para el cálculo de los β_i :

$$\beta_i = \frac{s_i^T G g_{i+1}}{s_i^T G s_i} .$$

Problemas de tipo Cuadrático:

Problema de búsqueda lineal

Sea f una función cuadrática, se quiere encontrar α_k tal que minimice $f(x_k + \alpha_k s_k)$.

Una función cuadrática puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T G x - b^T x$$

y el gradiente como:

$$g(x) = Gx - b.$$

Especializando en $x_k + \alpha s_k$, resulta:

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha s_k) &= \frac{1}{2} (x_k + \alpha s_k)^T G (x_k + \alpha s_k) - b^T (x_k + \alpha s_k) = \\ &= \frac{1}{2} (x_k^T G + \alpha s_k^T G) (x_k + \alpha s_k) - b^T x_k - \alpha b^T s_k = \\ &= \frac{1}{2} (x_k^T G x_k + \alpha s_k^T G x_k + \alpha x_k^T G s_k + \alpha^2 s_k^T G s_k) - b^T x_k - \alpha b^T s_k = \\ &= \left(\frac{1}{2} x_k^T G x_k - b^T x_k \right) + \frac{1}{2} \alpha s_k^T G x_k + \frac{1}{2} \alpha x_k^T G s_k + \frac{1}{2} \alpha^2 s_k^T G s_k - \alpha b^T s_k \end{aligned}$$

Usando las fórmulas de $f(x)$, de $g(x)$ y agrupando resulta:

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha s_k) &= f(x_k) + \alpha s_k^T (G x_k - b) + \frac{\alpha^2}{2} s_k^T G s_k = \\ &= f(x_k) + \alpha s_k^T g(x_k) + \frac{\alpha^2}{2} s_k^T G s_k \end{aligned}$$

Si se deriva $f(x_k + \alpha s_k)$ respecto de α resulta:

$$\frac{\partial f(x_k + \alpha s_k)}{\partial \alpha} = s_k^T g(x_k) + \alpha s_k^T G s_k$$

Se busca que la derivada se anule entonces si se iguala la expresión anterior a 0 y se despeja α se llega a la siguiente fórmula:

$$\alpha = - \frac{g(x_k)^T s_k}{s_k^T G s_k}$$

Teorema de Direcciones Conjugadas

Sea $s_1, s_2, \dots, s_n$ un conjunto de vectores no nulos y conjugados con respecto a G , para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la secuencia $\{x_k\}$ generada como:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \quad k \geq 0,$$

donde

$$\alpha_k = - \frac{g(x_k)^T s_k}{s_k^T G s_k} \quad \text{y} \quad g_k = G x_k - b$$

converge a la solución única x^* de $G x = b$, en n pasos. Es decir $x_n = x^*$.

Demostración:

Sea $s_1, s_2, \dots, s_n$ un conjunto de vectores no nulos y conjugados con respecto a G . Al ser linealmente independientes y formar una base en R^n se puede escribir a x^* como combinación lineal de los mismos.

$$x^* = x_1 + \alpha'_1 s_1 + \alpha'_2 s_2 + \dots + \alpha'_n s_n, \text{ para algún conjunto } \alpha'_i$$

$$x^* - x_1 = \sum_{i=1}^n \alpha'_i s_i$$

multiplicando por G y luego por s_k^T , se obtiene

$$s_k^T G(x^* - x_1) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i s_k^T G s_i$$

como el conjunto de vectores $s_i \forall i, i=1, \dots, n$ es conjugado con respecto a G ; el término en que $i=k$ no se anula, entonces

$$s_k^T G(x^* - x_1) = \alpha'_k s_k^T G s_k$$

despejando α'_k se obtiene

$$\alpha'_k = \frac{s_k^T G(x^* - x_1)}{s_k^T G s_k} = \frac{s_k^T G(x^* - x'_k + x'_k - x_1)}{s_k^T G s_k} =$$

$$= \frac{s_k^T G(x^* - x'_k)}{s_k^T G s_k} + \frac{s_k^T G(x'_k - x_1)}{s_k^T G s_k} \quad (1)$$

Haciendo el mismo proceso para x'_k

$$x'_k - x_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_i s_i$$

$$s_k^T G(x'_k - x_1) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_i s_k^T G s_i,$$

pero

$$s_k^T G s_i \neq 0 \quad \forall k \neq i$$

entonces

$$s_k^T G(x'_k - x_1) = 0,$$

reemplazando en (1) se obtiene la expresión

$$\alpha'_k = \frac{s_k^T G(x^* - x'_k)}{s_k^T G s_k}.$$

Como f es una función cuadrática

$$G(x^* - x'_k) = g(x^*) - g(x'_k) = -g(x'_k),$$

entonces

$$\alpha'_k = - \frac{s_k^T g(x'_k)}{s_k^T G s_k}$$

Por construcción se llega a que:

$$\alpha'_k = \alpha_k \quad \text{y} \quad x'_k = x_k.$$

Se demuestra que dada una secuencia de vectores s_i , $i=1, \dots, n$ conjugados con respecto a G y dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la secuencia generada por el método del Gradiente Conjugado tiene la propiedad de que x_k minimiza $f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx - b^T x$ a lo largo de la línea $x = x_{k-1} + \alpha s_{k-1}$ y también minimiza el plano generado por $x_0 + B_k$, donde B_k es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por $\{s_1, \dots, s_{k-1}\}$, esta propiedad se denomina propiedad descendiente del método.

Teorema del Gradiente Conjugado

El algoritmo del método del Gradiente Conjugado es un método de direcciones conjugadas, y en el paso k se verifica:

$$a) [g_1, \dots, g_k] = [g_1, Gg_1, \dots, G^k g_1]$$

$$b) [s_1, \dots, s_k] = [g_1, Gg_1, \dots, G^k g_1]$$

$$c) s_k^T G s_i = 0, \text{ para } i \leq k-1$$

$$d) \alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{s_k^T G s_k}$$

$$e) \beta_k = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$$

Problemas no cuadráticos:

1) Aproximación Cuadrática

El método del Gradiente Conjugado para problemas generales se define como:

1) se calcula el gradiente en x_1 como $g_1 = \nabla f(x_1)^T$ y se toma $s_1 = -g_1$

2) para $k = 1, \dots, n$

$$a) \text{ se toma } x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \text{ donde } \alpha_k = - \frac{g_k^T s_k}{s_k^T G(x_k) s_k}$$

$$b) \text{ se calcula } g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})^T$$

c) para $k \neq n$, $s_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k s_k$ donde $\beta_k = -\frac{g_{k+1}^T G(x_k) s_k}{s_k^T G(x_k) s_k}$

d) repetir a).

3) se reemplaza x_1 por x_n y se vuelve al punto 1).

Este algoritmo resulta no ser práctico ya que hay que evaluar $G(x_k)$ en cada punto y no tiene convergencia global.

2) Método de Fletcher - Reeves

Este método no requiere evaluaciones de la función en cada punto, pero requiere hacer una búsqueda lineal.

El algoritmo resultante es :

1) dado x_1 inicial se computa $g_1 = \nabla f(x_1)^T$ y se toma $s_1 = -g_1$

2) para $k = 1, \dots, n$

a) se toma $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$, donde α_k minimiza $f(x_k + \alpha s_k)$

b) se calcula $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})^T$

c) para $k < n$, $s_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k s_k$ donde $\beta_k = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$

d) repetir a).

3) se reemplaza x_1 por x_n y se vuelve al punto 1).

Se demuestra que este método tiene convergencia global.

Ventajas

- El gradiente es siempre distinto de cero y linealmente independiente a las direcciones obtenidas, esto ocurre a menos que no tenga solución antes de n pasos, en cuyo caso el gradiente se anula y el proceso termina.
- Las fórmulas utilizadas para el cálculo de las direcciones son simples y no requieren operaciones matriciales.
- Como las direcciones de búsqueda se basan en el gradiente; el proceso hace un buen progreso hacia la solución en cada paso. Esto es importante en el caso de no tratarse de un problema del tipo cuadrático.
- El método es apropiado para resolver problemas de dimensiones grandes.

Desventajas

En problemas de dimensiones pequeñas no se comporta tan bien como el método de Quasi-Newton, ya que utiliza mayor información de la función en cada iteración.

3.8 METODO DEL PASO RESTRICTIVO

Este método puede ser visto como una solución a la dificultad que presenta el método de Newton cuando el hessiano no es definido positivo. Esto se debe a que la región cercana a x_k en la cual la serie de Taylor es adecuada no incluye el punto mínimo de $q_k(\delta)$, donde $\delta = x - x_k$.

La fórmula que utiliza el método de Newton es:

$$f(x_k + \delta) \cong q_k(\delta) = f(x_k) + g(x_k)^T (\delta) + \frac{1}{2} (\delta)^T G(x_k) (\delta).$$

El método consiste en elegir una región Ω_k en la cual $q_k(\delta)$ coincide con $f(x_k + \delta)$; por lo tanto se restringe el paso $x_{k+1} = x_k + \delta_k$ de manera tal que minimice $q_k(\delta)$ para todos los $x_k + \delta_k$ en Ω_k . Estos métodos son denominados *métodos de paso restrictivo* donde Ω_k es la *región de confianza*.

La principal ventaja de éstos método es que poseen convergencia rápida y global.

Sea $\Omega_k = \{ x: \|x - x_k\| \leq h_k \}$; se plantea el subproblema

$$\min_{\delta} q_k(\delta) \text{ sujeto a } \|\delta\| \leq h_k$$

para hallar la solución δ_k .

La elección de h_k estará dada en base a una medida entre $q_k(\delta_k)$ y $f(x_k + \delta_k)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= f_k - f(x_k + \delta_k) \\ \Delta q_k &= q_k(0) - q_k(\delta_k) = f_k - q_k(\delta_k). \end{aligned}$$

Luego *el radio*:

$$r_k = \frac{\Delta f_k}{\Delta q_k}$$

mide la precisión con que $q_k(\delta_k)$ aproxima $f(x_k + \delta_k)$; por lo tanto el r_k más cercano es la unidad.

La ***k_ésima iteración*** de un prototipo de algoritmo que intenta mantener a r_k unitario y a h_k lo más grande posible sería:

- i) dado x_k y h_k , calcular $g(x_k)$ y $G(x_k)$.
- ii) resolver $\min_{\delta} q_k(\delta)$ sujeto a $\|\delta\| \leq h_k$ para δ_k
- iii) evaluar $f(x_k + \delta_k)$ y r_k
- iv) si $r_k < 0.25$ tomar $h_{k+1} = \|\delta_k\| / 4$,
si $r_k > 0.75$ tomar y a $\|\delta_k\| = h_k$ tomar $h_{k+1} = 2 h_k$,
de otra manera tomar $h_{k+1} = h_k$;
- v) si $r_k \leq 0$ tomar $x_{k+1} = x_k$, sino $x_{k+1} = x_k + \delta_k$.

Teorema de la convergencia global

Para el algoritmo definido, si $x_k \in B \subset \mathbb{R}^n \forall k$, donde B es finito, y si $f \in C^2$ en B , entonces existe un punto acumulación x^∞ que satisface las condiciones necesarias de primero y segundo orden

$$\begin{aligned} g(x^\infty) &= 0 \\ s^T G(x^\infty) s &\geq 0. \end{aligned}$$

Métodos de Levenberg-Marquardt

Este tipo de métodos definen

$$\min_{\delta} q_k(\delta) \text{ sujeto a } \|\delta\| \leq h_k$$

en términos de la norma L_2 y se caracterizan por resolver

$$(G_k + \nu I) \delta_k = -g_k, \quad \nu \geq 0 \quad (1)$$

para determinar la corrección δ_k .

El problema anterior en términos de la norma L_2 puede ser expresado como

$$(2) \quad \min q_k(\delta) \triangleq \frac{1}{2} \delta^T G_k \delta + g_k^T \delta \quad \text{sujeto a } \delta^T \delta \leq h_k^2$$

y se asume que $h_k > 0$.

Teorema

La corrección δ_k es una solución global de (2) si y solo si existe $\nu \geq 0$ tal que satisfaga (1),

$$\nu (h_k^2 - \delta_k^T \delta_k) = 0$$

y $G_k + \nu I$ es *semidefinida positiva*. Además si $G_k + \nu I$ es *definida positiva* entonces δ_k es solución única de (2).

Todos los algoritmos de Levenberg-Marquardt encuentran un valor $\nu \geq 0$ tal que $G_k + \nu I$ es definida positiva y resuelven (1) para determinar δ_k .

La *k-ésima iteración* sería:

- i) dado x_k y ν_k , calcular $g(x_k)$ y $G(x_k)$;
- ii) factorizar $G_k + \nu I$; si no es definida positiva tomar $\nu_k = 4\nu_k$ y repetir.
- iii) resolver $(G_k + \nu I) \delta_k = -g_k, \nu \geq 0$ para hallar δ_k ;
- iv) evaluar $f(x_k + \delta_k)$ y r_k ;
- v) si $r_k < 0.25$ tomar $\nu_{k+1} = 4\nu_k$,
si $r_k > 0.75$ tomar $\nu_{k+1} = 2\nu_k$,
de otra manera tomar $\nu_{k+1} = \nu_k$;
- vi) si $r_k \leq 0$ tomar $x_{k+1} = x_k$, sino $x_{k+1} = x_k + \delta_k$.

Inicialmente $\nu_1 > 0$ es elegido arbitrariamente. Un algoritmo alternativo es hacer en cada iteración una búsqueda a lo largo de la trayectoria $\delta(\nu)$ con $\nu \geq 0$ para optimizar $f(x + \delta(\nu))$.

4. MÉTODOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

En este capítulo se describirán brevemente los diferentes métodos para resolver ecuaciones diferenciales; para mayor detalle consultar [ISA/66], [DAH/74].

4.1 CONCEPTOS GENERALES

El estudio de las ecuaciones diferenciales es una parte de la matemática que ha sido directamente inspirada por la mecánica, la astronomía y la física. Se presentan una gran variedad de problemas en los cuales se desea determinar un elemento a partir de su coeficiente de variación; por ejemplo: se quiere determinar la posición de una partícula móvil conociendo su aceleración.

Una ecuación diferencial vincula una variable independiente x , con una dependiente y y sus derivadas.

Ejemplo: Movimiento lineal determinado por la velocidad

Dada una partícula que se mueve a lo largo de una recta, de manera que su velocidad en el instante t es $2 \text{ Sen}(t)$, se quiere determinar su posición en dicho instante.

Solución: $y(t)$ representa la posición en el instante t , medida a partir del punto inicial y la derivada $y'(t)$ la velocidad en ese instante.

Si se integra:

$$\begin{aligned} \int y'(t) &= \int 2 \text{ Sen}(t), \\ y(t) &= 2 \int \text{ Sen}(t) dt + C = -2 \text{ Cos}(t) + C \end{aligned}$$

Esto es lo único que se puede deducir acerca de $y(t)$ a partir del conocimiento de la velocidad, se necesita más información para fijar la función de posición.

Se puede determinar la constante C si se conociera el valor de y en un cierto instante.

Por ejemplo: si $y(0) = 0$, entonces $C = 2$ y la función $y(t) = 2 - 2 \text{ Cos}(t)$;

si $y(0) = 2$, $C = 4$ y la función sería $y(t) = 4 - 2 \text{ Cos}(t)$.

Las técnicas de integración son utilizadas para encontrar la fórmula explícita de una función a partir de una ecuación diferencial, pero en la práctica no todos los problemas pueden resolverse exactamente. Se han propuesto varios métodos para encontrar una solución aproximada a dichos problemas.

Definición: Dado un problema de valores iniciales, de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \quad \text{en } [x_0, b]. \end{aligned}$$

una solución es una función diferenciable

$$y = y(x) \text{ tal que}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y' = f(x, y) \text{ para todo } x \in [x_0, b]$$

Definición: Se dice que una función $f(x,y)$ satisface una *condición de Lipschitz* para la variable y en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, si existe una constante $L > 0$ con la siguiente propiedad

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \text{si } (x,y_1), (x,y_2) \in D$$

La constante L se denomina *constante de Lipschitz* para f .

Teorema:

Sea $D = \{(x,y) / a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ y $f(x,y)$ continua en D , si f satisface una condición de Lipschitz en D para la variable y , entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}$$

tiene solución única $y(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Definición: Se dice que un problema de valores iniciales de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}$$

es un problema bien planteado si:

- 1) existe una solución única $y(x)$ para dicho problema
- 2) existen constantes positivas ε y k , con la propiedad de que existe una única solución $z(x)$ al problema perturbado

$$\begin{aligned} z' &= f(x,z) + \delta(x), \quad a \leq x \leq b \\ z(a) &= \alpha + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

con $|z(x) - y(x)| < k \varepsilon$, para todo $a \leq x \leq b$, si $|\varepsilon_0| < \varepsilon$, y $|\delta(x)| < \varepsilon$.

Notación:

Sea $y(x_k)$ la solución exacta al problema de valores iniciales bien planteado

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}$$

$\phi(x_k, y_k, \dots, y_{k+n}, h) \cong f(x_k, y_k)$ y $\frac{L(y_k)}{h}$ la diferencia finita, a partir del cual se

obtienen valores aproximados y_k , se denota al *error de truncamiento local* o *error de discretización* como:

$$\tau_{k+1} = \frac{L(y(x_k))}{h} - \phi(x_k, y(x_k), \dots, y(x_{k+n}), h).$$

Definición: Se dice que un método de diferencias finitas con error de truncamiento τ_k en el paso k , es *consistente* con la ecuación diferencial que aproxima si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq k \leq n} |\tau_k| = 0$$

Esta definición es local, ya que depende de x_k .

Definición: Se dice que un método de diferencias finitas es convergente con respecto a la ecuación diferencial que aproxima si $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq k \leq n} |y(x_k) - y_k| = 0$ para $h \rightarrow 0$, $1 \leq k \leq n$.

Definición: Un método es *estable* si al perturbar los valores iniciales las aproximaciones no varían significativamente.

4.2 METODOS DE UN PASO

Estos métodos se caracterizan por calcular el valor aproximado y_{k+1} usando información de la iteración anterior y_k , es decir, solo el punto inicial (x_0, y_0) es utilizado para computar (x_1, y_1) y así sucesivamente.

4.2.1 Método de Euler o de la tangente

Es el método más sencillo pero el menos utilizado debido a que los errores que se cometen durante el proceso de cálculo son muy grandes.

Sea el intervalo $[a, b]$, en el cual se quiere encontrar la solución al problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, con $y(a) = y_0$.

Se generarán una serie de puntos (x_k, y_k) que aproximarán al valor exacto de la función. Dicha aproximación se construye de la siguiente manera:

se divide el intervalo en M subintervalos iguales y se toman los puntos $x_k = a + hk$ para $k=0, \dots, M$ donde $h = \frac{b-a}{M}$

se resuelve entonces el problema $y' = f(x, y)$, en el intervalo $[x_0, x_M]$, con $y(x_0) = y_0$, si $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ son continuas y usando el Teorema de Taylor para desarrollar $y(x)$ en un entorno de x_0 , entonces:

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(c_1) \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

reemplazando

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) \quad y \quad h = x_1 - x_0$$

$$y(x_1) = y(x_0) + h f(x_0, y(x_0)) + y''(c_1) \frac{h^2}{2}, \quad x_0 < c_1 < x_1$$

para h suficientemente pequeño el término de segundo orden puede despreciarse, de manera que se obtiene el **esquema de Euler:** $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$.

El método de Euler construye $y_k \cong y(x_k)$ para cada $k=1,2,\dots,M$, donde

$$y_0 = y(a)$$

$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$, esta ecuación se denomina ecuación en diferencias.

Teorema (Precisión del método de Euler)

Si $y(x)$ es la solución exacta al problema de valores iniciales, y si $y(x) \in C^2([x_0, b])$ y $\{(x_k, y_k)\}$ para $k=0, \dots, M$ es la secuencia de aproximaciones generadas por el método de Euler, entonces

$$|e_k| = |y(x_k) - y_k| = O(h) \text{ (error global),}$$

$$|e_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - y_k - h f(x_k, y_k)| = O(h^2) \text{ (error local o de un paso),}$$

$$\tau_{k+1} = O(h) \text{ (error de discretización local).}$$

Es decir la precisión del método depende del h que se tome, cuanto más chico sea el tamaño del paso elegido se obtendrá mayor precisión.

Ejemplo:

Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 1 \text{ en } [0, 1]. \end{aligned}$$

La solución exacta a dicho problema es $y(x) = e^x$

Para el método de Euler:

$$\phi(x_k, y_k, \dots, y_{k+n}, h) = y'(x_k)$$

$$L(y(x_k)) = h \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}$$

y el error de truncamiento local es:

$$\tau_{k+1} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - y'(x_k).$$

Desarrollando a $y(x_{k+1})$ por Taylor y reemplazando en la igualdad anterior, se llega a que el error de truncamiento del esquema utilizado es del orden de h .

$$\tau_{k+1} = \frac{h}{2} y''(\xi_1) = O(h).$$

Como $y'(x_0) = y(x_0)$, reemplazando resulta $y(x_0+h) \cong y(x_0)(1+h)$, si se usa este esquema como aproximación al valor exacto para distintos valores de h (tamaño del paso entre un punto y otro) se obtienen los siguientes resultados:

x_k	$y(x_k)$	y_k (con $h=1/2$)	y_k (con $h=1/4$)	y_k (con $h=1/8$)
0	1	1	1	1
0,125	1,133148453	1,5	1,25	1,125
0,25	1,284025417	2,25	1,5625	1,265625
0,375	1,454991415	3,375	1,953125	1,423828125
0,5	1,648721271	5,0625	2,44140625	1,601806641
0,625	1,868245957	7,59375	3,051757813	1,802032471
0,75	2,117000017	11,390625	3,814697266	2,02728653
0,875	2,398875294	17,0859375	4,768371582	2,280697346
1	2,718281828	25,62890625	5,960464478	2,565784514

Se ve que cuando $h \rightarrow 0$ el valor aproximado por el esquema (y_k) tiende al valor exacto $y(x_k)$.

4.2.2 Método de Heun o Euler mejorado

Este método utiliza las reglas de integración para resolver un problema de valores iniciales dado, de la forma:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ en } [a, b] \text{ con } y(x_0) = y_0.$$

Integrando $y'(x)$ en $[t_0, t_1]$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx = \int_{x_0}^{x_1} y'(x) = y(x_1) - y(x_0)$$

despejando $y(x_1)$, $y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx$.

Si se aplica el método del trapecio con $h = x_1 - x_0$, $f(x, y(x)) \cong P(x)$

$$P(x) = \frac{x - x_{k+1}}{(-h)} f(x_k, y(x_k)) + \frac{x - x_k}{h} f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx &= \frac{(x_1 - x_0)^2}{2h} f(x_1, y(x_1)) + \frac{(x_0 - x_1)^2}{(-2h)} f(x_0, y(x_0)) = \\ &= \frac{h}{2} f(x_1, y(x_1)) + \frac{h}{2} f(x_0, y(x_0)) \\ &= \frac{h}{2} (f(x_1, y(x_1)) + f(x_0, y(x_0))) \end{aligned}$$

entonces, $y_1 = y(x_0) + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1)))$.

