



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Certificación de Teleportación Cuántica en Escenarios con Ruido:

Desarrollo de una Herramienta de Qiskit para Estimar la Distancia Media de Teleportación en Simuladores y Computadoras Cuánticas

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Patricio Damián Bruno

Director: Gustavo Martín Bosyk, Investigador Independiente, ICC-CONICET/UBA

Codirector: Guido Bellomo, Investigador Asistente, ICC-CONICET/UBA

Buenos Aires, 2024

CERTIFICACIÓN DE TELEPORTACIÓN CUÁNTICA EN ESCENARIOS CON RUIDO: DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA DE QISKIT PARA ESTIMAR LA DISTANCIA MEDIA DE TELEPORTACIÓN EN SIMULADORES Y COMPUTADORAS CUÁNTICAS

La teleportación cuántica es un protocolo fundamental en la computación cuántica, el cual permite la transferencia de estados cuánticos entre sistemas distantes. En condiciones ideales, el estado transferido permanece inalterado, pero en aplicaciones prácticas, el ruido ambiental afecta el proceso, alterando el estado recibido. En este trabajo se estudia el desempeño de la teleportación cuántica en escenarios con diferentes tipos y niveles de ruido. Se evalúan la certificación cuántica y el rendimiento del protocolo mediante distintas métricas. Asimismo, se presenta una herramienta basada en Qiskit para estimar experimentalmente la distancia media de teleportación en entornos ruidosos. Los resultados obtenidos en simuladores y computadoras cuánticas reales confirman su correcto funcionamiento.

Palabras claves: Teleportación cuántica, ruido cuántico, computación cuántica, Qiskit, certificación de teleportación.

QUANTUM TELEPORTATION CERTIFICATION IN NOISY SCENARIOS: DEVELOPMENT OF A QISKIT TOOL TO ESTIMATE THE AVERAGE DISTANCE OF TELEPORTATION IN SIMULATORS AND QUANTUM COMPUTERS

Quantum teleportation is a key protocol in quantum computing, allowing the transfer of quantum states between distant systems. In ideal conditions, the transferred state remains unchanged; however, in practical applications, environmental noise affects the process, altering the received state. In this work, the performance of quantum teleportation in various noisy scenarios is studied, assessing the protocol's accuracy using multiple metrics. A Qiskit-based tool is developed to experimentally estimate the average distance of teleportation under noisy conditions. Results obtained from simulators and real quantum computers confirm its correct operation.

Keywords: Quantum teleportation, quantum noise, quantum computing, Qiskit, teleportation certification.

AGRADECIMIENTOS

Muchas gracias a Absolut Carmelo, a Titi Sixsix Buenavista, a Wermer Guglielmiwermer. Gracias a Cuanta Carla, a Joaquín Menester Gagliardi, a Sergio Berrebenecheabeond, a Toribio Thunderbolt y su primo Pepe Crostibolt, a Larita Biconti Simplify. A la banda de Joca Brandão, Eurico Krobol, Paco del Tomate y Brando Müller. Gracias totales a However Claudia, a Radamel Ludueña, a Oscar Evil Lafuente. No quiero dejar de agradecer a Ricky Mastermind Saw Jesus, a Donovan Amnesty Patriotic Massinger, a Calipso Rigged Lawyers, a Muriel Pickme Lover, a Perez Microbiotic Hibaldi, a Peaceful Robert Really Matters, a Anyways Miguel Sanchez Albasiempre, a Ursula Neverending, a Erick Thumbnail. Mil millones de gracias a Héctor Francamente Grimoldi, a Gianfranco Isaac Garibaldi, a Vector Hugo Morales, a Micaela Twin Towers, a Flip Flop el Memorioso, a Tupac Amarok Dulcinea. Gracias a la Terna Terrible: Tarugo Wilkinson, Bujía Bulbasor y Tutuca Tutucson, los primordiales. Gracias a vos; Brostiblock Nocturno, pero también a tus amigos, John Acaso, Eros Tobaldi, Claudia la de las Filminas, Bruno “El Sucio” Ademita, Dan Astroparlante, Pietro Del Sufragio, Triángulo Bermudez Ben Yamad y Killer Anchorena Alvear. Muchas gracias también a Pepo On Demand, a Cintia Plácidamente, a Emil Emil Emil Emilse Emil Emil, a Tinchito Corderoy, al Turco Arritmia, a Simil Azafrán, a Percibus Windmill McMorrison O’Brien O’Sullivan, Al Picu Gomez, a Gilmychel Mac Eth, a Eugenio Lamar Endian, a Fede “El Tutu” McMellany, a Dreyfus Galileo I’m Sorry Colapinto, a Pucara Alazamendi y a Esteban Cáceres Di López Cáceres. Sería un verdadero ingrato si no le diera las gracias correspondientes a Jeremías Maj7, Gilton Doutorado da Silva, Teodolfo Again Teodolfo, Ernesto Jordan, Noblex Giulietta, Benny Mil Millers, Mirna La Válvula, Bastian Casperfield, Minerva Lanusse, Tuti Minessota, Catramado Killer, Nahir My Dynasty, Marcelo Polinomio, El Tano Menéndez, El Tano Norberto Di Próspero, El Petiso “Chicos Pórtense Bien Que Llegó Ottavis” Ottavis, El Tano Claroscuro, Gino Dino McDino Gándara y a Mr. Candy Love. Sumamente determinantes durante este proceso fueron Kevin Así No, Tito Dermaglock, Gladys “Gitana Lenta” Sinsabores, Juan Carlos “Johnny Tuki” Jaume Jackson, Xenofon Flores, Tomtom Medison, Ludovica Squirrel, Ulises Roadkill, Baltimore Pese A Quien Le Pese, Aristófanes Braquiodéico, Desmechalo Sasha, Baker Baclini, Debora Pilbor, Samantha Housebrot, Ramiel Setiembre Wander Faucy y Chip Chip El Pensamiento Andante. Por último