Es necesario conocer el valor de $y(x_1)$, el cual puede estimarse utilizando un paso del método de Euler, y obtener la siguiente fórmula:

$$y_{k+1} = y(x_k) + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k))).$$

El proceso se repite y se generan de esta manera una secuencia de puntos que aproximan a la curva solución $y=y(x)$.

Teorema (Precisión del método de Heun)

Si $y(x)$ es la solución exacta al problema de valores iniciales, y si $y(x) \in C^3([x_0, b])$ y $\{(x_k, y_k)\}$ para $k=0, \dots, M$ es la secuencia de aproximaciones generadas por el método de Heun, entonces

$$|e_k| = |y(x_k) - y_k| = O(h^2) \text{ (error global),}$$

$$|e_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - y_{k+1}| = O(h^3) \text{ (error local o en un paso),}$$

$$\tau_{k+1} = O(h^2) \text{ (error de discretización local).}$$

$$\text{Donde } \phi(x_k, y_k) = \frac{1}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k))).$$

Es decir si el tamaño del paso tomado es reducido por un factor de $\frac{1}{2}$, el error global se reducirá en un factor de $\frac{1}{4}$.

4.2.3 Métodos de Taylor de orden mayor

Sea el problema de valores iniciales:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ en } [a, b] \text{ con } y(x_0) = y_0$$

si $y(x)$, solución a dicho problema tiene $(n+1)$ derivadas continuas, usando el desarrollo de Taylor de orden n alrededor de x_k se obtiene:

$$y(x_k + h) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2!} y''(x_k) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\zeta_k)$$

para $x_k < \zeta_k < x_{k+1}$. (1)

Derivando sucesivamente la solución $y(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y''(x) &= f'(x, y(x)), \end{aligned}$$

y en general

$$y^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x, y(x)).$$

Reemplazando en la ecuación (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} y(x_k + h) &= y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_k, y(x_k)) + \frac{h^3}{3!} f''(x_k, y(x_k)) + \dots + \\ &+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_k, y(x_k)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\zeta_k, y(\zeta_k)), \quad \text{para } x_k < \zeta_k < x_{k+1}. \end{aligned}$$

El método de diferencias se obtiene despreciando el término de orden superior.

Los métodos de Taylor tienen un error de truncamiento local del orden de h^{n+1} , a partir de la ecuación del método se llega a:

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - (f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f'(x_k, y_k) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_k, y_k)) = \\ &= \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\zeta_k, y(\zeta_k)). \end{aligned}$$

El método de Euler corresponde al método de Taylor de orden 1.

4.2.4 Método de Runge Kutta

Los métodos de Taylor tienen la ventaja que el error de truncamiento local es de orden grande, pero la desventaja de requerir muchos cálculos para la evaluación de las derivadas de la función. Por esta razón no son muy utilizados.

Los métodos de Runge Kutta tienen el error de truncamiento local de orden grande igual a los métodos de Taylor y eliminan los cálculos para la evaluación de las derivadas.

Runge Kutta de Orden 2 o Euler Modificado

El primer paso para deducir el método consiste en determinar valores a_1, α_1, β_1 de manera que se verifique:

$$a_1 f(x+\alpha_1, y+\beta_1) \cong f(x,y) + \frac{h}{2} f'(x,y).$$

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) y'(x),$$

$$y'(x) = f(x,y),$$

entonces resulta:

$$f(x,y) + \frac{h}{2} f'(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) f(x,y). \quad (1)$$

Si se desarrolla el término $f(x+\alpha_1, y+\beta_1)$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de (x,y) ,

$$a_1 f(x+\alpha_1, y+\beta_1) = a_1 f(x,y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + a_1 \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\zeta, \upsilon) + a_1 \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\zeta, \upsilon) + a_1 \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\zeta, \upsilon), \quad (2)$$

para $x < \zeta < x+\alpha_1, y < \upsilon < y+\beta_1$.

Igualando los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2), correspondientemente resulta:

$$a_1 = 1, \quad a_1 \alpha_1 = \frac{h}{2}, \quad a_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(x,y)$$

y despejando se llega a que:

$$a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}, \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(x,y)$$

y

$$f(x,y) + \frac{h}{2} f'(x,y) = f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(x,y)) - O(h^2).$$

El esquema resultante es :

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \quad \text{para } k=0, \dots, n-1.$$

Este método tiene error de truncamiento de orden 2.

Runge Kutta de Orden 4

Es el más utilizado por su estabilidad y facilidad de programación.
Una iteración de este método esta dada por:

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4),$$

donde

$$k_1 = h f(x_k, y_k),$$

$$k_2 = h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2} k_1),$$

$$k_3 = h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2} k_2),$$

$$k_4 = h f(x_{k+1}, y_k + k_3), \quad \text{para } k=0, \dots, n-1.$$

Teorema (Precision del método de Runge Kutta de orden 4)

Si $y(x)$ es la solución exacta al problema de valores iniciales, y si $y(x) \in C^5([x_0, b])$ y $\{(x_k, y_k)\}$ para $k=0, \dots, M$ es la secuencia de aproximaciones generadas por el método de Runge Kutta de orden 4, entonces

$$|e_k| = |y(x_k) - y_k| = O(h^5) \text{ (error global),}$$

$$|e_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - y_k - h \phi(x_k, y_k)| = O(h^5) \text{ (error local o en un paso),}$$

$$\tau_{k+1} = O(h^4) \text{ (error de discretización local).}$$

Es decir que si el tamaño del paso en el método de Runge Kutta de orden 4 es reducido en un factor de 1/2, el error de truncamiento se reducirá en un factor de 1/16.

4.3 METODOS MULTIPASO

Estos métodos utilizan la aproximación en más de uno de los puntos anteriores para determinar la aproximación en el punto siguiente.

Definición: Un método multipaso para resolver un problema de valores iniciales de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) &= \alpha, \end{aligned}$$

es aquel cuya ecuación en diferencias para encontrar la aproximación y_{k+1} en el punto x_{k+1} puede ser representada con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= a_{m-1} y_k + a_{m-2} y_{k-1} + \dots + a_0 y_{k+1-m} + \\ &+ h (b_m f(x_{k+1}, y_{k+1}) + b_{m-1} f(x_k, y_k) + \dots + b_0 f(x_{k+1-m}, y_{k+1-m})), \end{aligned}$$

para $k=m-1, m, \dots, n-1$,
 donde $y_0 = \alpha$,
 $y_1 = \alpha_1$,
 $y_2 = \alpha_2$,
 $\vdots$
 $y_{m-1} = \alpha_{m-1}$

están especificados, $h = \frac{b-a}{m}$ y m es un entero mayor a 1.

Cuando b_0 es cero el método se denomina *método explícito o abierto* y cuando es distinto de cero se denomina *método implícito o cerrado*.

En la práctica los métodos multipaso implícitos se utilizan para mejorar aproximaciones obtenidas por métodos explícitos originándose lo que se denomina *método predictor - corrector*.

4.3.1 Método Adams - Bashforth - Moulton

Este método predictor - corrector se basa en aproximar a la función $f(x,y)$ utilizando el polinomio de Lagrange en los puntos (x_{k-3}, f_{k-3}) , (x_{k-2}, f_{k-2}) , (x_{k-1}, f_{k-1}) y (x_k, f_k) , e integrando en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. La fórmula predictora del método de Adams-Bashforth resulta ser :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9 f_{k-3} + 37 f_{k-2} - 59 f_{k-1} + 55 f_k).$$

La fórmula correctora se deriva de la misma forma, el valor y_{k+1} es utilizado y $f(x,y)$ es aproximado por el polinomio de Lagrange de orden 2 que pasa por los puntos (x_{k-2}, f_{k-2}) , (x_{k-1}, f_{k-1}) , (x_k, f_k) y el nuevo punto (x_{k+1}, f_{k+1}) , obteniéndose la fórmula correctora del método de Adams - Moulton:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5 f_{k-1} + 19 f_k + 9 f_{k+1}).$$

Es necesario especificar los valores iniciales para calcular la primera aproximación, generalmente se utiliza un método de Runge Kutta u otra técnica de un paso que tenga igual precisión.

Ambos métodos (predictor y corrector) tienen un error de truncamiento de orden 4 ($O(h^4)$).

4.3.2 Método de Milne Simpson

La fórmula predictora de este método está basada en la integración de $f(x,y)$ en el intervalo $[x_{k-3}, x_{k+1}]$, aproximando a la función con el polinomio de Lagrange que pasa por los puntos (x_{k-3}, f_{k-3}) , (x_{k-2}, f_{k-2}) , (x_{k-1}, f_{k-1}) y (x_k, f_k) , obteniéndose la fórmula predictora de Milne:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3} h (2 f_{k-2} - f_{k-1} + 2 f_k).$$

La fórmula correctora se obtiene de la misma manera, construyendo el polinomio de segundo orden que pasa por los puntos (x_{k-1}, f_{k-1}) , (x_k, f_k) y (x_{k+1}, f_{k+1}) , obteniéndose la fórmula correctora de Simpson:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3} (f_{k-1} + 4 f_k + f_{k+1}).$$

Ambas fórmulas tienen un error de truncamiento local de orden 4.

5. METODO PROPUESTO POR F.H. BRANIN, Jr.

A continuación se hará una breve introducción al método propuesto por F.H. Branin, Jr.; para mayor detalle consultar [BRA/71].

Sea un sistema de ecuaciones no lineales de la forma: $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$F(x) = 0. \quad (1)$$

Una variante del método de Newton puede escribirse en forma recursiva como:

$$x_{i+1} = x_i - h_i J(x_i)^{-1} F(x_i), \quad \text{donde } J \text{ es el jacobiano de } F(x).$$

Si se aplica éste método al problema:

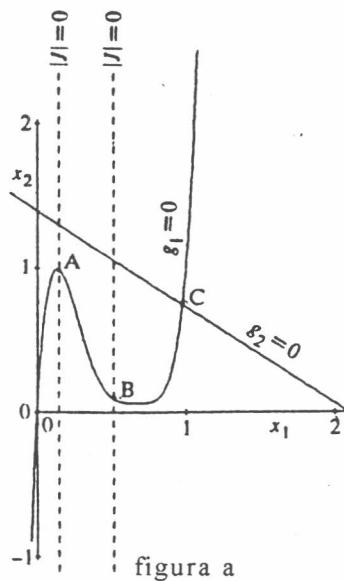
$$\begin{aligned} f(x_1) - x_2 &= 0 \\ x_1 + R x_2 - E &= 0, \end{aligned}$$

donde $f(x)$ es la función que describe la curva del "nonlinear tunnel diode", R es el valor de resistencia y E el voltage de batería, el algoritmo no es globalmente convergente.

El jacobiano de esta función resulta ser:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & -1 \\ 1 & R \end{bmatrix}.$$

El determinante de esta matriz se anula para $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{-1}{R}$ y por lo tanto la inversa del jacobiano no existe; esto ocurre en cualquier punto a lo largo de las líneas verticales A y B, como se muestra en la figura (a).



Para resolver problemas de éste tipo se propuso utilizar un sistema de ecuaciones diferenciales asociado.

La ecuación sugerida por L.E. Kugel es: $\frac{\partial F}{\partial t} + F(x) = 0$ (2), cuya solución analítica es $F(x(t)) = F(x(0))e^{-t}$, que para $t \rightarrow \infty$ converge a la ecuación (1).

Esta nueva ecuación es efectiva siempre que el jacobiano sea no singular. Por la regla de la cadena resulta :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} ,$$

entonces la ecuación (2) puede escribirse como

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial x}{\partial F}\right)^{-1} , F(x) = -J^{-1} f(x).$$

Una forma de evitar los problemas que se originan al anularse el determinante del jacobiano es realizar un cambio de signo en la ecuación (2); de manera que cuando el determinante del jacobiano cambia de signo, luego de anularse, el signo de la ecuación (2) se invierte.

Es decir las ecuaciones resultantes serían :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \pm F(x) = 0, \text{ con solución } F(x(t)) = F(x(0))e^{\mp t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mp J^{-1} F(x).$$

El método resulta ser globalmente convergente para ciertos problemas, pero no en general, debido a las singularidades de las ecuaciones diferenciales.

Ejemplo

Se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Newton:

$$\begin{aligned} 25.5 x_1^3 - 37.25 x_1^2 + 12.5 x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 1.25 x_2 - 1.875 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es: $x = (0.2327, 1.2723)$.

El jacobiano resulta ser: $J(x) = \begin{bmatrix} 12.5 - 74.5 x_1 + 76.5 x_1^2 & -1 \\ 1 & 1.25 \end{bmatrix}$ y su determinante se anula para $x_1 = 0.738$ o $x_1 = 0.235$.

Si se aplica el método de Newton tomando como punto inicial $x_0 = (0, 0.6)$:

$$x_0 = (0, 0.6), \det(J(x_0)) = 16.625$$

$$x_1 = (0.1128, 1.4098), \det(J(x_1)) = 7.3385$$

$$x_2 = (0.1873, 1.3502), \det(J(x_2)) = 2.5398$$

$$x_3 = (0.2602, 1.2918), \det(J(x_3)) = -1.1322$$

$$x_4 = (0.1364, 1.3908), \det(J(x_4)) = 5.6986$$

$$x_5 = (0.2053, 1.3357), \det(J(x_5)) = 1.5357$$

$$x_6 = (0.3021, 1.2584), \det(J(x_6)) = -2.7794.$$

Se observa que al pasar de la iteración 2 a la 3, el determinante del jacobiano cambia de signo; lo mismo ocurre en las iteraciones 5 y 6. En la figura (b) se ve que no hay progreso hacia la solución utilizando el método de Newton.

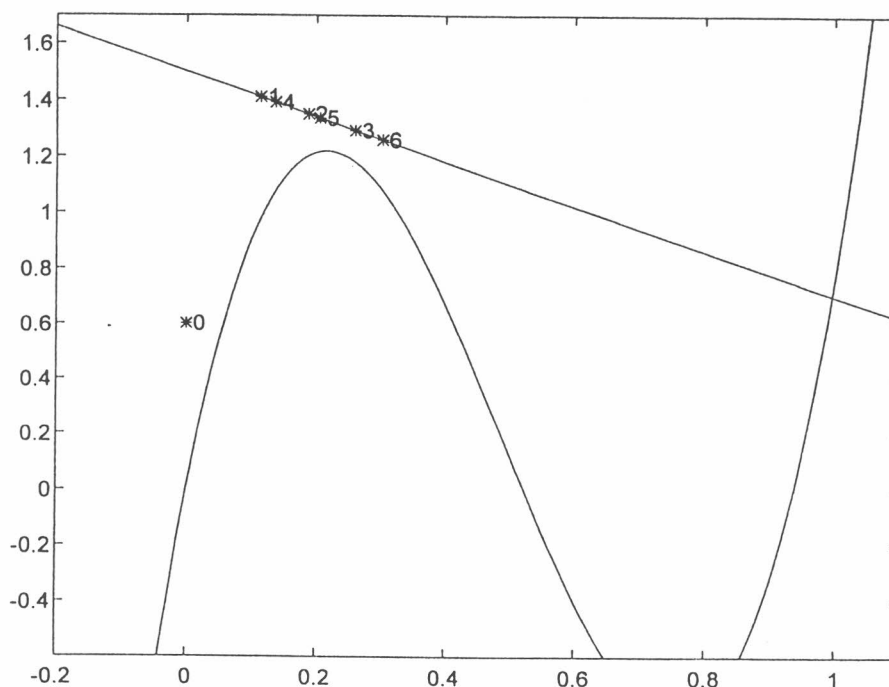


figura b

Si en lugar del método de Newton se utiliza la variante propuesta por Branin, resulta:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= (0, 0.6), \det(J(x_0)) = 16.625, (\|g\|_2)^2 = 1.6256 \\
 x_1 &= (0.1128, 1.4098), \det(J(x_1)) = 7.3385, (\|g\|_2)^2 = 0.1912 \\
 x_2 &= (0.1873, 1.3502), \det(J(x_2)) = 2.5398, (\|g\|_2)^2 = 0.0220 \\
 x_3 &= (0.2602, 1.2918), \det(J(x_3)) = -1.1322, (\|g\|_2)^2 = 0.01257 \\
 x_4 &= (0.3840, 1.1928), \det(J(x_4)) = -5.0338, (\|g\|_2)^2 = 0.1949 \\
 x_5 &= (0.4936, 1.1051), \det(J(x_5)) = -6.0433, (\|g\|_2)^2 = 0.8913 \\
 x_6 &= (0.6889, 0.9489), \det(J(x_6)) = -2.1477, (\|g\|_2)^2 = 2.8185 \\
 x_7 &= (1.6660, 0.1672), \det(J(x_7)) = 12.6887, (\|g\|_2)^2 = 123.7667 \\
 x_8 &= (1.3194, 0.4445), \det(J(x_8)) = 60.2231, (\|g\|_2)^2 = 95.4987 \\
 x_9 &= (1.1166, 0.6067), \det(J(x_9)) = 31.8633, (\|g\|_2)^2 = 5.7954 \\
 x_{10} &= (1.0221, 0.6823), \det(J(x_{10})) = 21.3436, (\|g\|_2)^2 = 0.1666 \\
 x_{11} &= (0.9982, 0.7014), \det(J(x_{11})) = 18.9516, (\|g\|_2)^2 = 0.0005 \\
 x_{12} &= (0.9967, 0.7026), \det(J(x_{12})) = 18.8032, (\|g\|_2)^2 = 0.0 \\
 x_{13} &= (0.9967, 0.7026), \det(J(x_{13})) = 18.8026, (\|g\|_2)^2 = 0.0.
 \end{aligned}$$

En la figura (c) se observa que hay progreso hacia la solución.

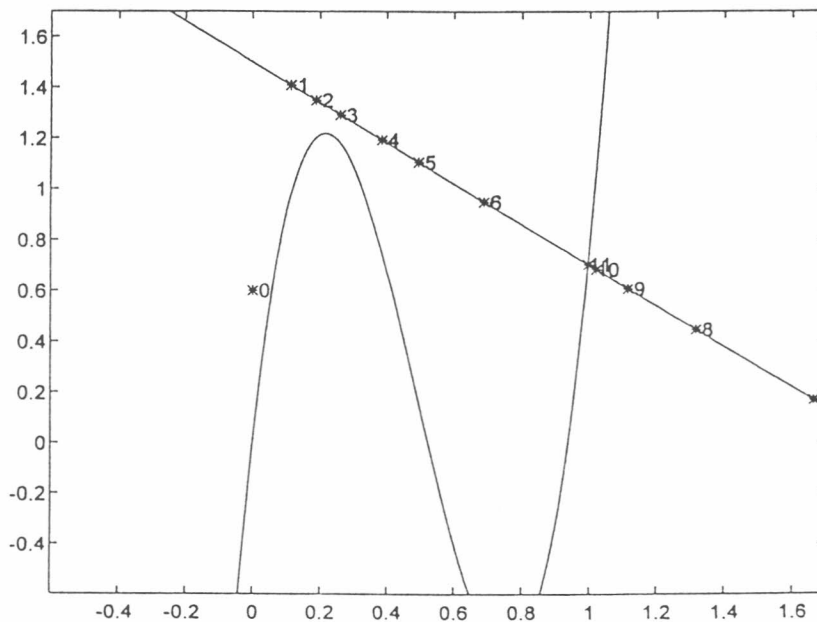


figura c.

6. RESULTADOS NUMERICOS

A continuación se detallarán pruebas realizadas sobre distintos tipos de problemas - resolución de sistemas de ecuaciones no lineales y minimización de funciones -. El objetivo será encontrar casos en donde fallen los métodos de optimización y se obtengan mejores resultados con los métodos de ecuaciones diferenciales.

Las pruebas se realizaron en PC's compatibles 486/Pentium y fueron implementadas en lenguaje de programación Fortran 5.0. Se utilizaron las rutinas de IMSL detalladas a continuación:

DUVMGS: Esta rutina utiliza el método golden section search para encontrar el mínimo de una función unimodal de una variable independiente en un intervalo finito conocido que contiene al mínimo. Como criterio de parada utiliza un parámetro $T=TOL$ ingresado por el usuario que es la longitud del intervalo final permitida que contenga al mínimo.

DUMIDH: Esta rutina utiliza el método de Newton Modificado para encontrar el mínimo de una función de n variables. Las primeras y segundas derivadas son estimadas. El algoritmo usa una región de confianza en cada paso para hallar el mínimo.

DUMING / DUMINF: Utiliza el método de Quasi Newton para encontrar el mínimo de una función de n variables.

Dado x_c punto inicial se computa la dirección de búsqueda $d = -B^{-1} g_c$ donde B es una matriz aproximación del hessiano, definida positiva y g_c es el gradiente en el punto x_c , luego el nuevo punto x_n es encontrado haciendo una búsqueda lineal. Si x_n no satisface el criterio de optimalidad B es actualizada por la fórmula BFGS.

DUMCGG / DUMCGF: Esta rutina utiliza el método del Gradiente Conjugado para encontrar el mínimo de una función $f(x)$ de n variables. Solo requiere evaluaciones de la función.

Se consideraron dos tipos de problemas:

I. Sistemas de ecuaciones no lineales

Dada $f: R^n \rightarrow R^n$ para $i = 1, \dots, n$; resolver:

$$f_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x \in R^n.$$

II. Minimización de Funciones de n variables

Dada $f: R^n \rightarrow R$; calcular $x / f(x)$ sea mínimo, es decir
hallar $x^* / f(x^*) = \min_x f(x)$.

Problemas del tipo I

Para los problemas del tipo I se reemplazará el problema original por el de resolver: $\min\{n(x) = 0: x \in \mathbb{R}^n\}$, $n(x) = \|f_i\|^2$; dado que los métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales no están implementadas en IMSL.

Para aplicar las rutinas de resolución de ecuaciones diferenciales se construye el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} J(x) \quad x'(t) &= -F(x) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Problemas del tipo II

Se reducen a hallar $x^* / f(x^*) = \min_x f(x)$, con los métodos de optimización. Esto implica que $g(x^*)=0$ y se resuelve

$$G(x) \quad x'(t) = -g(x),$$

con los métodos de ecuaciones diferenciales; donde $G(x) = \nabla^2 f(x)$. Esto quiere decir que los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales pueden converger a una solución (punto singular) que no es mínimo de $f(x)$.

En la lista de problemas que se dan a continuación **los problemas 2 y 3 son del tipo II y el resto del tipo I.**

La mayor parte de estos problemas fueron tomados de [MOR/78]. Los resultados de los problemas que se enuncian a continuación se detallan en el Apéndice (pág. 59)

Problema 1

$$\begin{aligned} n = 2 \quad f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 9.0 \\ f_2(x) &= x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(0.5, -0.5); (10.0, 7.5); (-0.1, -0.25); (1.0, 2.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (1.5941, 2.5414)$$

Problema 2 - Función de Wood

$$\begin{aligned} n = 4 \quad f(x) &= 100.0 (x_1^2 - x_2)^2 + 90.0 (x_3^2 - x_4)^2 + 10.1 (1.0 - x_2)^2 + \\ &+ 10.1 (1.0 - x_4)^2 + 19.8 (1.0 - x_2) (1.0 - x_4) + \\ &+ (1.0 - x_1)^2 + (1.0 - x_3)^2 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} &(-3.0, -1.0, -3.0, -1.0); (0.5, -1.0, 1.5, -0.5); \\ &(2.0, 0.0, 2.0, 1.0); (-2.0, 1.0, 0.0, 0.0) \end{aligned}$$

$$f = 0, \text{ en } (1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$$

Problema 3 - Función de Penalty

$$n = 8 \quad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 0.25 \right)^2 + 1.d-5 \sum_{i=1}^n (x_i - 1.0)^2$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} x_i &= 1.0, i=1, \dots, 8; \\ x_i &= 10.0, i=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \quad x_5 = 15.0; \\ x_i &= -i, i=1, \dots, 8; \\ x_i &= 0.5, i=1, \dots, 8 \end{aligned}$$

$$f = 0, \text{ en } x_i = 0.17678, i=1, \dots, 8$$

Problema 4 - Función de Powell - Badly

$$\begin{aligned} n = 2 \quad f_1(x) &= 10.0^4 x_1 x_2 - 1.0 \\ f_2(x) &= \text{EXP}(-x_1) + \text{EXP}(-x_2) - 1.0001 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(0.0, 0.0); (0.0, 1.0); (10.0, 0.5); (-1.5, -0.5)$$

$$f = 0, \text{ en } (1.098d-5, 9.106)$$

Problema 5

$$\begin{aligned} n = 2 \quad f_1(x) &= 4.0 (x_1 + x_2) \\ f_2(x) &= 4.0 (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) ((x_1 - 2.0)^2 + x_2 - 1.0) \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(-1.0, -3.0); (2.0, 5.0); (-2.0, 3.0); (0.5, -1.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (0.0, 0.0)$$

Problema 6 - Función de Rosenbrock

$$\begin{aligned} n = 2 \quad f_1(x) &= 10.0 (x_2 - x_1^2) \\ f_2(x) &= 1.0 - x_1 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(-1.2, 1.0); (-12.0, 10.0); (0.0, 0.0); (0.5, -0.5)$$

$$f = 0, \text{ en } (1.0, 1.0)$$

Problema 7 - Función de Freudenstein y Roth

$$\begin{aligned} n = 2 \quad f_1(x) &= -13.0 + x_1 + ((5.0 - x_2) x_2 - 2.0) x_2 \\ f_2(x) &= -29.0 + x_1 + ((x_2 + 1.0) x_2 - 14.0) x_2 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(5.0, -2.0); (-3.0, -8.0); (-2.0, 5.0); (0.25, 1.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (5.0, 4.0)$$

Problema 8 - Función de Jennrich y Sampson

$$n = 2 \quad f_i(x) = 2.0 + 2.0 i - (\text{EXP}(i x_1) + \text{EXP}(i x_2))$$

Valores iniciales tomados:

$$(0.3, 0.4); (3.0, 4.0); (-0.001, -0.01); (10.0, 12.5)$$

Problema 9

$$n = 2 \quad \begin{aligned} f_1(x) &= 2.0 (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 8.0 \\ f_2(x) &= 5.0 x_1^2 + (x_2 - 3.0)^2 - 9.0 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(0.0, 0.0); (10.0, -10.0); (-2.5, 3.0); (1.5, 5.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (1.0, 1.0)$$

Problema 10

$$n = 2 \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \text{EXP}(x_1) - 1.0 \\ f_2(x) &= \text{EXP}(x_2) - 1.0 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(4.0, 3.0); (-1.0, 3.0); (2.0, -2.0); (-1.5, -3.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (0.0, 0.0)$$

Problema 11

$$n = 3 \quad \begin{aligned} f_1(x) &= x_1 \\ f_2(x) &= x_2^2 + x_2 \\ f_3(x) &= \text{EXP}(x_3) - 1.0 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(1.0, 1.0, 1.0); (10.0, 10.0, 10.0); (-5.0, 1.0, 5.0); (2.5, 0.0, -1.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (0.0, -1.0, 0.0); (0.0, 0.0, 0.0)$$

Problema 12 - Función de Powell

$$n = 4 \quad \begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + 10.0 x_2 \\ f_2(x) &= 5.0^{1/2} (x_3 - x_4) \\ f_3(x) &= (x_2 - 2.0 x_3)^2 \\ f_4(x) &= 10.0^{1/2} (x_1 - x_4)^2 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$(3.0, -1.0, 0.0, 1.0); (0.5, 1.0, 1.0, 1.0); (-1.0, 0.5, -2.0, 0.0); (2.0, 3.0, 1.0, -1.0)$$

$$f = 0, \text{ en } (0.0, 0.0, 0.0, 0.0)$$

Problema 13 - Función de Powell extendida

$$\begin{aligned} n = 12 \quad & f_{4i-3}(x) = x_{4i-3} + 10.0 \, x_{4i-2} \\ & f_{4i-2}(x) = 5.0^{1/2} (x_{4i-1} - x_{4i}) \\ & f_{4i-1}(x) = (x_{4i-2} - 2.0 \, x_{4i-1})^2 \\ & f_{4i}(x) = 10.0^{1/2} (x_{4i-3} - x_{4i})^2 \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} & (-3.0, 1.0, 3.0, 1.0, -2.0, -1.0, 0.5, -1.0, 3.0, 1.0, 0.75, 1.0); \\ & (-30.0, 10.0, 30.0, 10.0, -20.0, -10.0, 5.0, -10.0, 30.0, 10.0, 7.5, 10.0); \\ & (-6.0, 2.0, 6.0, -4.0, -2.0, 1.0, -2.0, 6.0, -2.0, 0.9, 2.0, 5.0); \\ & x(i)=i \end{aligned}$$

$$f = 0 \text{ en } x_i = 0.0, i=1, \dots, 12$$

Problema 14 - Función de Rosenbrock extendida

$$\begin{aligned} n = 16 \quad & f_{2i-1}(x) = 10.0 (x_{2i} - x_{2i-1}^2) \\ & f_{2i}(x) = 1.0 - x_{2i-1} \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} & x_i = 0.0, i=1, \dots, 16; \\ & x_i = 10.0, i=1, \dots, 16; \\ & x_i = -10.0, i=1, \dots, 16; \\ & x_i = 0.25, i=1, \dots, 16 \end{aligned}$$

$$f = 0 \text{ en } x_i = 1.0, i=1, \dots, 16;$$

Problema 15 - Función tridiagonal de Broyden

$$n = 11 \quad f_i(x) = (3.0 - 2.0 \, x_i) \, x_i - x_{i-1} - 2.0 \, x_{i+1} + 1.0, \, x_0 = x_{n+1} = 0.0$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} & x_i = 0.0, i=1, \dots, 11; \\ & x_i = -1.0, i=1, \dots, 11; \\ & x_i = -10.0, i=1, \dots, 11; \\ & x_i = 0.5, i=1, \dots, 11 \end{aligned}$$

$$f = 0, \text{ en } x_i = -1.0, i=1, \dots, 11;$$

Problema 16 - Función de Biggs

$$\begin{aligned} n = 6 \quad & f_i(x) = x_3 \, \text{EXP}(-t_i x_1) - x_4 \, \text{EXP}(-t_i x_2) + x_6 \, \text{EXP}(-t_i x_5) - y_i \\ & t_i = 0.1 \, i, \, y_i = \text{EXP}(-t_i) - 5.0 \, \text{EXP}(-10.0 \, t_i) + 3.0 \, \text{EXP}(-4.0 \, t_i) \end{aligned}$$

Valores iniciales tomados:

$$\begin{aligned} & (1.0, 0.0, 0.5, 2.0, 1.5, 0.3); (-1.0, -3.0, -2.0, -1.0, 0.0, -1.5); \\ & (10.0, 5.0, 15.0, 20.0, 7.0, 13.0); (3.0, 2.0, -2.0, -15.0, 0.5, 1.0). \end{aligned}$$

7. CONCLUSIONES

Observamos que si bien en la mayoría de los problemas estudiados los métodos de optimización convergen a la solución en menor cantidad de iteraciones, menor cantidad de evaluaciones funcionales y menor tiempo de ejecución, en algunos casos se obtuvieron mejores resultados con los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

En el problema 7, para la mayoría de los valores iniciales tomados, los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales llegan a la solución, mientras que los métodos de optimización no (ver págs. 156-170).

En el problema 4 en general se obtienen mejores resultados utilizando métodos de ecuaciones diferenciales; es decir, se llega a la solución en menor cantidad de iteraciones y con mas precisión comparando con las iteraciones que necesitan los métodos de optimización para llegar a la solución (ver págs. 108-122).

Para la función de Rosenbrock (problemas 6 y 14), tanto los métodos de optimización como los métodos de ecuaciones diferenciales convergen a la solución. Se logra mejor precisión utilizando los métodos de ecuaciones diferenciales, a pesar que el número de iteraciones es mayor; sin embargo para valores iniciales lejanos al mínimo el número de iteraciones es menor en algunos casos (ver págs. 140-154 y 268-282). Algo similar ocurre con los problemas 5, 10 y 11 en los que el número de iteraciones utilizadas por los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales para obtener la solución es bastante mayor a las utilizadas por los métodos de optimización pero la precisión obtenida es mejor (ver págs. 124-138 y 204-234).

En el problema 11 podemos observar que para valores iniciales alejados a la solución, ninguno de los métodos de optimización convergen al mínimo de la función exceptuando Newton modificado. Todos los métodos de ecuaciones diferenciales, incluyendo Adams y Milne Simpson, convergen a la solución (ver págs. 229-230).

Estudiando el comportamiento de los distintos métodos de ecuaciones diferenciales para diferentes tamaños de pasos (h) notamos que Runge Kutta para $h=1.75$ o $h=1.0$ converge a la solución en menor cantidad de iteraciones que con otros valores de h probados, mientras que Adams y Milne Simpson por lo general no llegan a la solución y de hacerlo lo logran en un número elevado de iteraciones y con h pequeños. Euler Modificado y Euler Mejorado llegan a mejores resultados con h grande; respecto al número de iteraciones que utilizan para llegar a la solución podemos decir que es mayor a las que necesita Runge Kutta pero bastante menor que Adams y Milne Simpson.

En la búsqueda de la solución utilizando métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, la mayor dificultad es que la matriz del jacobiano requerida resulte ser no inversible, en cuyo caso no se puede procesar. Esto ocurre en los problemas 8 y 16 para todos los valores iniciales sugeridos; además en dichos problemas ninguno de los métodos de optimización llegan a la solución (ver págs. 172-186 y 300-302).

En la resolución de problemas de tipo II utilizando métodos de ecuaciones diferenciales se observa que el gradiente es cero y la solución obtenida no es un mínimo de la función (ver problema 2 págs. 78 y 90). También para cualquier tipo de problema puede suceder que las rutinas de minimización converjan a un mínimo local y no global.

En lo que respecta a los tiempos de procesamiento, las rutinas de resolución de ecuaciones diferenciales programadas por nosotras no fueron optimizadas; lo que nos impide comparar los tiempos obtenidos con los distintos métodos. Además, los tiempos medidos en una PC con Fortran V y rutinas de IMSL no son fiables: un programa corrido con los mismos datos tarda tiempos distintos que pueden diferir en un 20%. En general, los tiempos de resolución de ecuaciones diferenciales fueron superiores a los de optimización.

En los casos en que no es posible hallar una solución con métodos de optimización se propone, teniendo en cuenta los resultados obtenidos, utilizar los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parametrizando el problema original.

A continuación se presentará para cada problema un cuadro resumen con todos los métodos aplicados contabilizando la convergencia o no convergencia para los valores iniciales tomados.

- Hessiano estimado
- * Gradiente estimado
- + Gradiente calculado

Problema 1 (págs. 61-74)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton - Modificado	2	2	Runge Kutta	3	1
Quasi * Newton	1	3	Euler Modificado	2	2
Quasi + Newton	1	3	Euler Mejorado	3	1
Gradiente* Conjugado	2	2	Adams Modificado	3	1
Gradiente+ Conjugado	2	2	Milne Simpson	2	2

Problema 2 - Función de Wood (págs. 77-90)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton - Modificado	4	0	Runge Kutta	3	1
Quasi * Newton	4	0	Euler Modificado	4	0
Quasi + Newton	4	0	Euler Mejorado	3	1
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	2	2
Gradiente+ Conjugado	4	0	Milne Simpson	1	3

Problema 3 - Función de Penalty (págs. 93-106)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	3	1
Quasi [*] Newton	4	0	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	4	0	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	2	2

Problema 4 - Función de Powell - Badly (págs. 109-122)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	2	2	Runge Kutta	3	1
Quasi [*] Newton	2	2	Euler Modificado	3	1
Quasi ⁺ Newton	3	1	Euler Mejorado	3	1
Gradiente* Conjugado	1	3	Adams Modificado	3	1
Gradiente ⁺ Conjugado	1	3	Milne Simpson	1	3

Problema 5 (págs. 125-138)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	4	0	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	4	0	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	0	4

Problema 6 - Función de Rosenbrock (págs. 141-154)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	4	0	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	4	0	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	4	0

Problema 7 - Función de Freudenstein y Roth (págs. 157-170)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	1	3	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	0	4	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	0	4	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	1	3	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	1	3	Milne Simpson	1	3

Problema 8 - Función de Jennrich y Sampson (págs. 173-186)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	0	4	Runge Kutta	0	4
Quasi [*] Newton	0	4	Euler Modificado	0	4
Quasi ⁺ Newton	0	4	Euler Mejorado	0	4
Gradiente* Conjugado	0	4	Adams Modificado	0	4
Gradiente ⁺ Conjugado	0	4	Milne Simpson	0	4

Problema 9 (págs. 189-202)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	3	1	Runge Kutta	2	2
Quasi [*] Newton	4	0	Euler Modificado	2	2
Quasi ⁺ Newton	3	1	Euler Mejorado	2	2
Gradiente* Conjugado	3	1	Adams Modificado	3	1
Gradiente ⁺ Conjugado	3	1	Milne Simpson	2	2

Problema 10 (págs. 205-218)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	1	3	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	1	3	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	3	1
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	4	0

Problema 11 (págs. 221-234)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	2	2	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	2	2	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	3	1	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	3	1	Milne Simpson	4	0

Problema 12 - Función de Powell (págs. 237-250)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	4	0	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	4	0	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	4	0

Problema 13 - Función de Powel extendida (págs. 253-266)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	0	4	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	0	4	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	2	2	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	3	1	Milne Simpson	4	0

Problema 14 - Función de Rosenbrock extendida (págs. 269-282)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	4	0	Runge Kutta	4	0
Quasi [*] Newton	2	2	Euler Modificado	4	0
Quasi ⁺ Newton	2	2	Euler Mejorado	4	0
Gradiente* Conjugado	4	0	Adams Modificado	4	0
Gradiente ⁺ Conjugado	4	0	Milne Simpson	4	0

Problema 15 - Función tridiagonal de Broyden (págs. 285-298)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	0	4	Runge Kutta	2	2
Quasi * Newton	2	2	Euler Modificado	2	2
Quasi ⁺ Newton	0	4	Euler Mejorado	3	1
Gradiente* Conjugado	1	3	Adams Modificado	2	2
Gradiente ⁺ Conjugado	0	4	Milne Simpson	2	2

Problema 16 - Función de Biggs (págs. 301-302)

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	0	4	Runge Kutta	0	4
Quasi * Newton	0	4	Euler Modificado	0	4
Quasi ⁺ Newton	0	4	Euler Mejorado	0	4
Gradiente* Conjugado	0	4	Adams Modificado	0	4
Gradiente ⁺ Conjugado	0	4	Milne Simpson	0	4

Cuadro Resumen

Método	Converge	No converge	Método	Converge	No converge
Newton ⁻ Modificado	44	20	Runge Kutta	48	16
Quasi * Newton	34	30	Euler Modificado	49	15
Quasi ⁺ Newton	32	32	Euler Mejorado	50	14
Gradiente* Conjugado	32	32	Adams Modificado	48	16
Gradiente ⁺ Conjugado	32	32	Milne Simpson	35	29

De la observación de las tablas surge como posibilidad de trabajo, el implementar métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, si se encuentran problemas en la resolución de ecuaciones no lineales, por métodos específicos (que aquí no se han realizado) o por métodos de optimización.

8. BIBLIOGRAFIA

- [BRA/71] F. H. Branin, Jr., "Widely Convergent Method for Finding Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations", Conference on Numerical Methods for Nonlinear Optimization, University of Dundee, Scotland, 1971.
- [DAH/74] G. Dahlquist - Bjorck, Numerical Methods, Prentice Hall, 1974.
- [DEN/83] J. E. Dennis Jr. - R. B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice Hall, 1983.
- [FLE/87] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization, John Wiley & Sons. Capítulos 1-5 (págs. 3 - 109), 1987.
- [IMS/84] IMSL MATH/LIBRARY, User's Manual, edition 9.2, Capítulo 8, revised November 1984.
- [ISA/66] Isaacson - Keller, Analysis of Numerical Methods, John Wiley, 1966.
- [LUE/89] D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison - Wesley, 1989, Iberoamericana.
- [MOR/78] Jorge J. Moré, Burton S. Garbow, Kenneth E. Hillstom, "Testing Unconstrained Optimization Software", Applied Mathematics Division, Technical Memorandum No. 324, 1978.

9. APENDICE

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	22	.1594171027571D+01 .2541381265149D+01	-.2454432490584D-11 .4463096558993D-12	.6223431159783D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	40	.1594171027571D+01 .2541381265149D+01	-.5574362152427D-11 .2180478020364D-11	.3582799780370D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	39	.1594171027571D+01 .2541381265148D+01	-.8368698095618D-11 .2386979502944D-11	.7573277896307D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	49	.1594171027569D+01 .2541381265146D+01	-.2194987247517D-10 .4933387032224D-11	.5061352092859D-21
MILNE SIMPSON h = 0.5	89	.1594171027572D+01 .2541381265149D+01	.8210637031381D-12 -.5195843755246D-12	.9441135279000D-24

PROBLEMA N° 1 Valores Iniciales $X(1) = 10.0000$
 $X(2) = 7.5000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	24	.1594171027572D+01 .2541381265149D+01	.2829202150334D-11 -.1387778780781D-11	.9930314751842D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	.1594171027573D+01 .2541381265150D+01	.6061645976829D-11 -.2961630940490D-11	.4551480977608D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	.1594171027572D+01 .2541381265149D+01	.3654096990269D-11 -.1804778548831D-11	.1660965042461D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	58	.1594171027574D+01 .2541381265150D+01	.9628384027571D-11 -.6117772954894D-11	.1301329249100D-21
MILNE SIMPSON h = 0.5	81	.1594171027572D+01 .2541381265149D+01	-.8413495594661D-13 -.1616040634644D-11	.2618666023634D-23

PROBLEMA 1

PROBLEMA 1


```
PROBLEMA N° 1      Valores Iniciales  X(1) =  0.5000
                                         X(2) = -0.5000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MODIF O CAUCHY	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MEJOR. O HEUN	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
ADAMS MODIF.	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
MILNE SIMPSON	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			

2000.1 = 1111 22/2/2001 11/11/2001
 2000.2 = 1111
 2000.3 = 1111
 2000.4 = 1111

2000.1 = 1111

CONCEPTO	CANTIDAD	VALOR	FECHA
1. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
2. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
3. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
4. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
5. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
6. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
7. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
8. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
9. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001
10. 0000.1111.1111	10.000000000000000000	10.000000000000000000	11/11/2001

PROBLEMA 2

```
PROBLEMA N° 2:
```

	Valores Iniciales	X(1) = -2.0000
		X(2) = 1.0000
		X(3) = 0.0000
		X(4) = 0.0000

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	27	.999999999972D+00 .999999999944D+00 .100000000003D+01 .100000000006D+01	.2912159352820D-22
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	38	.100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01	.5149462122153D-27
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	37	.100000000001D+01 .100000000003D+01 .99999999992D+00 .999999999983D+00	.6043604478234D-22
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	61	.1000000000989D+01 .1000000002437D+01 .999999997300D+00 .1000000003196D+01	.1595877707413D-14
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	59	.9999996180132D+00 .9999992930303D+00 .1000000310678D+01 .1000000643067D+01	.8328937274580D-12

2000.0 = 1000
 2000.0 = 1000
 2000.0 = 1000
 2000.0 = 1000

2000.0 = 1000

ANEXO	CONTENIDO	FECHA	REVISIÓN
1. INTRODUCCIÓN	1.1. OBJETIVO	1.2. ALCANCE	1.3. DEFINICIONES
2. MARCO TEÓRICO	2.1. CONCEPTOS BÁSICOS	2.2. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN	2.3. MARCO LEGAL
3. METODOLOGÍA	3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	3.2. RECOLECCIÓN DE DATOS	3.3. ANÁLISIS DE DATOS
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	4.1. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	4.2. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	4.3. CONCLUSIONES
5. BIBLIOGRAFÍA	5.1. FUENTES DE INFORMACIÓN	5.2. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	5.3. ANEXOS

TESIS DE LICENCIATURA

```
PROBLEMA N° 2:      Valores Iniciales    X(1) =  2.0000
                                         X(2) =  0.0000
                                         X(3) =  2.0000
                                         X(4) =  1.0000
```

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	10	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .999999999999D+00 .999999999998D+00	.2651643890000D-25
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	88	.999999999998D+00 .999999999996D+00 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.3056590339189D-24
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	87	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.4775448252586D-25
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	33	.1000000214459D+01 .1000000429232D+01 .9999997814171D+00 .9999995629820D+00	.1694282108143D-12
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	33	.1000000214500D+01 .1000000429310D+01 .9999997813819D+00 .9999995629103D+00	.1694857553212D-12

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	$g(x)$	F(MINIMO)
RUNGE KUTTA Orden 4 $h = 1.5$	24	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.7103295729394D-10 -.2927891262772D-10 .9210232576606D-10 -.4011135867898D-10	.9938106692644D-23
EULER MODIF O CAUCHY $h = 1.0$	45	.1000000000000D+01 .1000000000001D+01 .999999999998D+00 .999999999995D+00	.4002398412695D-10 -.1805619889717D-10 .2766675777366D-10 -.1286706505232D-10	.1845132395821D-23
EULER MEJOR. O HEUN $h = 1.0$	43	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .999999999998D+00	.1795523729697D-09 -.8435263598727D-10 .1112203662501D-09 -.5076283837724D-10	.2934371404854D-22
ADAMS MODIF. $h = 0.75$	56	.1000000000001D+01 .1000000000002D+01 .999999999990D+00 .999999999982D+00	-.1514033343142D-09 .9021899199935D-10 -.7557132697400D-10 .4853756979672D-10	.2640891495720D-22
MILNE SIMPSON $h = 0.5$	99	.999999999999D+00 .999999999998D+00 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01	-.2372946283913D-10 .1284019765513D-10 .1921129921811D-11 .4211943294141D-12	.4282491427171D-24

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(x)	F(MINIMO)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.0	34	.999999999997D+00 .999999999994D+00 .100000000000D+01 .1000000000001D+01	.3086420008458D-12 -.7138283020236D-12 .3626432487636D-11 -.1323649523322D-11	.3126402002481D-24
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	47	.999999999997D+00 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .100000000000D+01	-.9989342686367D-11 .3942509513299D-11 -.5644373857194D-12 .1262288884529D-12	.2885672974451D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	.999999999998D+00 .999999999996D+00 .100000000000D+01 .100000000000D+01	.4252687091366D-10 -.2553577141406D-10 .6051559253706D-10 -.3389579936175D-10	.4162583942186D-23
ADAMS MODIF. h = 0.5	63	.999999999995D+00 .999999999989D+00 .1000000000001D+01 .1000000000001D+01	.3739009102333D-11 -.2823206946001D-11 .8764988734811D-11 -.3406469550882D-11	.1089822589226D-23
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.7128997446045D+09 .1164274386242D+19 .1676706939797D+10 .1785865083854D+19	.1870786777235D+30 .1900881393394D+21 .6189952465069D+30 -.1254594865183D+21	.2247568386624D+39

ANEXO 1. RESULTADOS DE LA ENCUESTA DE OPINIONES DE LOS ALUMNOS			
OPINION	SI	NO	TOTAL
1. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
2. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
3. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
4. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
5. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
6. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
7. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
8. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
9. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
10. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
11. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
12. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
13. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
14. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
15. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
16. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
17. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
18. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
19. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15
20. ¿Crees que el uso de la computadora es necesario para el aprendizaje?	10	5	15

PROBLEMA 2

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(x)	F(MINIMO)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	48	-.9679740249374D+00 .9471391408175D+00 -.9695163103318D+00 .9512476657927D+00	.8371997539669D-11 .4551733989722D-11 .8186507027830D-11 .4342692871973D-11	.7876967165177D+01
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	73	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .9999999999998D+00 .9999999999996D+00	.2259614717559D-10 -.1099511454106D-10 .8547607066589D-11 -.4755834615011D-11	.5335199742762D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 0.5	51	-.9679740249372D+00 .9471391408171D+00 -.9695163103320D+00 .9512476657930D+00	.1295485940744D-10 .6956366038757D-11 .6831146759367D-11 .3563465494905D-11	.7876967165177D+01
ADAMS MODIF. h = 0.75	75	-.9679740249385D+00 .9471391408197D+00 -.9695163103306D+00 .9512476657904D+00	.1423977602499D-10 .7068109986186D-11 .1214622846746D-10 .6545011060899D-11	.7876967165177D+01
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	.6776638183171D+05 -.4249811939239D+10 .6977926237565D+05 .4650730972372D+10	.2396786993626D+18 -.1762180617120D+13 .5486688604100D+16 -.2951611815231D+11	.7832086185827D+22

PROBLEMA N.º 1
 0000.0 = 1.0000
 0000.1 = 1.0000
 0000.2 = 1.0000
 0000.3 = 1.0000

METODOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

METODOS	ITERACION	RESOLUCION ESTIMADA Y	ERROR	ITERACIONES
METHUEN	1	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
METHUEN	2	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
METHUEN	3	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
METHUEN	4	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
METHUEN	5	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
		0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000

PROBLEMA 3

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 1.0000$ $i = 1,8$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	9	.1767849392674D+00 .1767849410345D+00 .1767849423903D+00 .1767849409865D+00 .1767849422347D+00 .1767849422357D+00 .1767849407435D+00 .1767849392383D+00	.5421518662752D-04
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	12	-.1767649265461D+00 -.1767649265461D+00 -.1767649265466D+00 -.1767649266746D+00 -.1767649266752D+00 -.1767649275709D+00 -.1767649263872D+00 -.1767649248301D+00	.1107831633421D-03
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	11	-.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00 -.1767649274432D+00	.1107831633421D-03
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	4	.1767858257488D+00 .1767858257488D+00 .1767858257488D+00 .1767858257488D+00 .1767858257722D+00 .1767858257722D+00 .1767858257722D+00 .1767858260340D+00	.5421519309139D-04
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	4	.1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00 .1767858257934D+00	.5421519309139D-04

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 1.0000$ $i = 1,8$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(X)	F(x)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	.1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00	.8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12 .8530568175546D-12	.5421518662592D-04
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	42	.1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00	.9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12 .9324724346423D-12	.5421518662592D-04
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	42	.1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00 .1767849268730D+00	.1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11 .1160630394349D-11	.5421518662592D-04
ADAMS MODIF. h = 0.5	58	.1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00 .1767849268735D+00	.2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11 .2134894723518D-11	.5421518662592D-04
MILNE SIMPSON h = 0.5	73	.1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00	-.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12 -.3077929859622D-12	.5421518662592D-04

PROBLEMA 3

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 10.0000$ $i = 1,8; i < 5$
 $X(5) = 15.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	27	.1767849241458D+00 .1767849241458D+00 .1767849241458D+00 .1767849241458D+00 .1767849491161D+00 .1767849241459D+00 .1767849241458D+00 .1767849241458D+00	.5421518662592D-04
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	100	-.1398149172206D+00 -.1397240397340D+00 .1792552526378D+00 -.1398150949313D+00 -.2508468882890D+00 .1793058482387D+00 .1813511968467D+00 .1792659325670D+00	.8225317286671D-04
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	100	.8195464079815D-01 .8195464989834D-01 .8195463975182D-01 .8195465111576D-01 -.4504991971181D+00 .8195464860859D-01 .8195466117105D-01 .8195464901169D-01	.8003717970620D-04
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	18	.1767872925556D+00 .1767872925556D+00 .1767872925556D+00 .1767872925509D+00 .1767695394922D+00 .1767872925907D+00 .1767872925907D+00 .1767872925208D+00	.5421518681360D-04
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	18	.1767872925528D+00 .1767872925528D+00 .1767872925528D+00 .1767872925528D+00 .1767695395412D+00 .1767872925528D+00 .1767872925528D+00 .1767872925528D+00	.5421518681359D-04

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 10.0000$ $i = 1,8; i < 5$
 $X(5) = 15.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(X)	F(x)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	38	.1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268728D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00	.5982897116306D-15 .5982897116306D-15 .5982897116306D-15 .5982897116306D-15 .6517425893436D-15 .5982897116306D-15 .5982897116306D-15 .5982897116306D-15 .5982897116306D-15	.5421518662592D-04
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	62	.1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268731D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00 .1767849268723D+00	.2988876577350D-14 .2988876577350D-14 .2988876577350D-14 .2988876577350D-14 .3074744075848D-14 .2988876577350D-14 .2988876577350D-14 .2988876577350D-14	.5421518662592D-04
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	57	.1767849268724D+00 .1767849268724D+00 .1767849268724D+00 .1767849268724D+00 .1767849268728D+00 .1767849268724D+00 .1767849268724D+00 .1767849268724D+00	.1465224497203D-13 .1465224497203D-13 .1465224497203D-13 .1465224497203D-13 .1470428797498D-13 .1465224497203D-13 .1465224497203D-13 .1465224497203D-13	.5421518662592D-04
ADAMS MODIF. h = 0.5	140	.1767849268722D+00 .1767849268722D+00 .1767849268722D+00 .1767849268722D+00 .1767849268737D+00 .1767849268722D+00 .1767849268722D+00 .1767849268722D+00	.2704171939220D-14 .2704171939220D-14 .2704171939220D-14 .2704171939220D-14 .2869331695725D-14 .2704171939220D-14 .2704171939220D-14 .2704171939220D-14	.5421518662592D-04
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	.5774940011456D-03 .5774940011103D-03 .5774940011721D-03 .5774940011585D-03 - .4038392104209D-02 .5774940011443D-03 .5774940011422D-03 .5774940011146D-03	- .5974393861380D-03 - .5974393861027D-03 - .5974393861645D-03 - .5974393861509D-03 - .4018010183678D-02 - .5974393861367D-03 - .5974393861346D-03 - .5974393861070D-03	.6257067889966D-01

PROBLEMA 3

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = -i$ $i = 1,8$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	100	.1975419114280D+00 .1914605613608D+00 .1853792486026D+00 .1792979823028D+00 .1732167875983D+00 .1671356594550D+00 .1610545826775D+00 .1549735372143D+00	.5430722358113D-04
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	87	.1767849001472D+00 .1767849407226D+00 .1767849177149D+00 .1767849365177D+00 .1767849712844D+00 .1767849120570D+00 .1767849396249D+00 .1767848969115D+00	.5421518662592D-04
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	56	.1767849263445D+00 .1767849269512D+00 .1767849260456D+00 .1767849267436D+00 .1767849262635D+00 .1767849276137D+00 .1767849274828D+00 .1767849274925D+00	.5421518662592D-04
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	87	.1768318800610D+00 .1768191852964D+00 .1768064905200D+00 .1767937957247D+00 .1767811009872D+00 .1767684062168D+00 .1767557113885D+00 .1767430166435D+00	.5421523797671D-04
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	89	.1765244185887D+00 .1765987088520D+00 .1766729991153D+00 .1767472893786D+00 .1768215796419D+00 .1768958699052D+00 .1769701601684D+00 .1770444504317D+00	.5421520108562D-04

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = -i$ $i = 1,8$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(X)	F(x)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.0	51	.2957045852164D+00 .2535337496157D+00 .2113629140150D+00 .1691920784138D+00 .1270212428132D+00 .8485040721139D-01 .4267957161142D-01 .5087360102068D-03	.1947963877321D-03 .1641639809060D-03 .1335315740800D-03 .1028991672536D-03 .7226676042768D-04 .4163435360080D-04 .1100194677529D-04 -.1963046005113D-04	.5883588681080D-04
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.75	137	.1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00 .1767849268738D+00	.2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11 .2841352170356D-11	.5421518662592D-04
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	78	.1767849268728D+00 .1767849268727D+00 .1767849268726D+00 .1767849268725D+00 .1767849268724D+00 .1767849268723D+00 .1767849268721D+00 .1767849268720D+00	.2412402223761D-13 .2411152174357D-13 .2409902438951D-13 .2408652389547D-13 .2407402654141D-13 .2406152604737D-13 .2404902555334D-13 .2403652819928D-13	.5421518662592D-04
ADAMS MODIF. h = 0.5	201	-.1767649172541D+00 -.1767649198916D+00 -.1767649225290D+00 -.1767649251664D+00 -.1767649278038D+00 -.1767649304412D+00 -.1767649330786D+00 -.1767649357160D+00	-.2690614275278D-10 -.2660773462389D-10 -.2630932649500D-10 -.2601091836924D-10 -.2571251024035D-10 -.2541410211146D-10 -.2511569398571D-10 -.2481728585682D-10	.1107831633421D-03
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.4364814125895D-01 -.7668927604623D-01 -.1097304108335D+00 -.1427715456207D+00 -.1758126804080D+00 -.2088538151952D+00 -.2418949499825D+00 -.2749360847697D+00	.1809709096394D-03 .3331035485603D-03 .4852361874811D-03 .6373688264018D-03 .7895014653228D-03 .9416341042436D-03 .1093766743164D-02 .1245899382085D-02	.1093117101144D-03

PROBLEMA 3

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 0.5000$ $i = 1,8$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	7	.1767850674502D+00 .1767850683142D+00 .1767850683140D+00 .1767850683189D+00 .1767850674555D+00 .1767850657532D+00 .1767850657532D+00 .1767850673823D+00	.5421518678380D-04
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	8	.1767849256666D+00 .1767849256666D+00 .1767849256667D+00 .1767849256663D+00 .1767849256739D+00 .1767849256729D+00 .1767849256729D+00 .1767849256139D+00	.5421518662593D-04
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	8	.1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00 .1767849256625D+00	.5421518662593D-04
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	3	.1790612434003D+00 .1790612434003D+00 .1790612434003D+00 .1790612434003D+00 .1790612433632D+00 .1790612433632D+00 .1790612433632D+00 .1790612433632D+00	.9620985080924D-04
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	3	.1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00 .1790612433821D+00	.9620985082260D-04

PROBLEMA N° 3 Valores Iniciales $X(i) = 0.5000$ $i = 1,8$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	g(X)	F(x)
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	22	.1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00 .1767849268727D+00	.6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12 .6206199117471D-12	.5421518662592D-04
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	40	.1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00 .1767849268728D+00	.7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12 .7902073861013D-12	.5421518662592D-04
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	40	.1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00 .1767849268729D+00	.9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12 .9795800644886D-12	.5421518662592D-04
ADAMS MODIF. h = 0.5	53	.1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00 .1767849268739D+00	.2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11 .2951191462959D-11	.5421518662592D-04
MILNE SIMPSON h = 0.5	57	.1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00 .1767849268732D+00	.1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11 .1530739350643D-11	.5421518662592D-04

PROBLEMA 4

PROBLEMA N° 4 Valores Iniciales X(1) = -1.5000
X(2) = -0.5000

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	31	.9199364577557D+01 .1087031601129D-05	.6107502696943D-09 -.4979740578226D-15	.3730158919319D-18
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	49	.9199364577552D+01 .1087031595771D-05	-.4318291552737D-08 .5371462823145D-14	.1864764193447D-16
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	52	.9199364577554D+01 .1087031596559D-05	-.3593015553919D-08 .4295934268039D-14	.1290976077072D-16
ADAMS MODIF. h = 0.5	71	.1087031600458D-05 .9199364577549D+01	-.6914714352317D-11 .9565915767840D-15	.4781327548921D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.2550334224996D+02 .5627062772259D+00	-.1435090077429D+07 .1191134515143D+12	.1418801433370D+23

PROBLEMA 4

PROBLEMA N° 4 Valores Iniciales X(1) = 10.0000
X(2) = 0.5000

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	42	.9199364577557D+01 .1087031600477D-05	.1145841028397D-10 .1572093150104D-15	.1312951662606D-21
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.75	108	.1087029928081D-05 .9199364577566D+01	-.1538485682288D-05 .1671601659176D-11	.2366938194609D-11
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	45	.9199364577554D+01 .1087031614044D-05	.1249204876943D-07 -.1317956160873D-13	.1560512824580D-15
ADAMS MODIF. h = 1.0	135	.9199364577583D+01 .1087031646889D-05	.4271012816516D-07 -.4890608317626D-13	.1824155047887D-14
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.3961344193266D+02 -.4502112768507D-06	.7834418272954D+00 .1599186962662D+18	.2557398941549D+35

PROBLEMA 4


```
PROBLEMA N° 4      Valores Iniciales  X(1) =  0.0000
                                         X(2) =  1.0000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	25	.1087031600464D-05 .9199364577555D+01	-.5506404793937D-12 .3584372382237D-15	.3032050660242D-24
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	45	.1087031600465D-05 .9199364577553D+01	-.3783638441619D-12 .5087076593302D-15	.1431594573525D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	45	.1087031600465D-05 .9199364577552D+01	-.6395529722134D-13 .6510634045775D-15	.4090703926226D-26
ADAMS MODIF. h = 0.5	64	.1087031600466D-05 .9199364577546D+01	-.1119167692548D-13 .1261577647904D-14	.1268452105660D-27
MILNE SIMPSON h = 0.5	67	.1087031597869D-05 .9199364577559D+01	-.2387485235607D-08 .2577040143781D-14	.5700085750247D-17

PROBLEMA 4


```
PROBLEMA N° 4      Valores Iniciales  X(1) =  0.0000
                                         X(2) =  0.0000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MODIF O CAUCHY	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MEJOR. O HEUN	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
ADAMS MODIF.	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
MILNE SIMPSON	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			

PROBLEMA 5

PROBLEMA 5

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	24	-.2824789135993D-12 .3129995646030D-12	.1220826040149D-12 -.1664352830593D-11	.2784974506905D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	-.4063678400493D-12 .5200546777709D-12	.4547473508865D-12 -.2324520202575D-11	.5610189325320D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	43	-.5267337545530D-12 .6404205922746D-12	.4547473508865D-12 -.3046715689599D-11	.9489271646386D-23
ADAMS MODIF. h = 0.75	50	-.1443962172148D-12 .6888471520239D-12	.2177803739236D-11 -.3219263684803D-12	.4846465713355D-23
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1728078825738D+03 .1728078620737D+03	-.8200046920592D-04 -.2088187967983D+08	.4360528989629D+15

TESIS DE LICENCIATURA

PÁG. 1 - 111
 PÁG. 2 - 112

PÁG. 3 - 113
 PÁG. 4 - 114

FECHA	FECHA	FECHA	FECHA	FECHA
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011
11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011	11-03-2011

PROBLEMA 5

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	24	-.1561127443223D-12 .3697573013483D-12	.8545782281041D-12 -.7230319089082D-12	.1253079089249D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	.1885453870640D-12 .6072624769873D-12	.3183231456205D-11 .1927080186436D-11	.1384660054873D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	-.4118271075425D-13 .4390866427799D-12	.1591615728103D-11 .1508076675001D-12	.2555983578520D-23
ADAMS MODIF. h = 0.75	54	.2732534526070D-12 .4318137834134D-12	.2820268944082D-11 .2344587951662D-11	.1345100958003D-22
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1728078825738D+03 .1728078620737D+03	-.8200046920592D-04 -.2088187967983D+08	.4360528989629D+15

PROBLEMA 5

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	27	-.2515860412099D-12 .2490901364557D-12	-.9983619016910D-14 -.1512012152014D-11	.2286280420487D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	.7605934976820D-13 -.5308067006547D-12	-.1818989403546D-11 .1608747722531D-14	.3308725038281D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	42	-.5446368699475D-12 -.3648578318254D-12	-.3637978807092D-11 -.4177315921458D-11	.3068485810852D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	55	.3344142800353D-12 -.1445684565522D-11	-.4445081141947D-11 .8952153947223D-12	.2056015696144D-22
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1728078825738D+03 .1728078620737D+03	-.8200046920592D-04 -.2088187967983D+08	.4360528989629D+15

TESIS DE LICENCIATURA

8000.0 - 1977 8000.0 - 1977 8000.0 - 1977

ENCUENTRO DE LOS ALUMNOS DE LA ESCUELA

FECHA	ALUMNO	ALUMNO	ALUMNO	ALUMNO
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977
11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977	11-01-1977

PROBLEMA 6

PROBLEM 8

```
PROBLEMA N° 6      Valores Iniciales  X(1) =  0.0000
                                         X(2) =  0.0000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	.999999999998D+00 .999999999998D+00	.1796340853844D-11 .1745270594711D-12	.3257300157675D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	41	.999999999995D+00 .100000000000D+01	.9094947017729D-11 .4547473508865D-12	.8292485640844D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	41	.999999999995D+00 .999999999995D+00	.4547473508865D-11 .4547473508865D-12	.2088631046696D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	54	.999999999995D+00 .999999999990D+00	-.1124655923945D-11 .4615197113367D-12	.1477851391218D-23
MILNE SIMPSON h = 0.5	90	.100000000000D+01 .100000000000D+01	.1443289932013D-12 .2664535259100D-14	.2083795802664D-25

PROBLEMA N° 6 Valores Iniciales $X(1) = -12.0000$
 $X(2) = 10.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	47	.9999999930878D+00 .9999999860814D+00	-.9415872861138D-09 .6912219685518D-08	.4866536759823D-16
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	64	.1000000000091D+01 .1000000000194D+01	.1171884811413D-09 -.9129363931493D-10	.2206766869156D-19
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	71	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	-.9992007221626D-14 .6439293542826D-14	.1413047096477D-27
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	35	.9999999634659D+00 .9999999386228D+00	.1169103535953D-06 .3653411995153D-07	.1500277269842D-13
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	35	.9999999636938D+00 .9999999390845D+00	.1169685949514D-06 .3630618394812D-07	.1499979119778D-13

PROBLEMA N° 6 Valores Iniciales $X(1) = -12.0000$
 $X(2) = 10.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	25	.999999999998D+00 .100000000000D+01	.5428990590417D-11 .1764144386129D-12	.2950506088499D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	48	.100000000000D+01 .100000000001D+01	.7247535904753D-11 .4618527782441D-13	.5252890977057D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	45	.999999999996D+00 .100000000000D+01	.9947598300641D-11 .3694822225953D-12	.9909122906374D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	63	.999999999999D+00 .999999999990D+00	-.8379963389871D-11 .6217248937901D-13	.7022765183401D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	114	.100000000000D+01 .100000000000D+01	.2378097718747D-11 .1443289932013D-14	.5655350842996D-23

FECHA	ACTA	EXAMENES	NOTAS
19-01-2011	1-01-2011-01	10-01-2011-01	10-01-2011-01
19-01-2011	1-01-2011-02	10-01-2011-02	10-01-2011-02
19-01-2011	1-01-2011-03	10-01-2011-03	10-01-2011-03
19-01-2011	1-01-2011-04	10-01-2011-04	10-01-2011-04
19-01-2011	1-01-2011-05	10-01-2011-05	10-01-2011-05
19-01-2011	1-01-2011-06	10-01-2011-06	10-01-2011-06
19-01-2011	1-01-2011-07	10-01-2011-07	10-01-2011-07
19-01-2011	1-01-2011-08	10-01-2011-08	10-01-2011-08
19-01-2011	1-01-2011-09	10-01-2011-09	10-01-2011-09
19-01-2011	1-01-2011-10	10-01-2011-10	10-01-2011-10
19-01-2011	1-01-2011-11	10-01-2011-11	10-01-2011-11
19-01-2011	1-01-2011-12	10-01-2011-12	10-01-2011-12
19-01-2011	1-01-2011-13	10-01-2011-13	10-01-2011-13
19-01-2011	1-01-2011-14	10-01-2011-14	10-01-2011-14
19-01-2011	1-01-2011-15	10-01-2011-15	10-01-2011-15
19-01-2011	1-01-2011-16	10-01-2011-16	10-01-2011-16
19-01-2011	1-01-2011-17	10-01-2011-17	10-01-2011-17
19-01-2011	1-01-2011-18	10-01-2011-18	10-01-2011-18
19-01-2011	1-01-2011-19	10-01-2011-19	10-01-2011-19
19-01-2011	1-01-2011-20	10-01-2011-20	10-01-2011-20
19-01-2011	1-01-2011-21	10-01-2011-21	10-01-2011-21
19-01-2011	1-01-2011-22	10-01-2011-22	10-01-2011-22
19-01-2011	1-01-2011-23	10-01-2011-23	10-01-2011-23
19-01-2011	1-01-2011-24	10-01-2011-24	10-01-2011-24
19-01-2011	1-01-2011-25	10-01-2011-25	10-01-2011-25
19-01-2011	1-01-2011-26	10-01-2011-26	10-01-2011-26
19-01-2011	1-01-2011-27	10-01-2011-27	10-01-2011-27
19-01-2011	1-01-2011-28	10-01-2011-28	10-01-2011-28
19-01-2011	1-01-2011-29	10-01-2011-29	10-01-2011-29
19-01-2011	1-01-2011-30	10-01-2011-30	10-01-2011-30

FECHA	ENCUESTA	ENCUESTA	ENCUESTA	ENCUESTA
19	ENCUESTA 19	ENCUESTA 19	ENCUESTA 19	ENCUESTA 19
20	ENCUESTA 20	ENCUESTA 20	ENCUESTA 20	ENCUESTA 20
21	ENCUESTA 21	ENCUESTA 21	ENCUESTA 21	ENCUESTA 21
22	ENCUESTA 22	ENCUESTA 22	ENCUESTA 22	ENCUESTA 22
23	ENCUESTA 23	ENCUESTA 23	ENCUESTA 23	ENCUESTA 23
24	ENCUESTA 24	ENCUESTA 24	ENCUESTA 24	ENCUESTA 24

PROBLEMA N° 6	Valores Iniciales	$X(1) = -1.2000$
		$X(2) = 1.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	.999999999996D+00 .100000000000D+01	.793365373397D-11 .3841371665203D-12	.6309042293326D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	.999999999997D+00 .100000000000D+01	.1050715070505D-10 .2501332474480D-12	.1104627825802D-21
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	42	.999999999995D+00 .100000000000D+01	.1000532989792D-10 .5002664948961D-12	.1003568929322D-21
ADAMS MODIF. h = 0.5	56	.999999999996D+00 .999999999990D+00	-.2705613511012D-11 .3678168880583D-12	.7455633734109D-23
MILNE SIMPSON h = 0.5	101	.100000000000D+01 .100000000000D+01	.1909583602355D-11 .6661338147751D-14	.3646553907810D-23

ANEXO 1: LISTA DE MATERIAS CURRICULARES
ANEXO 2: LISTA DE MATERIAS CURRICULARES

ANEXO 3: LISTA DE MATERIAS CURRICULARES

ORDEN	NOMBRE DE LA MATERIA	SEMESTRE	CRÉDITOS	REQUISITOS
1	INTRODUCCIÓN A LA PSICOLOGÍA	1	3	
2	PSICOLOGÍA GENERAL	2	3	1
3	PSICOLOGÍA DEL DESARROLLO	3	3	2
4	PSICOLOGÍA SOCIAL	4	3	3
5	PSICOLOGÍA CLÍNICA	5	3	4
6	PSICOLOGÍA DE LA EDUCACIÓN	6	3	5
7	PSICOLOGÍA DE LA SALUD	7	3	6
8	PSICOLOGÍA DE LA VIOLENCIA	8	3	7
9	PSICOLOGÍA DE LA DEFENSA	9	3	8
10	PSICOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	10	3	9

PROBLEMA 6

PROBLEMA N° 6 Valores Iniciales X(1) = 0.5000
X(2) = -0.5000

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	12	.9999999673728D+00 .9999999262249D+00	-.8520696324996D-07 .3262720738029D-07	.8324761247716D-14
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	43	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.6106226635438D-13 .8770761894539D-14	.3805526636544D-26
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	44	.1000000000000D+01 .1000000000001D+01	.1754152378908D-12 -.4569677969357D-12	.2395900731206D-24
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	15	.9999998133575D+00 .9999996021586D+00	-.2455642187033D-06 .1866425241026D-06	.9513721731075D-13
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	15	.9999998134662D+00 .9999996023648D+00	-.2456770036344D-06 .1865337792006D-06	.9515204089766D-13

```
PROBLEMA N° 6      Valores Iniciales  X(1) =  0.5000
                                         X(2) = -0.5000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	.999999999999D+00 .999999999997D+00	-.8582023980352D-12 .8737455203800D-13	.7441456683373D-24
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	41	.999999999998D+00 .999999999994D+00	-.1136868377216D-11 .2273736754432D-12	.1344168495399D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	41	.999999999998D+00 .999999999993D+00	-.2273736754432D-11 .2273736754432D-12	.5221577616741D-23
ADAMS MODIF. h = 0.5	53	.999999999996D+00 .999999999986D+00	-.6217248937901D-11 .3834710327055D-12	.3880123438875D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	87	.1000000000000D+01 .999999999998D+00	-.3710365348297D-11 -.7305267502034D-13	.1377214771117D-22

Página Nro.: 156

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.0	39	.4999999999998D+01 .4000000000000D+01	-.2938094212368D-11 .3065991904805D-11	-.2938094212368D-11
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	57	.4999999999998D+01 .4000000000000D+01	-.3162803352552D-11 .2517985819850D-11	-.3162803352552D-11
EULER MEJOR. O HEUN h = 0.5	67	.5000000000004D+01 .4000000000000D+01	.4433786671143D-11 .3371525281182D-11	.4433786671143D-11
ADAMS MODIF. h = 0.75	83	.5000000000003D+01 .4000000000000D+01	.2502886786715D-11 .2826183731486D-11	.2502886786715D-11
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1289383203232D+06 .2204755458433D+03	-.1060354355877D+08 .1063375410728D+08	-.1060354355877D+08

Página Nro.: 159

ANEXO 1 - 1991
ANEXO 2 - 1992

ANEXO 3 - 1993

ANEXO	FECHA	CONTENIDO	FECHA	FECHA
ANEXO 1 - 1991	1. 1991-01-01	1991-01-01	1991-01-01	1991-01-01
ANEXO 2 - 1992	2. 1992-01-01	1992-01-01	1992-01-01	1992-01-01
ANEXO 3 - 1993	3. 1993-01-01	1993-01-01	1993-01-01	1993-01-01
ANEXO 4 - 1994	4. 1994-01-01	1994-01-01	1994-01-01	1994-01-01
ANEXO 5 - 1995	5. 1995-01-01	1995-01-01	1995-01-01	1995-01-01
ANEXO 6 - 1996	6. 1996-01-01	1996-01-01	1996-01-01	1996-01-01
ANEXO 7 - 1997	7. 1997-01-01	1997-01-01	1997-01-01	1997-01-01
ANEXO 8 - 1998	8. 1998-01-01	1998-01-01	1998-01-01	1998-01-01
ANEXO 9 - 1999	9. 1999-01-01	1999-01-01	1999-01-01	1999-01-01
ANEXO 10 - 2000	10. 2000-01-01	2000-01-01	2000-01-01	2000-01-01

PROBLEMA 7

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.0	39	.50000000000001D+01 .40000000000001D+01	-.1341504685115D-10 .6316014378172D-10	-.1341504685115D-10
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	58	.50000000000003D+01 .40000000000000D+01	.2413180766325D-11 .6061817714453D-11	.2413180766325D-11
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	85	.50000000000004D+01 .40000000000000D+01	.4217959315156D-11 .5326405982942D-11	.4217959315156D-11
ADAMS MODIF. h = 0.75	82	.499999999997D+01 .4000000000000D+01	-.2168931700908D-11 -.4570566147777D-11	-.2168931700908D-11
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1060004633501D+06 .2000408762541D+03	-.7911237937316D+07 .7936092469631D+07	-.7911237937316D+07

Página Nro.: 163

PROBLEMA 7

PROBLEMA N° 7:

Valores Iniciales	X(1) = 0.2500
	X(2) = 1.0000

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	6	.1141277898685D+02 -.8968052532833D+00	.4948952095170D+01 -.4948952095035D+01	.4898425367924D+02
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	18	.1141277899561D+02 -.8968052527403D+00	.4948952096660D+01 -.4948952093545D+01	.4898425367924D+02
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	16	.1141277898695D+02 -.8968052532718D+00	.4948952095114D+01 -.4948952095091D+01	.4898425367924D+02
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	8	.1141277875296D+02 -.8968052779990D+00	.4948952191996D+01 -.4948951998209D+01	.4898425367924D+02
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	8	.1141277875291D+02 -.8968052780006D+00	.4948952191966D+01 -.4948951998239D+01	.4898425367924D+02

PROBLEMA N° 7:

Valores Iniciales	X(1) = 0.2500
	X(2) = 1.0000

PROBLEMA 8

PROBLEMA N.º 2 Valores iniciales $X(1) = -0.0010$
 $X(2) = -0.0100$

MÉTODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MÉTODOS	ITERAC.	SOLUCIÓN ESTIMADA X	$P(x)$	$f(x)$
Runge Kutta Orden 4		NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE		
Euler Modif. O CATCH		NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE		
Euler Mejor. O RUN		NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE		
Adams Modif.		NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE		
Wilson Simpson		NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE		

PROBLEMA 8

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	7	.5609475421743D+00 .5609476056724D+00	.4953356437696D+00 -.1413361249159D+00	.2653333001949D+00
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	16	.5609475741606D+00 .5609475721848D+00	.4953356464002D+00 -.1413361156965D+00	.2653333001949D+00
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	14	.5609475732316D+00 .5609475735002D+00	.4953356457233D+00 -.1413361180689D+00	.2653333001949D+00
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	8	.5609470588318D+00 .5609482118691D+00	.4953354284875D+00 -.1413368794094D+00	.2653333001961D+00
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	8	.5609470588321D+00 .5609482118665D+00	.4953354284917D+00 -.1413368793947D+00	.2653333001961D+00

PROBLEMA 8

Désigne N° : 188

PROBLEMA N° 9 Valores Iniciales X(1) = 1.5000
X(2) = 5.0000

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	9	.10000000000000D+01 .10000000000000D+01	.6394884621841D-13 .4440892098501D-14	.4109176455296D-26
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	16	-.1183467003242D+01 .1586837142723D+01	-.2995435496866D-11 -.2832998592661D-11	.1699851484191D-22
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	16	-.1183467003242D+01 .1586837142723D+01	-.2999639599210D-11 -.2840254073599D-11	.1706488092775D-22
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	8	-.1183467001844D+01 .1586837254625D+01	.7950701795155D-06 -.3328159064453D-06	.7429030179377D-12
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	8	-.1183467001844D+01 .1586837254628D+01	.7950860815035D-06 -.3328244184784D-06	.7429339705361D-12

```
PROBLEMA N° 9      Valores Iniciales  X(1) =  1.5000
                                      X(2) =  5.0000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	24	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.1982414232771D-11 -.1341149413747D-12	.3947953007792D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	43	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.3751665644813D-11 -.1370015212387D-11	.1595193679265D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	43	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.4863665026278D-11 -.8308909116295D-12	.2434561719487D-22
ADAMS MODIF. h = 0.75	52	.1000000000001D+01 .999999999996D+00	.1719513420539D-11 .7104539179181D-11	.5343120335194D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	90	.999999999998D+00 .1000000000000D+01	-.8455458555545D-12 -.2371880469809D-11	.6340764756908D-23

Página Nro.: 192

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	- .1183467003242D+01 .1586837142723D+01	.2596701499658D-11 .1993228498920D-11	.1071581852723D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	41	- .1183467003242D+01 .1586837142723D+01	.6146967483633D-11 .4656778435086D-11	.5947079463833D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	41	- .1183467003243D+01 .1586837142724D+01	.7204235472069D-11 .5729193161552D-11	.8472466301940D-22
ADAMS MODIF. h = 0.75	46	- .1183467003243D+01 .1586837142723D+01	.6217656597918D-12 .9119843769057D-11	.8355814290769D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	77	- .1183467003242D+01 .1586837142723D+01	.1387555001453D-11 .2397583000191D-11	.7673713124862D-23

PROBLEMA 9

```
Valores Iniciales  X(1) = 10.0000
                   X(2) = -10.0000
```

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	12	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	.2842170943040D-13 .6261657858886D-13	.4728629481121D-26
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	26	-.1183467003242D+01 .1586837142723D+01	.5419536347473D-13 .4914037926573D-13	.5351914296538D-26
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	26	-.1183467003242D+01 .1586837142723D+01	.5629698096588D-13 .5176848533184D-13	.5849326139425D-26
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	13	-.1183466446490D+01 .1586841297569D+01	.2753776102166D-04 -.1833191138002D-04	.1094387256931D-08
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	13	-.1183466446489D+01 .1586841297570D+01	.2753776502419D-04 -.1833191738704D-04	.1094387697613D-08

PROBLEMA N° 9 Valores Iniciales $X(1) = 10.0000$
 $X(2) = -10.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	51	-.4757045545547D+00 -.2293864480542D+01	.1064673079680D+02 .2015647525447D+02	.5196363713436D+03
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	201	-.7927466612240D+00 -.2122546230480D+01	.1076623218323D+02 .2038271622781D+02	.5313668762469D+03
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	201	.1445189368159D+01 -.3331847065418D+01	.2193903162097D+02 .4153514880904D+02	.2206489695056D+04
ADAMS MODIF. h = 0.5	77	-.1183467003243D+01 .1586837142723D+01	.7644352165159D-11 .1445941717054D-10	.2675108649368D-21
MILNE SIMPSON h = 1.0	201	-.3840606360460D+02 .1651999417135D+02	.3966871893281D+04 .7548918850397D+04	.7272224842758D+08

Página Nro.: 199

PROBLEMA 9


```
PROBLEMA N° 9      Valores Iniciales  X(1) =  0.0000
                                         X(2) =  0.0000
```

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MODIF O CAUCHY	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
EULER MEJOR. O HEUN	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
ADAMS MODIF.	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			
MILNE SIMPSON	NO SE PUDO PROCESAR: MATRIZ NO INVERSIBLE			

PROBLEMA 10

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = -1.0000$
 $X(2) = 3.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	12	-.2633162259020D-19 .2439463537569D-11	.0000000000000D+00 .2439463561710D-11	.5950982468910D-23
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	6	-.4768623681339D-06 -.7636868851018D+03	-.4768622544351D-06 -.1000000000000D+01	.1000000000000D+01
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	7	-.1110506849006D-09 -.7636868517318D+03	-.1110506849238D-09 -.1000000000000D+01	.1000000000000D+01
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	8	-.3331660646288D-04 .1817326209842D-05	-.3331605147091D-04 .1817327861180D-05	.1113261966167D-08
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	8	-.3331660712148D-04 .1817326412139D-05	-.3331605212948D-04 .1817328063477D-05	.1113262010785D-08

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = 2.0000$
 $X(2) = -2.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	10	.1675032477613D-11 .1658166970481D-10	.1675032508530D-11 .1658166973954D-10	.2777575052557D-21
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	11	-.9242349421757D+02 -.8309605852825D-08	-.1000000000000D+01 -.8309605818322D-08	.1000000000000D+01
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	11	-.9242349116402D+02 -.7335884212557D-08	-.1000000000000D+01 -.7335884185647D-08	.1000000000000D+01
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	6	-.5144978861400D-05 -.1895883092389D-06	-.5144965626019D-05 -.1895882912670D-06	.2650661501310D-10
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	6	-.5144978770751D-05 -.1895881098889D-06	-.5144965535371D-05 -.1895880919171D-06	.2650661400475D-10

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = 2.0000$
 $X(2) = -2.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	27	.2493267788291D-14 .2871488701519D-12	.2493231315848D-14 .2871488853987D-12	.8246069858809D-25
EULER MODIF O CAUCHY h = 0.5	63	.7246485224445D-12 -.4452395982203D-12	.7246485312848D-12 -.4452395483551D-12	.7233537493126D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	42	.6280339865346D-12 .3286474400353D-12	.6280339746520D-12 .3286474824921D-12	.5024358410656D-24
ADAMS MODIF. h = 0.75	55	-.6532269240479D-14 .1119935128986D-11	-.6532318089225D-14 .1119935090846D-11	.1254297278888D-23
MILNE SIMPSON h = 0.5	110	.1165047953658D-15 -.2319414592913D-12	.1165517335422D-15 -.2319414191959D-12	.5379683552292D-25

TESIS DE LICENCIATURA

0000.0 - 0000 0000.0000 0000.0000
0000.0 - 0000

0000.0000.0000.0000 0000.0000

0000.0000	0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000
0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000.0000.0000	0000.0000	0000.0000

2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2

ANEXO N° 10

FECHA	CONCEPTO	CANTIDAD	VALOR
2012.1 - 2012.2	1. 2012.1 - 2012.2	1. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	2. 2012.1 - 2012.2	2. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	3. 2012.1 - 2012.2	3. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	4. 2012.1 - 2012.2	4. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	5. 2012.1 - 2012.2	5. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	6. 2012.1 - 2012.2	6. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	7. 2012.1 - 2012.2	7. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	8. 2012.1 - 2012.2	8. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	9. 2012.1 - 2012.2	9. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	10. 2012.1 - 2012.2	10. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	11. 2012.1 - 2012.2	11. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	12. 2012.1 - 2012.2	12. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	13. 2012.1 - 2012.2	13. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	14. 2012.1 - 2012.2	14. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	15. 2012.1 - 2012.2	15. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	16. 2012.1 - 2012.2	16. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	17. 2012.1 - 2012.2	17. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	18. 2012.1 - 2012.2	18. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	19. 2012.1 - 2012.2	19. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2
2012.1 - 2012.2	20. 2012.1 - 2012.2	20. 2012.1 - 2012.2	2012.1 - 2012.2

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = -1.5000$
 $X(2) = -3.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	9	.1546672847924D-11 .1422823836833D-06	.1546672837548D-11 .1422823938055D-06	.2024427958940D-13
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	15	-.2393878722799D-11 -.9180473883373D-12	-.2393878715048D-11 -.9180474306106D-12	.6573466387213D-23
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	15	-.3908805632099D-10 -.1597801531482D-10	-.3908805635937D-10 -.1597801535178D-10	.1783173124535D-20
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	6	-.8305420447750D-05 .1340383543692D-04	-.8305385957841D-05 .1340392526873D-04	.2486446485183D-09
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	6	-.8305420203356D-05 .1340383564338D-04	-.8305385713449D-05 .1340392547518D-04	.2486446499934D-09

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = -1.5000$
 $X(2) = -3.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	38	.1695533417303D-19 .1765035514184D-12	.0000000000000D+00 .1765035600315D-12	.3115350670380D-25
EULER MODIF O CAUCHY h = 0.75	59	.3902803096811D-12 .3057016383290D-12	.3902802560296D-12 .3057016445540D-12	.2457721737296D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	47	-.2700434696771D-14 .7212993611747D-12	-.2700422351010D-14 .7212993223538D-12	.5202800047089D-24
ADAMS MODIF.	Floating-point error.- Overflow			
MILNE SIMPSONN h = 0.5	157	.2617466963695D-18 -.3160714909076D-12	.2168404344971D-18 -.3160714962328D-12	.9990119073086D-25

Nombre	Apellido	Fecha de Nacimiento	Sexo	Estado Civil
1. JUAN CARLOS	RODRIGUEZ	15/01/1980	M	Casado
2. MARIA ELENA	LOPEZ	22/03/1985	F	Casada
3. PEDRO ALBERTO	GARCIA	10/05/1978	M	Casado
4. ANA MARIA	PEREZ	05/07/1982	F	Casada
5. CARLOS ALBERTO	RAMIREZ	18/09/1975	M	Casado
6. LUCIA MARIA	HERNANDEZ	25/11/1988	F	Casada
7. JORGE LUIS	MARTINEZ	12/02/1983	M	Casado
8. ROSA MARIA	CONTRERAS	08/04/1987	F	Casada
9. FELIX ALBERTO	RODRIGUEZ	20/06/1979	M	Casado
10. CRISTINA MARIA	LOPEZ	14/08/1981	F	Casada

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = 4.0000$
 $X(2) = 3.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	14	.2175683350005D-10 -.1882550216319D-19	.2175683353096D-10 .0000000000000D+00	.4733598052941D-21
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	1	.0000000000000D+00 .0000000000000D+00	.0000000000000D+00 .0000000000000D+00	.0000000000000D+00
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	1	.0000000000000D+00 .0000000000000D+00	.0000000000000D+00 .0000000000000D+00	.0000000000000D+00
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	11	.3692487672637D-06 .4935930662638D-08	.3692488354360D-06 .4935930674821D-08	.1363690658825D-12
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	11	.3692490260328D-06 .4936117215362D-08	.3692490942053D-06 .4936117227526D-08	.1363692588247D-12

PROBLEMA N° 10: Valores Iniciales $X(1) = 4.0000$
 $X(2) = 3.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	25	.2097734243815D-12 .8589988934772D-13	.2097733878964D-12 .8589992866320D-13	.5138367201388D-25
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	44	.5410287805547D-12 .2646879712910D-12	.5410288102942D-12 .2646880110924D-12	.3627719167843D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	.6918057806115D-12 .3374977660421D-12	.6918057706556D-12 .3374977164058D-12	.5924999328916D-24
ADAMS MODIF. h = 0.75	52	-.4699845728735D-12 .3477592224483D-12	-.4699846197984D-12 .3477592562875D-12	.3418220431807D-24
MILNE SIMPSON h = 0.5	70	-.2273796085382D-12 -.4411653757391D-13	-.2273796385552D-12 -.4411651165909D-13	.5364776663045D-25

TESIS DE LICENCIATURA

TESIS DE LICENCIATURA
 TESIS DE LICENCIATURA

TESIS DE LICENCIATURA
 TESIS DE LICENCIATURA

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9
10	10	10	10	10
11	11	11	11	11
12	12	12	12	12
13	13	13	13	13
14	14	14	14	14
15	15	15	15	15
16	16	16	16	16
17	17	17	17	17
18	18	18	18	18
19	19	19	19	19
20	20	20	20	20
21	21	21	21	21
22	22	22	22	22
23	23	23	23	23
24	24	24	24	24
25	25	25	25	25
26	26	26	26	26
27	27	27	27	27
28	28	28	28	28
29	29	29	29	29
30	30	30	30	30
31	31	31	31	31
32	32	32	32	32
33	33	33	33	33
34	34	34	34	34
35	35	35	35	35
36	36	36	36	36
37	37	37	37	37
38	38	38	38	38
39	39	39	39	39
40	40	40	40	40
41	41	41	41	41
42	42	42	42	42
43	43	43	43	43
44	44	44	44	44
45	45	45	45	45
46	46	46	46	46
47	47	47	47	47
48	48	48	48	48
49	49	49	49	49
50	50	50	50	50
51	51	51	51	51
52	52	52	52	52
53	53	53	53	53
54	54	54	54	54
55	55	55	55	55
56	56	56	56	56
57	57	57	57	57
58	58	58	58	58
59	59	59	59	59
60	60	60	60	60
61	61	61	61	61
62	62	62	62	62
63	63	63	63	63
64	64	64	64	64
65	65	65	65	65
66	66	66	66	66
67	67	67	67	67
68	68	68	68	68
69	69	69	69	69
70	70	70	70	70
71	71	71	71	71
72	72	72	72	72
73	73	73	73	73
74	74	74	74	74
75	75	75	75	75
76	76	76	76	76
77	77	77	77	77
78	78	78	78	78
79	79	79	79	79
80	80	80	80	80
81	81	81	81	81
82	82	82	82	82
83	83	83	83	83
84	84	84	84	84
85	85	85	85	85
86	86	86	86	86
87	87	87	87	87
88	88	88	88	88
89	89	89	89	89
90	90	90	90	90
91	91	91	91	91
92	92	92	92	92
93	93	93	93	93
94	94	94	94	94
95	95	95	95	95
96	96	96	96	96
97	97	97	97	97
98	98	98	98	98
99	99	99	99	99
100	100	100	100	100

PROBLEMA 11

PROBLEMA 11

PROBLEMA 11

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	28	.2941523798265D-14 .5722549849404D-14 .2857125724464D-12	.2941523798265D-14 .5722549849404D-14 .2857125343605D-12	.8167305242976D-25
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	50	.8881784197001D-14 .1592289221758D-13 .5477132639628D-12	.8881784197001D-14 .1592289221758D-13 .5477132419482D-12	.3003222199925D-24
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	50	.8881784197001D-14 .1935159649339D-13 .7014565773939D-12	.8881784197001D-14 .1935159649339D-13 .7014565794536D-12	.4924947032361D-24
ADAMS MODIF. h = 0.5	72	.4960330379593D-15 .6155443129288D-14 .1337883274547D-11	.4960330379593D-15 .6155443129288D-14 .1337883254703D-11	.1789969738742D-23
MILNE SIMPSON h = 0.5	90	.2711868335391D-13 .1664990220770D-12 .1689871442297D-15	.2711868335391D-13 .1664990220770D-12 .1690271186905D-15	.2845737590961D-25

PROBLEMA 11

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	8	-.3141819817791D-88 .2001733082794D-09 .3059767871133D-12	-.3141819817791D-88 .2001733083195D-09 .3059768150654D-12	.4006944698539D-19
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	12	.9186657273837D-15 -.1040491321714D-12 .1667112666446D-11	.9186657273837D-15 -.1040491321714D-12 .1667112628501D-11	.2790091581959D-23
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	12	.9189436394873D-15 -.1038369828680D-12 .1667325905109D-11	.9189436394873D-15 -.1038369828680D-12 .1667325891068D-11	.2790758590494D-23
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	6	.1172902949619D-05 -.2228642134488D-06 .8862549943714D-06	.1172902949619D-05 -.2228641637804D-06 .8862553870954D-06	.2210818375879D-11
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	5	-.2491964917144D-03 -.1600022683880D-02 -.1979974589390D-03	-.2491964917144D-03 -.1597462611291D-02 -.1979778587357D-03	.2653180918504D-05

Página Nro.: 236

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = 2.0000$
 $X(2) = 3.0000$
 $X(3) = 1.0000$
 $X(4) = -1.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	30	.1862334867030D-04 -.1862334867030D-05 -.4859502953405D-05 -.4859502953405D-05	-.8546562437796D-18 -.2613752083955D-18 .6172727982731D-10 .1743820055168D-08	.3044718641880D-17
DUMINF (Quasi Newton) hessiano est.	60	.6643972403885D-07 -.6643972405360D-08 -.2357325336203D-04 -.2357325336204D-04	-.1474659049443D-16 .3063772007975D-16 .2222166660245D-08 .1767191718309D-08	.8060991235161D-17
DUMING (Quasi Newton) hessiano cal.	60	.6646142880001D-07 -.6646142881474D-08 -.2357329321915D-04 -.2357329321916D-04	-.1473149444825D-16 .3060741570776D-16 .2222173971056D-08 .1767200922471D-08	.8061056258020D-17
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	66	.2256415369799D-02 -.2256091629610D-03 .8699286751220D-03 .8695471698421D-03	.3237401889357D-06 .8530717395820D-06 .3863058614530D-05 .6082335616125D-05	.5275056750929D-10
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	66	-.9444253043297D-03 .9442832257646D-04 -.2021644006947D-02 -.2021752081644D-02	-.1420785651758D-06 .2416623698250D-06 .1712069648110D-04 .3670243760497D-05	.3066675242790D-09

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = 2.0000$
 $X(2) = 3.0000$
 $X(3) = 1.0000$
 $X(4) = -1.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	39	.5450452210825D-12 -.5450452175942D-13 -.1417117573158D-12 -.1417117575338D-12	.3488308528552D-20 .4875059602022D-21 .5240390529757D-25 .1491441291253D-23	.1240596067874D-40
EULER MODIF h = 1.0	61	.8422318919708D-12 -.8422180141830D-13 -.2189796327175D-12 -.2189805000792D-12	.1387778780771D-16 .1939479807224D-17 .1251301934489D-24 .3561267738205D-23	.1963545763586D-33
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	61	.8422318919708D-12 -.8422180141830D-13 -.2189796327175D-12 -.2189805000792D-12	.1387778780779D-16 .1939479807224D-17 .1251301934489D-24 .3561267738205D-23	.1963545763607D-33
ADAMS MODIF. h = 0.75	73	.1343347288307D-11 -.1343815532694D-12 -.3492925365682D-12 -.3492632712941D-12	-.4682443868222D-15 -.6543914243859D-16 .3183256118304D-24 .9059705738556D-23	.2235350871536D-30
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.6409307254848D-08 .2069508777980D-07 .1119214448698D-07 -.1341703671862D-08	.2005415705432D-06 .2802653650284D-07 .2853400674362D-17 .8120920688833D-16	.4100240826427D-13

2000.1 = 10.1
 2000.2 = 10.2
 2000.3 = 10.3
 2000.4 = 10.4

ANEXO DE EJERCICIOS DE CÁLCULO

PROBLEMA	FECHA	ALUMNO	NOTA
PROBLEMA 1	2000.1	10.1	10.1
PROBLEMA 2	2000.2	10.2	10.2
PROBLEMA 3	2000.3	10.3	10.3
PROBLEMA 4	2000.4	10.4	10.4
PROBLEMA 5	2000.1	10.1	10.1
PROBLEMA 6	2000.2	10.2	10.2
PROBLEMA 7	2000.3	10.3	10.3
PROBLEMA 8	2000.4	10.4	10.4
PROBLEMA 9	2000.1	10.1	10.1
PROBLEMA 10	2000.2	10.2	10.2
PROBLEMA 11	2000.3	10.3	10.3
PROBLEMA 12	2000.4	10.4	10.4
PROBLEMA 13	2000.1	10.1	10.1
PROBLEMA 14	2000.2	10.2	10.2
PROBLEMA 15	2000.3	10.3	10.3
PROBLEMA 16	2000.4	10.4	10.4
PROBLEMA 17	2000.1	10.1	10.1
PROBLEMA 18	2000.2	10.2	10.2
PROBLEMA 19	2000.3	10.3	10.3
PROBLEMA 20	2000.4	10.4	10.4

PROBLEMA 12

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = -1.0000$
 $X(2) = 0.5000$
 $X(3) = -2.0000$
 $X(4) = 0.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	30	-.2503375079326D-04 .2503375079325D-05 -.1668943674067D-04 -.1668943674068D-04	-.7378504003532D-17 .1792503603083D-16 .1287535761770D-08 .2201817313041D-09	.1706228332636D-17
DUMINF (Quasi Newton) hessiano est.	48	-.2850775501730D-04 .2850775502017D-05 -.5471574664508D-05 -.5471574664447D-05	.2870176223969D-14 -.1364662691312D-15 .1902723622442D-09 .1678111988500D-08	.2852263417789D-17
DUMING (Quasi Newton) hessiano cal.	48	-.2850713996076D-04 .2850713996363D-05 -.5470798276780D-05 -.5470798276719D-05	.2869619723323D-14 -.1364492229219D-15 .1902278303055D-09 .1678135493502D-08	.2852325361984D-17
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	42	.1160241969371D-03 -.1160950354088D-04 -.1218317087508D-02 -.1218394340010D-02	-.7083847174565D-07 .1727418469067D-06 .5880744657262D-05 .5630981915908D-05	.6632597289595D-10
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	42	.1160266904563D-03 -.1160975299542D-04 -.1218320849258D-02 -.1218398103193D-02	-.7083949795816D-07 .1727450507222D-06 .5880779936792D-05 .5631034720116D-05	.6632698377114D-10

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	40	- .3359426672348D-12 .3359426673541D-13 - .2274073440138D-12 - .2274073439542D-12	.1192292450087D-21 - .1333024330421D-21 .2385433070927D-24 .3725136646923D-25	.3198520981086D-43
EULER MODIF h = 1.5	61	.7411100190183D-12 .6738398370485D-13 .3365259894416D-13 .7411275269775D-12	.1414949856067D-11 - .1581962031459D-11 .6207204885382D-32 .9693286585962D-33	.4504686964162D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	61	.7411100190183D-12 .6738398370485D-13 .3365259894416D-13 .7411275269775D-12	.1414949856067D-11 - .1581962031459D-11 .6207204885380D-32 .9693286588757D-33	.4504686964162D-23
ADAMS MODIF. h = 0.75	74	- .1198937146383D-11 .1198929630017D-12 - .8115857359843D-12 - .8115894941671D-12	- .7516365708024D-17 .8403552333333D-17 .3038273624458D-23 .4744624596595D-24	.1271154452758D-33
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	.1835917795903D-07 .6708518358719D-09 .4136128604109D-08 .1666997676275D-07	.2506769631774D-07 - .2802653650239D-07 .5778136363474D-16 .9023245230587D-17	.1413876146998D-14

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = 0.5000$
 $X(2) = 1.0000$
 $X(3) = 1.0000$
 $X(4) = 1.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	26	.2151234547779D-07 -.2151234546025D-08 .1982357174821D-04 .1982357174826D-04	.1753639442225D-16 -.1097624353401D-15 .1572066572663D-08 .1239997238479D-08	.4008986460321D-17
DUMINF (Quasi Newton) hessiano est.	69	.8866276809662D-06 -.8866276451779D-07 .1374371182336D-04 .1374371183641D-04	.3578822421196D-13 -.2917702662165D-13 .7604405417602D-09 .5227390847499D-09	.8515259704099D-18
DUMING (Quasi Newton) hessiano cal.	69	.8863394717458D-06 -.8863394359633D-07 .1374316104756D-04 .1374316106060D-04	.3578248625196D-13 -.2917196200349D-13 .7603782005369D-09 .5227177342767D-09	.8514088397105D-18
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	35	.1475761064449D-02 -.1475846223433D-03 .1811716144558D-02 .1811854170591D-02	-.8515898372124D-07 -.3086355917345D-06 .1422056854651D-04 .3572063813951D-06	.2024546741659D-09
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	35	.1475758587201D-02 -.1475843746156D-03 .1811717054101D-02 .1811855080217D-02	-.8515895481918D-07 -.3086357779105D-06 .1422058039776D-04 .3572135807074D-06	.2024550164823D-09

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = 0.5000$
 $X(2) = 1.0000$
 $X(3) = 1.0000$
 $X(4) = 1.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	37	.7289861617805D-21 .1457970500015D-20 .5091822740282D-12 .5091822740282D-12	.1530869116193D-19 .0000000000000D+00 .1037066349769D-23 .8198729374964D-24	.2343560268389D-39
EULER MODIF h = 1.0	58	.1734723491890D-17 .3469446950413D-17 .7244560610296D-12 .7244560610296D-12	.3642919299602D-16 .0000000000000D+00 .2099336283615D-23 .1659671057714D-23	.1327086102341D-32
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	58	.1734723470599D-17 .3469446952483D-17 .7244560610296D-12 .7244560610296D-12	.3642919299543D-16 .0000000000000D+00 .2099336283615D-23 .1659671057714D-23	.1327086102298D-32
ADAMS MODIF. h = 0.75	69	-.1561128862525D-16 -.3122257709031D-16 .1269813410602D-11 .1269813410602D-11	-.3278370595283D-15 .0000000000000D+00 .6449862979343D-23 .5099064402682D-23	.1074771376002D-30
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	.3133462039464D-08 .6266924079453D-08 .2288861442547D-08 .2288861442547D-08	.6580270283400D-07 .0000000000000D+00 .2853400675024D-17 .2255811301132D-17	.4329995700259D-14

Variable	Unidad	Valor	Unidad	Valor
Variable 1	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 2	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 3	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 4	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 5	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 6	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 7	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 8	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 9	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 10	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 11	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 12	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 13	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 14	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 15	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 16	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 17	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 18	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 19	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2
Variable 20	Unidad 1	Valor 1	Unidad 2	Valor 2

PROBLEMA N° 12: Valores Iniciales $X(1) = 3.0000$
 $X(2) = -1.0000$
 $X(3) = 0.0000$
 $X(4) = 1.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	29	.2970427993098D-04 -.2970427993096D-05 .5999990385198D-05 .5999990385270D-05	.1989172173332D-16 -.1600222362820D-15 .2241131385460D-09 .1776862765545D-08	.3207467986450D-17
DUMINF (Quasi Newton) hessiano est.	64	-.4850936791235D-06 .4850937072945D-07 .1687436872767D-04 .1687436871857D-04	.2817104927319D-13 .2035715128518D-13 .1135705372955D-08 .9529553287889D-09	.2197950554033D-17
DUMING (Quasi Newton) hessiano cal.	64	-.4853073244395D-06 .4853073526092D-07 .1687320609024D-04 .1687320608113D-04	.2816968810448D-13 .2035758312249D-13 .1135547213896D-08 .9528511409572D-09	.2197392773018D-17
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	55	.2380865057091D-02 -.2380676871180D-03 .1570620294259D-02 .1570414812259D-02	.1881859108987D-06 .4594717204782D-06 .1141972442178D-04 .2077077568557D-05	.1349708852942D-09
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	55	.2382015266055D-02 -.2381825742132D-03 .1571644338831D-02 .1571436429056D-02	.1895239228573D-06 .4649003894904D-06 .1143434782726D-04 .2077736750525D-05	.1353133519287D-09

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.5	39	.5450452211915D-12 -.5450452219546D-13 .8720723533832D-13 .8720723544733D-13	-.7630674129179D-21 -.2437529236548D-21 .5240390529757D-25 .6628627961124D-24	.6416878065808D-42
EULER MODIF h = 1.5	59	.5607373599321D-12 -.6899712715111D-12 -.3449546181945D-12 .5606132896881D-12	-.6338975355179D-11 -.2024911400268D-11 .3848356357734D-32 .4867828535648D-31	.4428287473250D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	59	.5607373599321D-12 -.6899712715111D-12 -.3449546181945D-12 .5606132896881D-12	-.6338975355179D-11 -.2024911400268D-11 .3848356357696D-32 .4867828535490D-31	.4428287473250D-22
ADAMS MODIF. h = 0.75	73	.1343332655670D-11 -.1343230227210D-12 .2149402485730D-12 .2149256159359D-12	.1024284596172D-15 .3271957121918D-16 .3183256118304D-24 .4026535883803D-23	.1156215968032D-31
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	-.1423831734216D-09 -.4372608538260D-08 -.3030904865908D-08 .3236019213431D-08	-.4386846855602D-07 -.1401326825123D-07 .2853400672309D-17 .3609298080068D-16	.2120814220532D-14

PROBLEMA 13

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales

$X(1) = -3.0000$ $X(7) = .5000$
 $X(2) = 1.0000$ $X(8) = -1.0000$
 $X(3) = 3.0000$ $X(9) = 3.0000$
 $X(4) = 1.0000$ $X(10) = -1.0000$
 $X(5) = -2.0000$ $X(11) = .7500$
 $X(6) = -1.0000$ $X(12) = 1.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	31	-.7378022710668D-05 .7378022710675D-06 .1366730101307D-04 .1366730101306D-04 -.1291290929477D-05 .1291290929477D-06 .4632015818447D-05 .4632015818447D-05 .1674638979812D-04 -.1674638979812D-05 .5975508628478D-05 .5975508628493D-05	.6872401817548D-17 .3026649152290D-17 .7073897572110D-09 .1400590644571D-08 .7939875089325D-18 .3560763708576D-18 .8344644448741D-10 .1109502915317D-09 .4047123421981D-17 -.3277986037464D-16 .1856585078826D-09 .3668617801389D-09	.2650384345831D-17
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.		FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.		
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.		FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.		
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	109	-.1903390656842D-03 .1903735418321D-04 .4609554817216D-03 .4610234216344D-03 .2248763349134D-02 -.2248898563379D-03 .8268795631558D-03 .8270323726769D-03 .1724639984795D-02 -.1724829558990D-03 .1655662246063D-03 .1657523812245D-03	.3447614796473D-07 -.1519182634898D-06 .8151807542980D-06 .1341669313957D-05 -.1352142450219D-06 -.3416924766635D-06 .3529322000010D-05 .6391971821062D-05 -.1895741946216D-06 -.4162588528620D-06 .2536284762657D-06 .7684747582974D-05	.1152662007813D-09
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	112	.4042184435437D-04 -.4037194518650D-05 .2352816510353D-03 .2352584677906D-03 -.3614136641401D-03 .3614397717153D-04 .8002813541956D-03 .8002906779126D-03 .1259722680190D-02 -.1259735404157D-03 .3184751683821D-03 .3184731662227D-03	.4989916787464D-07 .5183931102911D-07 .2252456313627D-06 .1200442020325D-06 .2610757517236D-07 -.2084846494725D-07 .2447405966591D-05 .4267673883742D-05 -.1272396718603D-07 .4476964690916D-08 .5820528423714D-06 .2801621940741D-05	.3246232900597D-10

TESIS DE LICENCIATURA

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales $X(1) = -3.0000$ $X(7) = .5000$
 $X(2) = 1.0000$ $X(8) = -1.0000$
 $X(3) = 3.0000$ $X(9) = 3.0000$
 $X(4) = 1.0000$ $X(10) = -1.0000$
 $X(5) = -2.0000$ $X(11) = .7500$
 $X(6) = -1.0000$ $X(12) = 1.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	34	-.2322008418827D-12 .2322018090628D-13 .4179611837843D-12 .4179609074472D-12 -.2763371648086D-18 -.1381685825101D-18 .1625403682482D-12 .1625401609953D-12 .5031013404892D-12 -.5031023076693D-13 .1780204312821D-12 .1780204658243D-12	.9671800772257D-18 .6179086857243D-18 .6604848442058D-24 .1336727339336D-23 -.1658022989909D-17 .4634315141521D-18 .1056775750729D-24 .8354545870848D-25 -.9671800773141D-18 -.7723858572965D-19 .1651212110515D-24 .3341818348339D-24	.5222460550134D-35
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.5	61	-.5558981691108D-12 .3032060417227D-12 .1516467907594D-12 -.5558281372739D-12 -.7074749280333D-12 -.3537374640167D-12 -.1768512240491D-12 -.7074574200741D-12 -.3363509098493D-13 -.2442527157132D-12 -.1221044729076D-12 -.3367010690339D-13	.2476162248117D-11 .1581962031459D-11 .7663215907885D-32 .1550925854241D-31 -.4244849568200D-11 .1186471523594D-11 .1226114545266D-32 .9693286586744D-33 -.2476162248117D-11 -.1977452539324D-12 .1915803976971D-32 .3877314635225D-32	.3423092854538D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	61	-.5558981691108D-12 .3032060417227D-12 .1516467907594D-12 -.5558281372739D-12 -.7074749280333D-12 -.3537374640167D-12 -.1768512240491D-12 -.7074574200741D-12 -.3363509098493D-13 -.2442527157132D-12 -.1221044729076D-12 -.3367010690339D-13	.2476162248117D-11 .1581962031459D-11 .7663215907885D-32 .1550925854161D-31 -.4244849568200D-11 .1186471523594D-11 .1226114545255D-32 .9693286594236D-33 -.2476162248117D-11 -.1977452539324D-12 .1915803976976D-32 .3877314635394D-32	.3423092854538D-22
ADAMS MODIF. h = 0.75	74	-.5533508360216D-12 .5533376823816D-13 .9960360146581D-12 .9960397728409D-12 .3758182796261D-17 .1879091432676D-17 .3873485917613D-12 .3873514103985D-12 .1198933388200D-11 -.1198920234560D-12 .4242385535415D-12 .4242380837686D-12	-.1315363998960D-16 -.8403552333107D-17 .3750955091923D-23 .7591399354551D-23 .2254909712303D-16 -.6302664249943D-17 .6001528147078D-24 .4744624596596D-24 .1315363998826D-16 .1050444041582D-17 .9377387729807D-24 .1897849838638D-23	.9659449721277D-33
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.7434878991479D-08 .5130334754757D-08 -.1657835607752D-08 -.1419168376623D-07 -.1253384815825D-07 -.6266924079499D-08 -.4822663233813D-08 -.1422304935292D-07 -.5825329796376D-08 -.3804313875958D-08 -.4013658429795D-08 -.2446927409911D-08	.4386846855609D-07 .2802653650202D-07 .7133501684968D-16 .1443719232475D-15 -.7520308895324D-07 .2101990237707D-07 .1141360269610D-16 .9023245213440D-17 -.4386846855596D-07 -.3503317062918D-08 .1783375419976D-16 .3609298079241D-16	.1074398592970D-13

PROBLEMA 13

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales

$X(1) = -30.0000$ $X(7) = 5.0000$
 $X(2) = 10.0000$ $X(8) = -10.0000$
 $X(3) = 30.0000$ $X(9) = 30.0000$
 $X(4) = 10.0000$ $X(10) = -10.0000$
 $X(5) = -20.0000$ $X(11) = 7.5000$
 $X(6) = -10.0000$ $X(12) = 10.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	36	-.9282478991494D-05 .9282478991509D-06 .1971197941995D-04 .1971197941994D-04 -.5332362943020D-07 .5332362943338D-08 .9122124298920D-05 .9122124298920D-05 .2575290838083D-04 -.2575290838081D-05 .9722098845199D-05 .9722098845232D-05	.1431655087449D-16 .6341189838464D-17 .1481919760833D-08 .2658459214893D-08 .3180860179846D-17 .1420517436932D-17 .3326580654236D-09 .2662285027855D-09 .1082762216475D-16 -.7257518286448D-16 .4848578750559D-09 .8126637885200D-09	.1034054017116D-16
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.		FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.		
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.		FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.		
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.		FALLO: ERROR 3 from DUMCGF. The maximum number of function evaluations has been exceeded.		
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	127	.2807508956865D-02 -.2807493495902D-03 .1409395479492D-02 .1409426310413D-02 .2076796168063D-02 -.2076817416660D-03 .1112954056006D-02 .1112923702235D-02 .1233739856948D-02 -.1233734253794D-03 .4050642141693D-03 .4050208660725D-03	.1546096332157D-07 -.6894003453996D-07 .9607150124475D-05 .6181098867226D-05 -.2124859634669D-07 .6787309477174D-07 .5922359575923D-05 .2937914472482D-05 .5603153545959D-08 .9692929128841D-07 .8714257108951D-06 .2171773764486D-05	.1797044618809D-09

TESIS DE LICENCIATURA

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales

$X(1) = -30.0000$ $X(7) = 5.0000$
 $X(2) = 10.0000$ $X(8) = -10.0000$
 $X(3) = 30.0000$ $X(9) = 30.0000$
 $X(4) = 10.0000$ $X(10) = -10.0000$
 $X(5) = -20.0000$ $X(11) = 7.5000$
 $X(6) = -10.0000$ $X(12) = 10.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	37	-.1727503444441D-12 .1727505540607D-13 .3109505481308D-12 .3109504882403D-12 -.5989047475706D-19 -.2994523818535D-19 .1209251931985D-12 .1209251482806D-12 .3742923081539D-12 -.3742925177705D-13 .1324418843253D-12 .1324418918117D-12	.2096166663591D-18 .1339191757219D-18 .3655726492806D-24 .7398670220727D-24 -.3593428566106D-18 .1004393818196D-18 .5849162388489D-25 .4624168887954D-25 -.2096166664601D-18 -.1673989700757D-19 .9139316232015D-25 .1849667555182D-24	.2453082214693D-36
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.5	66	-.5301325372871D-12 .2891584876571D-12 .1445977650767D-12 -.5301029032901D-12 -.6747006683668D-12 -.3373503341834D-12 -.1686677585924D-12 -.6746932598675D-12 -.3210567218642D-13 -.2329346667097D-12 -.1164580727308D-12 -.3212048918494D-13	.2361452339284D-11 .1508676558933D-11 .1372146532227D-32 .2777029328428D-32 -.4048204010201D-11 .1131507419199D-11 .2195434451581D-33 .1735643329369D-33 -.2361452339284D-11 -.1885845698666D-12 .3430366330586D-33 .6942573320391D-33	.3113284814879D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	66	-.5301325372871D-12 .2891584876571D-12 .1445977650767D-12 -.5301029032901D-12 -.6747006683668D-12 -.3373503341834D-12 -.1686677585924D-12 -.6746932598675D-12 -.3210567218642D-13 -.2329346667097D-12 -.1164580727308D-12 -.3212048918494D-13	.2361452339284D-11 .1508676558933D-11 .1372146532230D-32 .2777029327917D-32 -.4048204010201D-11 .1131507419199D-11 .2195434451566D-33 .1735643331309D-33 -.2361452339284D-11 -.1885845698666D-12 .3430366330567D-33 .6942573320852D-33	.3113284814879D-22
ADAMS MODIF. h = 0.75	80	-.5794115836206D-12 .5793727458918D-13 .1042954166310D-11 .1042965262804D-11 .1109649389546D-16 .5548246980466D-17 .4055969857295D-12 .4056053081000D-12 .1255411183375D-11 -.1255372345647D-12 .4442241472251D-12 .4442227601634D-12	-.3883772882578D-16 -.2481251478386D-16 .4112666612207D-23 .8323452000964D-23 .6657896370012D-16 -.1860938608823D-16 .6580266579533D-24 .5202157500604D-24 .3883772882480D-16 .3101564348151D-17 .1028166653052D-23 .2080863000241D-23	.8421086609881D-32
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.7434878991495D-07 .5130334754759D-07 -.1657835607749D-07 -.1419168376623D-06 -.1253384815824D-06 -.6266924079500D-07 -.4822663233814D-07 -.1422304935292D-06 -.5825329796378D-07 -.3804313875958D-07 -.4013658429794D-07 -.2446927409911D-07	.4386846855610D-06 .2802653650202D-06 .7133501684962D-14 .1443719232468D-13 -.7520308895324D-06 .2101990237707D-06 .1141360269611D-14 .9023245213549D-15 -.4386846855596D-06 -.3503317062917D-07 .1783375419975D-14 .3609298079246D-14	.1074398592970D-11

PROBLEMA 13

PROBLEMA N° 13 Valores Iniciales $X(i) = i \quad i = 1,12$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	32	-.3311787430842D-05 .3311787430844D-06 .7133678222727D-05 .7133678222726D-05 .3324231524836D-05 -.3324231524830D-06 .1376036957236D-04 .1376036957237D-04 .9934293875371D-05 -.9934293875363D-06 .2038051752270D-04 .2038051752272D-04	.1850343473277D-17 .8295821831683D-18 .1942170489520D-09 .3450290089772D-09 .5955700410382D-17 -.2997859998901D-16 .7757986499543D-09 .3444130751676D-09 .8899351660327D-17 -.2861490324956D-16 .1743435300082D-08 .3450790860805D-09	.4035895411979D-17
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.			
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.			
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	107	-.3439331016476D-02 .3439313220127D-03 -.1590498615104D-02 -.1590504271103D-02 .9951784571170D-03 -.9948181918187D-04 -.7808440337242D-03 -.7808137816587D-03 .9225585442278D-03 -.9227137167251D-04 -.1182667173104D-03 -.1183071608950D-03	-.1779634903267D-07 .1264719624238D-07 .1242512129827D-04 .1080917206437D-04 .3602652982686D-06 -.6764567492898D-07 .2138047112470D-05 .9974293123974D-05 -.1551724973094D-06 .9043460436420D-07 .2081154280612D-07 .3426016095130D-05	.3871847287820D-09
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	130	-.4706631142728D-03 .4706693314147D-04 -.1742601547868D-03 -.1742452185780D-03 .2373418899461D-03 -.2373245293066D-04 .5832937835571D-03 .5832392059456D-03 .8699505241926D-04 -.8700317860933D-05 -.4062860848773D-03 -.4062776124472D-03	.6217141948939D-08 -.3339837834068D-07 .1564892665990D-06 .2778490010376D-06 .1736063950974D-07 .1220392494660D-06 .1416861750120D-05 .3783505627058D-06 -.8126190069560D-08 -.1894492976282D-07 .6462099542670D-06 .7694388287569D-06	.3278732761456D-11

PROBLEMA N° 13 Valores Iniciales $X(i) = i \quad i = 1, 12$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	35	.6510636217212D-13 .6510717114647D-14 .1399788770614D-12 .1399789155840D-12 .6510659330765D-13 .6510408933941D-14 .2701918325411D-12 .2701918710637D-12 .1953195487874D-12 .1953153498253D-13 .4004047880209D-12 .4004048265435D-12	.8089743516844D-18 -.8613912587372D-19 .7477328204852D-25 .1330053071622D-24 .2503968232285D-17 -.8613912593016D-19 .2990931281941D-24 .1330053071622D-24 .4198962112028D-17 -.8613912581727D-19 .6729595384366D-24 .1330053071622D-24	.2457783907524D-34
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.5	64	.1686084098676D-12 .1644986986702D-12 .8225459937196D-13 .1686162849229D-12 .3495617034380D-12 .5263947857373D-12 .2632078929424D-12 .3495695784933D-12 .5305149970084D-12 .8882908728045D-12 .4441611865128D-12 .5305228720637D-12	.1813595396570D-11 -.1931105995434D-12 .1102515475381D-33 .1961133782687D-33 .5613509560811D-11 -.1931105995434D-12 .4410061901523D-33 .1961133783065D-33 .9413423725053D-11 -.1931105995434D-12 .9922639278460D-33 .1961133783819D-33	.1235250391901D-21
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	64	.1686084098676D-12 .1644986986702D-12 .8225459937196D-13 .1686162849229D-12 .3495617034380D-12 .5263947857373D-12 .2632078929424D-12 .3495695784933D-12 .5305149970084D-12 .8882908728045D-12 .4441611865128D-12 .5305228720637D-12	.1813595396570D-11 -.1931105995434D-12 .1102515475381D-33 .1961133782272D-33 .5613509560811D-11 -.1931105995434D-12 .4410061901523D-33 .1961133782637D-33 .9413423725053D-11 -.1931105995434D-12 .9922639278396D-33 .1961133782662D-33	.1235250391901D-21
ADAMS MODIF. h = 0.75	75	-.2532536165058D-12 .2533860262470D-13 .5445277474004D-12 .5445340526261D-12 .2532914478610D-12 -.2528816081860D-13 .1051072811767D-11 .1051079116993D-11 .7598365122278D-12 -.7591492426189D-13 .1557617876134D-11 .1557624181359D-11	.1324097411724D-15 -.1409891343558D-16 .1131493626701D-23 .2012679572815D-23 .4098396750527D-15 -.1409891343445D-16 .4525974506805D-23 .2012679572814D-23 .6872696089368D-15 -.1409891343445D-16 .1018344264031D-22 .2012679572812D-23	.6584367522529D-30
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	.1384418624788D-07 .1177612194203D-07 .2509658583362D-08 .8776582661585D-08 .2375735822613D-07 .3835927069322D-07 .1242283056604D-07 .1868975464386D-07 .3367053019966D-07 .6494241944633D-07 .2233600255275D-07 .2860292663221D-07	.1316054056682D-06 -.1401326824874D-07 .4565441077160D-16 .8120920699442D-16 .4073500651583D-06 -.1401326824785D-07 .1826176433709D-15 .8120920686525D-16 .6830947246629D-06 -.1401326825151D-07 .4108896975490D-15 .8120920639045D-16	.6504615763089D-12

PROBLEMA 13

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales

$X(1) = -6.0000$ $X(7) = -2.0000$
 $X(2) = 2.0000$ $X(8) = 6.0000$
 $X(3) = 6.0000$ $X(9) = -2.0000$
 $X(4) = -4.0000$ $X(10) = .9000$
 $X(5) = -2.0000$ $X(11) = 2.0000$
 $X(6) = 1.0000$ $X(12) = 5.0000$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	32	.8447071073034D-05 -.8447071073027D-06 .1788665931199D-04 .1788665931200D-04 -.3621084571270D-04 .3621084571267D-05 -.7783745697774D-05 -.7783745697877D-05 -.1651575360497D-04 .1651575360497D-05 .8545215774187D-05 .8545215774187D-05	.6997339177268D-17 -.2348588829061D-16 .1340879808457D-08 .2817773633341D-09 -.2848232988437D-16 .2301086725970D-15 .3682014476342D-09 .2555436625416D-08 .2511452688609D-17 .1015196461594D-17 .2383582803900D-09 .1986075397913D-08	.1254449595180D-16
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.		FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.		
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.		FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.		
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.		FALLO: ERROR from DUMCGF. The maximum number of function evaluations has been exceeded.		
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.		FALLO: ERROR from DUMCGF. The maximum number of function evaluations has been exceeded.		

TESIS DE LICENCIATURA

PROBLEMA N° 13

Valores Iniciales $X(1) = -6.0000$ $X(7) = -2.0000$
 $X(2) = 2.0000$ $X(8) = 6.0000$
 $X(3) = 6.0000$ $X(9) = -2.0000$
 $X(4) = -4.0000$ $X(10) = .9000$
 $X(5) = -2.0000$ $X(11) = 2.0000$
 $X(6) = 1.0000$ $X(12) = 5.0000$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	36	.8214790455296D-13 -.8214775418696D-14 .1396516117350D-12 .1396515043307D-12 -.2875179129652D-12 .2875179988887D-13 -.5750359977773D-13 -.5750351385430D-13 -.1492354984894D-12 .1492355736724D-13 .5202706851136D-13 .5202710073265D-13	.1503660009325D-18 .2401632854758D-18 .8266659968494D-25 .1045658965703D-25 .8592342904298D-19 -.1921306283693D-18 .2066664992124D-25 .1673054345125D-24 .7518300046940D-19 -.7204898564555D-19 .7944260229723D-26 .1280932232986D-24	.1354288918352D-36
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.5	64	-.7649102862557D-12 .1973973883969D-12 .9871181929056D-13 -.7649050362189D-12 .6908672342233D-12 .2625018430160D-17 -.5250036842443D-17 .6908882343707D-12 .2755212764241D-12 .3290105224326D-13 .1645459490018D-13 .2755396515530D-12	.1209063597713D-11 .1931105995434D-11 .6890721721117D-33 .8716150157124D-34 .6908934844076D-12 -.1544884796347D-11 .1722680430284D-33 .1394584022189D-32 .6045317988566D-12 -.5793317986301D-12 .6621983574004D-34 .1067728392634D-32	.8756092018429D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.5	64	-.7649102862557D-12 .1973973883969D-12 .9871181929056D-13 -.7649050362189D-12 .6908672342233D-12 .2625018430605D-17 -.5250036842220D-17 .6908882343707D-12 .2755212764241D-12 .3290105224326D-13 .1645459490018D-13 .2755396515530D-12	.1209063597713D-11 .1931105995434D-11 .6890721721117D-33 .8716150151759D-34 .6908934844076D-12 -.1544884796347D-11 .1722680430284D-33 .1394584022887D-32 .6045317988566D-12 -.5793317986301D-12 .6621983574014D-34 .1067728392558D-32	.8756092018429D-23
ADAMS MODIF. h = 0.75	77	.3581396976098D-12 -.3581712000919D-13 .6088010330644D-12 .6088235348374D-12 -.1253437187556D-11 .1253419186138D-12 -.2506838372276D-12 -.2507018386459D-12 -.6505914233706D-12 .6505756721295D-13 .2268087574578D-12 .2268020069259D-12	-.3150248213198D-16 -.5031549393324D-16 .1571059656179D-23 .1987250741410D-24 -.1800141836049D-16 .4025239514637D-16 .3927649140446D-24 .3179601186256D-23 -.1575124106627D-16 .1509464818009D-16 .1509788329587D-24 .2434382158227D-23	.5944311687039D-32
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	-.6033333097563D-07 .1480702680873D-07 -.1042492567483D-08 -.6371173336281D-07 .6702740457343D-07 -.1689201193768D-08 .3378402386984D-08 .5351379502235D-07 .2876223064652D-07 .1510623790977D-08 -.1862949955659D-08 .1693782228183D-07	.8773693711169D-07 .1401326825166D-06 .2853400675060D-15 .3609298080764D-16 .5013539263575D-07 -.1121061460113D-06 .7133501680705D-16 .5774876931249D-15 .4386846855628D-07 -.4203980475252D-07 .2742118048469D-16 .4421390156087D-15	.4610807212841D-13

PROBLEMA 14

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	14	.999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00 .999999996725D+00 .9999999989287D+00	-.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09 -.4162490353484D-08 .3275217874688D-09	.1394687717129D-15
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	82	.999999999998D+00 .999999999997D+00 .999999999999D+00 .999999999998D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .100000000000D+01 .999999999999D+00 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .999999999998D+00 .999999999996D+00 .999999999998D+00 .999999999996D+00 .999999999999D+00 .999999999998D+00	-.9992007221626D-14 .1593170040337D-12 -.4440892098501D-13 .7804867863115D-13 .000000000000D+00 .6183942247162D-13 .6217248937901D-13 .3719247132494D-13 .2442490654175D-13 -.1032507412901D-12 .3330669073875D-13 .1774136393351D-12 -.2886579864025D-12 .1634248292248D-12 .4440892098501D-14 .1079136779936D-12	.2081567270607D-24
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	73	.100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .999999999999D+00 .999999999998D+00	.3774758283726D-13 -.5662137425588D-13 -.1110223024625D-13 -.1332267629550D-14 -.1554312234475D-13 .5817568649036D-13 .4440892098501D-14 .9547918011776D-14 .6661338147751D-14 -.5284661597216D-13 -.3885780586188D-13 .9214851104389D-14 .4884981308351D-13 -.1998401444325D-13 -.4884981308351D-13 .7549516567451D-13	.2379624805098D-25
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	14	.1000000461937D+01 .1000001136408D+01 .1000000461948D+01 .1000001136402D+01 .1000000461937D+01 .1000001136408D+01 .1000000461947D+01 .1000001136403D+01 .1000000461960D+01 .1000001136395D+01 .1000000461974D+01 .1000001136386D+01 .1000000461961D+01 .1000001136395D+01 .1000000462060D+01 .1000001136353D+01	.2125336582271D-05 -.4619371150039D-06 .2125064553108D-05 -.4619476430268D-06 .2125337357206D-05 -.4619371123393D-06 .2125082802959D-05 -.4619471409839D-06 .2124755529078D-05 -.4619598488187D-06 .2124379445338D-05 -.4619739717437D-06 .2124733739833D-05 -.4619606508438D-06 .2122324610463D-05 -.4620600504435D-06	.3781961661324D-10
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	14	.1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01 .1000000462274D+01 .1000001137007D+01	.2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06 .2124583179593D-05 -.4622740144011D-06	.3782040761120D-10

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	23	.99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00 .99999999998D+00	.1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12 .1796340853844D-11 .1745270594711D-12	.2605840126140D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	41	.999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00	.9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12 .9094947017729D-11 .4547473508865D-12	.6633988512675D-21
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	41	.999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00 .999999999995D+00	.4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12 .4547473508865D-11 .4547473508865D-12	.1670904837357D-21
ADAMS MODIF. h = 0.75	52	.100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01 .999999999977D+00 .100000000000D+01	-.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12 -.2846167745929D-10 -.2582378755278D-12	.6481070164776D-20
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	.9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00 .1000000057345D+01 .9999999937331D+00	.6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08 .6987865682167D-06 .6266924090781D-08	.3906735538062D-11

PROBLEMA 14

$$X(i) = 10.0 \quad i = 1, 16$$

MÉTODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	38	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01	-.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12 -.8881784197001D-14 -.1507682867441D-12	.1824796990262D-24
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.			
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.			
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	35	.1000000070994D+01 .1000000142759D+01 .1000000074493D+01 .1000000149787D+01 .1000000067816D+01 .1000000136375D+01 .1000000071197D+01 .1000000143167D+01 .1000000067821D+01 .1000000136387D+01 .1000000119036D+01 .1000000239211D+01 .1000000146890D+01 .1000000295094D+01 .1000000146890D+01 .1000000295093D+01	.7720251774023D-08 -.7099355547879D-07 -.8019134265045D-08 -.7449276573368D-07 -.7443355461070D-08 -.6781551720181D-07 -.7737779686738D-08 -.7119657552401D-07 -.7443850612949D-08 -.6782125483440D-07 -.1137763036129D-07 -.1190363787540D-06 -.1313355607970D-07 -.1468904544666D-06 -.1313352055365D-07 -.1468899666346D-06	.8294903041019D-13
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	29	.1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01 .1000000200070D+01 .1000000386079D+01	-.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06 -.1406209643639D-06 -.2000703633875D-06	.4784192473974D-12

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	25	.999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00	.1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12	.3156179480197D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	48	.100000000000D+01 .100000000000D+01	.4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13	.1759496567586D-21
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	.999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00	.6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12	.3159054458128D-21
ADAMS MODIF. h = 0.75	66	.100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01	-.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14	.1916862524707D-21
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	.9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00	.7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07	.4824809376912D-07

PROBLEMA 14

PROBLEMA N° 14 Valores Iniciales $X(i) = -10.0 \quad i = 1, 16$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	40	.9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00 .9999999962303D+00 .9999999874339D+00	-.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08 -.5026742925011D-07 .3769673795340D-08	.2032819907150D-13
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	FALLO: ERROR from DUMINF. Maximun number iterations exceeded.			
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	FALLO: ERROR from DUMING. Maximun number iterations exceeded.			
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	31	.9999997658677D+00 .9999995484519D+00 .9999998010063D+00 .9999996176197D+00 .1000000304787D+01 .1000000608054D+01 .1000000294787D+01 .1000000588419D+01 .1000000294762D+01 .1000000588370D+01 .9999997901623D+00 .9999995962701D+00 .1000000219837D+01 .1000000441241D+01 .9999991406326D+00 .9999983158341D+00	.1671646379582D-06 .2341323303012D-06 .1560701682653D-06 .1989936945224D-06 -.1519378037013D-07 -.3047865984040D-06 -.1154396214037D-07 -.2947867852043D-06 -.1154478800102D-07 -.2947620731941D-06 .1594555480944D-06 .2098377305249D-06 .1567654750261D-07 -.2198366646500D-06 .3456816145245D-06 .8593674117874D-06	.1389934532702D-11
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	27	.999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01 .999999997765D+00 .1000000000499D+01	.9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09 .9459537597136D-08 .2234913365484D-09	.7162623994331D-15

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	25	.999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00 .999999999999D+00	.1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12 .1980637875931D-11 .1493249968121D-12	.3156179480197D-22
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	48	.100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01 .100000000000D+01	.4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13 .4689582056017D-11 .3907985046681D-13	.1759496567586D-21
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	44	.999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00 .999999999994D+00	.6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12 .6252776074689D-11 .6252776074689D-12	.3159054458128D-21
ADAMS MODIF. h = 0.75	66	.100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01 .999999999995D+00 .100000000000D+01	-.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14 -.4894973315572D-11 -.4218847493576D-14	.1916862524707D-21
MILNE SIMPSON h = 0.75	201	.9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00 .1000007628083D+01 .9999999310638D+00	.7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07 .7765955812999D-04 .6893616477655D-07	.4824809376912D-07

PROBLEMA 14

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	12	.9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00 .9999999981469D+00 .9999999962897D+00	-.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08 -.4012682493140D-10 .1853141529118D-08	.2748594951216D-16
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	72	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .9999999999997D+00 .9999999999994D+00 .9999999999999D+00 .9999999999999D+00 .9999999999998D+00 .9999999999997D+00 .9999999999999D+00 .9999999999998D+00 .9999999999997D+00 .9999999999999D+00 .9999999999999D+00 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .9999999999999D+00	-.4218847493576D-13 -.4285460875053D-13 .2220446049250D-13 -.5551115123126D-13 -.2331468351713D-13 .2789990460883D-12 .1443289932013D-12 .8115730310010D-13 -.9547918011776D-13 .1674216321135D-12 -.1887379141863D-13 .5573319583618D-13 .1243449787580D-12 -.6905587213168D-13 .9547918011776D-13 .4030109579389D-13	.1845718444285D-24
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	64	.1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .9999999999999D+00 .9999999999998D+00 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .1000000000000D+01 .9999999999999D+00 .9999999999998D+00 .1000000000000D+01 .9999999999999D+00	-.5551115123126D-13 -.1536548666081D-12 .8215650382226D-13 -.1205702204743D-12 .8770761894539D-13 .8504308368629D-13 .1953992523340D-12 -.1172395514004D-12 .1598721155460D-12 -.1241229341531D-12 .1110223024625D-12 .2220446049250D-14 -.3108624468950D-13 .7838174553854D-13 -.1243449787580D-12 .3164135620182D-13	.1916984878020D-24
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	17	.9999999799397D+00 .9999999681556D+00 .9999999798267D+00 .9999999682068D+00 .1000000003172D+01 .9999999573561D+00 .9999999891892D+00 .9999999638330D+00 .9999999646165D+00 .9999999755484D+00 .9999999658749D+00 .9999999746989D+00 .9999999658933D+00 .9999999747050D+00 .1000000003275D+01 .9999999568532D+00	.8276248283977D-07 .2006032095991D-07 .8553507050920D-07 .2017334477245D-07 -.4898861606271D-06 -.3172336837665D-08 -.1454543319709D-06 .1081079270548D-07 .4631538216539D-06 .3538349413468D-07 .4294920635925D-06 .3412513871481D-07 .4291845329374D-06 .3410672799742D-07 -.4969710688492D-06 -.3275146820414D-08	.1109992621210D-11
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	17	.9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00 .9999999861602D+00 .9999999772248D+00	.4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07 .4904366499015D-07 .1383975900549D-07	.2077456003997D-13

PROBLEMA 15

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = 0.0000$ $i = 1,11$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	2	-.2641374118247D-02 -.3534528361918D-03 -.1412007369630D-01 .1414069274068D-01 -.8734959320891D-04 -.1430599786173D-01 -.1663982152167D-03 .3525915414925D-04 .3968375647843D-05 -.1488994356237D-04 -.1271474507742D-02	.9927688296032D+00 .1029820913144D+01 .9293130933035D+00 .1056316932722D+01 .1014209238943D+01 .9570928292888D+00 .1013736229531D+01 .1000264236440D+01 .1000006425828D+01 .1002494310366D+01 .9961972331255D+00	.1099580272122D+02
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	31	-.5707468908793D+00 -.6818723497675D+00 -.7023849805889D+00 -.7059859569566D+00 -.7062026165603D+00 -.7050330819988D+00 -.7015199614308D+00 -.6918936574325D+00 -.6657973386287D+00 -.5960352753520D+00 -.4164122931777D+00	.2556657142938D-13 .1573003879929D-13 -.9611452259084D-14 .4949686494005D-13 .6954419679017D-13 -.9822112741198D-13 -.1269353545885D-12 .1049581428714D-12 .9497264086278D-13 .1361419657564D-12 .9584021944120D-13	.8179576954050D-25
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	3	-.8921210447084D-01 -.1912017522305D+00 -.1084866584232D+00 .1283202393493D+00 -.4676317076253D-01 -.2104956792927D+00 -.9007609228710D-01 .1984133934505D-01 .1803758122277D-02 -.8120176282622D-02 -.1904991920146D-01	.1098849591880D+01 .6594639445137D+00 .5855625881507D+00 .1554041550343D+01 .1148008018669D+01 .5068114554567D+00 .8843573189379D+00 .1145205236584D+01 .1001803780500D+01 .1011803676907D+01 .9502446198351D+00	.1099897730104D+02
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	47	-.5585946460693D+00 -.6497070738826D+00 -.6162686457679D+00 -.4735251132400D+00 -.9684815803997D-01 .7150172246967D+00 .1500844257570D+01 -.6985553986222D-01 -.5084207857797D+00 -.5504903225574D+00 -.4015356282789D+00	-.4257476770783D-03 -.2227847748876D-02 -.1162272445435D-01 -.5906244361017D-01 -.2658129417048D+00 -.7822879462366D+00 .4221596850229D+00 .2966710551850D+00 .1285904509360D+00 .5394188420655D-01 .2342171616596D-01	.9724858777156D+00
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	FALLO: ERROR 1 from DUMCGG. The line search of an integration was abandoned. An error in the gradient may be the cause.			

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = 0.0000$ $i = 1, 11$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	51	-.9675027600830D+00 -.9111515454380D+00 .7098153620300D+00 .1835667752088D+01 .2313229637135D+01 .1318582969235D+01 -.1454440830332D+00 .1122946424620D+01 .1497537244693D+01 -.2815865093365D-01 -.2876986205295D+00	-.1952328370910D+01 -.3845976877799D+01 -.6384135689964D+00 -.5568623572150D+01 -.7235207487395D+01 -.5439146568775D+00 -.3043116030154D+01 -.1002808477626D+01 -.5925298715886D-01 -.8201775679685D-02 -.4782031639295D-03	.1129340935555D+03
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	201	.5523068369681D+00 .9099789599191D+00 .3685722081994D+00 .2415425926705D+01 .1308941580955D+01 -.2721222607680D+00 -.6196167976811D+00 -.6766118270889D+00 -.6628888912029D+00 -.5954482323458D+00 -.4162864647283D+00	.2268769067427D+00 .7843622113995D+00 -.3906805134046D+01 -.6408742404795D+01 -.3710127870109D+00 -.3417581750802D-01 -.1354430034549D-02 -.4803029281040D-04 -.1745988450418D-05 -.7118562203069D-07 -.3271030251674D-08	.5714062308733D+02
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	42	-.5707468908797D+00 -.6818723497680D+00 -.7023849805895D+00 -.7059859569571D+00 -.7062026165608D+00 -.7050330819991D+00 -.7015199614310D+00 -.6918936574327D+00 -.6657973386288D+00 -.5960352753520D+00 -.4164122931776D+00	-.7172749807299D-12 -.1514261589383D-11 -.1734494926159D-11 -.1645264220002D-11 -.1411224869602D-11 -.1116999505044D-11 -.8040595099457D-12 -.4872059786859D-12 -.1784813616346D-12 -.9216650879995D-13 .2389196696387D-12	.1274339631994D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	201	.4330751888112D+01 .7545040175219D+01 .1355871494780D+00 -.6384465337037D+00 -.6972543247518D+00 -.7035107641179D+00 -.7012439206896D+00 -.6918425599439D+00 -.6657876287852D+00 -.5960333161630D+00 -.4164118732708D+00	-.3860864851887D+02 -.9482206815274D+02 -.4898153409584D+01 -.4716460538820D+00 -.1862209908571D-01 -.6449166824911D-03 -.2195067137087D-04 -.7570711747984D-06 -.2737264531271D-07 -.1114715694533D-08 -.5120875490143D-10	.1050606705324D+05
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	.1328331707890D+03 -.1066477802883D+03 .1697059315713D+03 .8192575768342D+02 -.1070816066998D+03 -.8180263092894D+02 .2201980711597D+02 .4735304120532D+02 -.6025261932688D+02 .2169969302787D+03 .6970389118131D+02	-.3467650745077D+05 -.2353868645562D+05 -.5714729236130D+05 -.1313242498913D+05 -.2317150630277D+05 -.1356470675411D+05 -.9155878409832D+03 -.4243076467631D+04 -.7921861031243D+04 -.9360249987294D+05 -.9724150148368D+04	.1485330847280D+11

PROBLEMA 15

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = -1.0000$ $i = 1,11$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	3	-.8852864511694D+00 -.1076059203379D+01 -.8979644989000D+00 -.1091762039110D+01 -.9161901231172D+00 -.8735702661329D+00 -.9798934162540D+00 -.9900866847734D+00 -.9922707707695D+00 -.9971187892770D+00 -.9370081986903D+00	-.1071205147998D+01 -.1862768979520D+01 -.4699069767048D-01 -.1928830072280D+01 -.5884764813706D+00 -.2709838625165D+00 -.1006318827518D+01 -.9663683832583D+00 -.9616906140279D+00 -.1113560959539D+01 -.2569874535620D+01	.1947538654776D+02
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	24	-.5707468908793D+00 -.6818723497675D+00 -.7023849805889D+00 -.7059859569566D+00 -.7062026165603D+00 -.7050330819988D+00 -.7015199614308D+00 -.6918936574325D+00 -.6657973386288D+00 -.5960352753520D+00 -.4164122931777D+00	.6990848872013D-13 -.1013115372844D-12 .5526785626375D-13 -.2908502431953D-13 .6581801076377D-13 .4723283396346D-13 -.3339581215733D-13 -.4746311850490D-13 -.9458254492112D-13 .6085821950552D-13 .2895220955340D-13	.4247048911387D-25
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	10	-.6178978954149D+00 -.5787203529599D+00 -.7407903957986D+00 -.7936929081003D+00 -.8812106579218D+00 -.9441655835281D+00 -.7957772360626D+00 -.4443522609487D+00 -.7274708017687D-02 .4176530595623D+00 .9668067861289D-01	-.4598485986412D+00 .6934831342725D+00 -.1538058392502D+00 -.1377638773962D+00 -.5146723458788D+00 -.1142628918775D+01 -.8209844216333D+00 .8237200563151D-01 .5871161750175D+00 .1718004373155D+01 .8536946690423D+00	.7011342767905D+01
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	23	-.5707468900349D+00 -.6818723414789D+00 -.7023849714209D+00 -.7059859529965D+00 -.7062026100552D+00 -.7050330707561D+00 -.7015199608873D+00 -.6918936632143D+00 -.6657973532912D+00 -.5960352861512D+00 -.4164123000948D+00	-.1211558823449D-07 .2829186181315D-07 .3705337383556D-07 .8850464174471D-09 .1144538343636D-07 .5784208727722D-07 .3475979139071D-08 -.4565339017200D-08 -.5565623702164D-07 -.2964736423635D-07 -.2147376962315D-07	.1026828706419D-13
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	FALLO: ERROR 1 from DUMCGG. The line search of an integration was abandoned. An error in the gradient may be the cause.			

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = -1.0000$ $i = 1,11$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F(x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	22	-.5707468908796D+00 -.6818723497677D+00 -.7023849805891D+00 -.7059859569568D+00 -.7062026165605D+00 -.7050330819990D+00 -.7015199614309D+00 -.6918936574327D+00 -.6657973386290D+00 -.5960352753523D+00 -.4164122931780D+00	-.9851219232720D-12 -.4793305509454D-12 -.4974568933863D-12 -.5007298829046D-12 -.5005759261961D-12 -.4993989163177D-12 -.4970620269551D-12 -.4887425100047D-12 -.4667152081472D-12 -.3971001045350D-12 -.1391065322827D-11	.4994906503334D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	40	-.5707468908797D+00 -.6818723497677D+00 -.7023849805892D+00 -.7059859569568D+00 -.7062026165605D+00 -.7050330819990D+00 -.7015199614310D+00 -.6918936574328D+00 -.6657973386290D+00 -.5960352753524D+00 -.4164122931782D+00	-.1327000575396D-11 -.6413869001881D-12 -.6703144983522D-12 -.6750082263973D-12 -.6757767088972D-12 -.6735122442397D-12 -.6705055347750D-12 -.6613520495136D-12 -.6303456021040D-12 -.5203736747061D-12 -.1870078636217D-11	.9039840869281D-23
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	40	-.5707468908797D+00 -.6818723497678D+00 -.7023849805892D+00 -.7059859569569D+00 -.7062026165606D+00 -.7050330819991D+00 -.7015199614310D+00 -.6918936574328D+00 -.6657973386291D+00 -.5960352753524D+00 -.4164122931782D+00	-.1493302226666D-11 -.7310801269922D-12 -.7526457755647D-12 -.7558378836009D-12 -.7565204972887D-12 -.7553528115489D-12 -.7525145871018D-12 -.7419767925065D-12 -.7146232390565D-12 -.6279891971023D-12 -.2133391662114D-11	.1161830194861D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	52	-.5707468908800D+00 -.6818723497680D+00 -.7023849805894D+00 -.7059859569570D+00 -.7062026165608D+00 -.7050330819993D+00 -.7015199614312D+00 -.6918936574330D+00 -.6657973386294D+00 -.5960352753528D+00 -.4164122931787D+00	-.2630048089036D-11 -.1318649182902D-11 -.1313412269568D-11 -.1313187189197D-11 -.1312912669207D-11 -.1313211258486D-11 -.1313660985547D-11 -.1314828237606D-11 -.1320445489061D-11 -.1336962224957D-11 -.3963487524294D-11	.3824852060345D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	75	-.5707468908795D+00 -.6818723497675D+00 -.7023849805890D+00 -.7059859569567D+00 -.7062026165604D+00 -.7050330819989D+00 -.7015199614308D+00 -.6918936574326D+00 -.6657973386289D+00 -.5960352753521D+00 -.4164122931778D+00	-.4286367268069D-12 -.1129092479235D-12 -.2177479117155D-12 -.2167909948780D-12 -.2178652223905D-12 -.2236956279933D-12 -.2417586530273D-12 -.2770320865070D-12 -.3002418192538D-12 -.5772292366313D-14 -.6625093269125D-12	.1052686520364D-23

PROBLEMA 15

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = -10.0000$ $i = 1,11$

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	1	-.8852864511694D+00 -.1076059203379D+01 -.8979644989000D+00 -.1091762039110D+01 -.9161901231172D+00 -.8735702661329D+00 -.9798934162540D+00 -.9900866847734D+00 -.9922707707695D+00 -.9971187892770D+00 -.9370081986903D+00	-.1071205147998D+01 -.1862768979520D+01 -.4699069767048D-01 -.1928830072280D+01 -.5884764813706D+00 -.2709838625165D+00 -.1006318827518D+01 -.9663683832583D+00 -.9616906140279D+00 -.1113560959539D+01 -.2569874535620D+01	.1947538654776D+02
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	61	.1069064995524D+01 .9845129341147D+00 .4425765369945D+00 .4566152910519D+00 .7924158547819D+00 .9143793785406D+00 .5508040238464D+00 .4598279256030D+00 .7955306872390D+00 .1149637186165D+01 .2616399360276D+00	-.4763081096686D-01 .6078929795273D-01 .3823811256900D-01 -.7455742144748D-01 -.1639722576069D+00 .1769349373464D+00 .2116066964218D+00 -.1852650638442D+00 -.6382483848948D+00 .4867696795734D+00 .4983717096682D+00	.1042958489185D+01
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	1	-.6178978954149D+00 -.5787203529599D+00 -.7407903957986D+00 -.7936929081003D+00 -.8812106579218D+00 -.9441655835281D+00 -.7957772360626D+00 -.4443522609487D+00 -.7274708017687D-02 .4176530595623D+00 .9668067861289D-01	-.4598485986412D+00 .6934831342725D+00 -.1538053392502D+00 -.1377633773962D+00 -.5146723458788D+00 -.1142623918775D+01 -.8209844216333D+00 .8237203563151D-01 .5871161750175D+00 .1718004373155D+01 .8536945690423D+00	.7011342767905D+01
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	40	.1069065503488D+01 .9845126029531D+00 .4425763614894D+00 .4566152973404D+00 .7924158729096D+00 .9143793648796D+00 .5508040495042D+00 .4598279513577D+00 .7955307144555D+00 .1149637125829D+01 .2616399498156D+00	-.4763073693773D-01 .6078945164596D-01 .3823821533592D-01 -.7455727481801D-01 -.163972396490D+00 .1769343768855D+00 .2116066790172D+00 -.1852651140418D+00 -.6382482949325D+00 .4867697212323D+00 .4983717969391D+00	.1042958489185D+01
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	FALLO: ERROR 1 from DUMCGG. The line search of an integration was abandoned. An error in the gradient may be the cause.			

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = -10.0000$ $i = 1, 11$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	25	-.5707468908796D+00 -.6818723497677D+00 -.7023849805891D+00 -.7059859569568D+00 -.7062026165605D+00 -.7050330819990D+00 -.7015199614310D+00 -.6918936574327D+00 -.6657973386290D+00 -.5960352753523D+00 -.4164122931779D+00	-.6572808703559D-12 -.5794867623948D-12 -.5857942169535D-12 -.5878557189642D-12 -.5878002078130D-12 -.5871858988621D-12 -.5853030733693D-12 -.5802335608512D-12 -.5695105845249D-12 -.5470430965854D-12 -.7201242640392D-12	.3968276709289D-23
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	45	-.5707468908797D+00 -.6818723497679D+00 -.7023849805893D+00 -.7059859569570D+00 -.7062026165607D+00 -.7050330819992D+00 -.7015199614312D+00 -.6918936574329D+00 -.6657973386292D+00 -.5960352753525D+00 -.4164122931781D+00	-.1273205716204D-11 -.1114817873432D-11 -.1130943212344D-11 -.1134080676590D-11 -.1134950857254D-11 -.1132633049850D-11 -.1128674194037D-11 -.1120194648846D-11 -.1098064781463D-11 -.1045088928592D-11 -.1394616301782D-11	.1477166754099D-22
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	45	-.5707468908798D+00 -.6818723497680D+00 -.7023849805894D+00 -.7059859569571D+00 -.7062026165608D+00 -.7050330819993D+00 -.7015199614312D+00 -.6918936574330D+00 -.6657973386293D+00 -.5960352753526D+00 -.4164122931782D+00	-.1544298760051D-11 -.1356108367961D-11 -.1373819244130D-11 -.1377464331834D-11 -.1377965016397D-11 -.1376294044009D-11 -.1372475483957D-11 -.1360318975518D-11 -.1333530725081D-11 -.1273504522323D-11 -.1691849676848D-11	.2179827871033D-22
ADAMS MODIF. h = 0.5	61	-.5707468908803D+00 -.6818723497685D+00 -.7023849805900D+00 -.7059859569576D+00 -.7062026165613D+00 -.7050330819998D+00 -.7015199614318D+00 -.6918936574336D+00 -.6657973386299D+00 -.5960352753531D+00 -.4164122931786D+00	-.3067513257293D-11 -.2932139774037D-11 -.2930767824608D-11 -.2930450587052D-11 -.2930221603553D-11 -.2930366669804D-11 -.2931338331791D-11 -.2932373094344D-11 -.2935597728446D-11 -.2940038403704D-11 -.3205661864430D-11	.9708665359593D-22
MILNE SIMPSON h = 0.5	85	-.5707468908794D+00 -.6818723497676D+00 -.7023849805891D+00 -.7059859569567D+00 -.7062026165604D+00 -.7050330819989D+00 -.7015199614309D+00 -.6918936574327D+00 -.6657973386289D+00 -.5960352753522D+00 -.4164122931777D+00	-.1770985701838D-12 -.4287835277811D-12 -.3871581874537D-12 -.3793909630900D-12 -.3806516733762D-12 -.3844257811386D-12 -.3965350183627D-12 -.4210848249947D-12 -.4711632559801D-12 -.6055286480566D-12 -.1637210332583D-13	.1725207313692D-23

PROBLEMA 15

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = 0.5000 \quad i = 1,11$

MÉTODOS DE OPTIMIZACION

MÉTODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.	38	.5129910815208D+00 .5017436804815D+00 .4460988672239D+00 .5814838181547D+00 .5317222788936D+00 .4445972797097D+00 .5107134319581D+00 .5139188135258D+00 .5137327698393D+00 .5260894330425D+00 .4931660590208D+00	.1009166184160D+01 .5965487836697D+00 .2755768862039D+00 .5586611679015D+00 .5590312953632D+00 .3853092140688D+00 .5380489699481D+00 .4753523751493D+00 .4472579122934D+00 .5246632281286D+00 .1466983220480D+01	.5366118425772D+01
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.	57	.1069064996528D+01 .9845129338175D+00 .4425765361569D+00 .4566152900179D+00 .7924158548416D+00 .9143793794764D+00 .5508040236607D+00 .4598279252548D+00 .7955306875047D+00 .1149637186044D+01 .2616399358104D+00	-.4763081165449D-01 .6078929890224D-01 .3823811390411D-01 -.7455742194261D-01 -.1639722584546D+00 .1769349370429D+00 .2116066960344D+00 -.1852650645939D+00 -.6382483843531D+00 .4867696799355D+00 .4983717093650D+00	.1042958489185D+01
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.	13	-.4595723996016D+00 -.2854261276770D+00 .3556435353106D+00 .1498341210470D+01 .2918622052415D+00 -.1901081293444D+00 -.7804734572496D-02 .3303532694311D+00 .8385776825193D+00 .1137700105110D+01 .2664716214399D+00	-.2302785244022D+00 -.2709292027717D+00 -.8972903357474D+00 .6560291963150D-01 .5870945702465D+00 .8114067418477D-01 .5058655590011D+00 .1034426125796D+00 -.4964454913325D+00 .4528563315959D+00 .5197005091440D+00	.2275354304842D+01
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.	40	.1069065503488D+01 .9845126029531D+00 .4425763614894D+00 .4566152973404D+00 .7924158729096D+00 .9143793648796D+00 .5508040495042D+00 .4598279513577D+00 .7955307144555D+00 .1149637125829D+01 .2616399498156D+00	-.4763079693773D-01 .6078945164596D-01 .3823821533592D-01 -.7455727481801D-01 -.1639722396490D+00 .1769348768855D+00 .2116066790172D+00 -.1852651140418D+00 -.6382482949325D+00 .4867697212323D+00 .4983717969391D+00	.1042958489185D+01
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.	FALLO: ERROR 1 from DUMCGG. The line search of an integration was abandoned. An error in the gradient may be the cause.			

PROBLEMA N° 15 Valores Iniciales $X(i) = 0.5000$ $i = 1, 11$

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	MINIMO	F(MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4 h = 1.75	51	.2817276850628D+01 .2970264285222D+01 -.1480329440498D+01 -.2624061465734D+00 -.4975168398466D+00 -.2937298381665D+01 -.5573920413312D+00 .2970159331684D+01 -.5947532158331D+00 .1913735253558D+01 .3453796590310D+00	-.1236279572473D+02 -.7590764962096D+01 -.1026919081838D+02 .2550430708953D+01 .5149406378501D+01 -.2345503778834D+02 -.4296568181175D+01 -.5986316443128D+01 -.8289352261788D+01 -.6795655829779D+00 -.1161704942100D+00	.1022559739988D+04
EULER MODIF O CAUCHY h = 1.0	201	-.9763184090299D+00 -.1819084994464D+01 .2871065448765D+01 -.1459265650304D+01 .3636015744469D+01 -.7789335149920D+00 -.2046291805168D+01 -.2054747415059D-01 -.5315718855210D+00 -.5686578415973D+00 -.4105304275256D+00	-.1971805097839D+00 -.1584120790606D+02 -.2135220980818D+01 -.1777980636493D+02 -.1151604107436D+02 -.1027887474134D+02 -.4157164249987D+00 -.4563485396580D-01 -.1989838170581D-02 -.8426583959403D-04 -.3904828411540D-05	.8101128057144D+03
EULER MEJOR. O HEUN h = 1.0	201	.2609344040266D+01 -.2307044511961D+01 -.4818307504738D+01 .2587295668355D+01 -.1346917965754D+00 .2404490480183D+01 .1539093718129D+01 -.1953440029502D+00 .6724183248191D+00 .1501169282969D+01 .1878870022563D+00	-.1752314962224D+00 -.9538771327006D+01 -.6275464375938D+02 .4613803519731D+00 -.6836635778576D+01 -.6293173137714D+01 -.1134140266264D+01 -.2546280935596D+01 -.6940323956361D+00 -.5170291268500D-01 -.8111327434076D-02	.4123974907310D+04
ADAMS MODIF. h = 0.5	201	.1827542068431D+01 -.9552354653945D-01 -.5519156937884D+00 -.5315341492830D+00 -.1266518386194D-02 .2645659779943D+01 -.3811952008809D+00 .3598025480795D+00 .1692044894524D+01 .2631232922542D-01 -.2756341446680D+00	-.6146725397452D-02 -.2853081635922D-01 -.1063771023598D+00 -.6052108209963D+00 -.3763588173900D+01 -.4298395082442D+01 -.3799470041094D+01 -.1182402691138D+01 -.6232437312861D-01 -.6322429485055D-01 -.5163126643021D-02	.4886120125696D+02
MILNE SIMPSON h = 0.5	201	.2930705676371D+02 .5940048337284D+02 .6046619544306D+02 -.6120879515136D+02 .2259537401170D+02 .5999989961603D+02 .4235375383609D+02 -.8671772388473D+02 -.4918065673148D+02 .9374371653889D+02 .2853816945514D+02	-.1747686948757D+04 -.7027872847385D+04 -.7066905889458D+04 -.7781316536682D+04 -.1011106735503D+04 -.7126279090702D+04 -.3346184118354D+04 -.1524307288352D+05 -.5084785672468D+04 -.1730143331361D+05 -.1635983439874D+04	.7861609437756D+09

PROBLEMA 16

PROBLEMA N° 16:

METODOS DE OPTIMIZACION

METODOS	ITERAC	MINIMO	F (MINIMO)	$\ F(x)\ ^2$
DUMIDH (Newton Modif) hessiano est.			FALLO : ERROR 3 from DUMIDH. Maximun number of iteration exceeded.	
DUMINF (Quasi Newton) grad. est.			FALLO : ERROR 3 from DUMINF. Maximun number of iteration exceeded.	
DUMING (Quasi Newton) grad. calc.			FALLO : ERROR 3 from DUMING. Maximun number of iteration exceeded.	
DUMCGF (Grad. Conjug) grad. est.			FALLO : ERROR 3 from DUMCGF. The maximun number of function evaluations has been exceeded.	
DUMCGG (Grad. Conjug) grad. calc.			FALLO : ERROR 3 from DUMCGG. The maximun number of function evaluations has been exceeded.	

PROBLEMA N° 16:

METODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

METODOS	ITERAC	SOLUCION ESTIMADA X	F (x)	$\ F(x)\ ^2$
RUNGE KUTTA Orden 4		FALLO : exp: OVERFLOW error		
EULER MODIF O CAUCHY		FALLO : exp: OVERFLOW error		
EULER MEJOR. O HEUN		FALLO : exp: OVERFLOW error		
ADAMS MODIF.		No se pudo procesar por no tener valores iniciales de Runge Kutta.		
MILNE SIMPSON		No se pudo procesar por no tener valores iniciales de Runge Kutta.		

Dep. de Computación
F.C.E.N. - U.B.A.
BIBLIOTECA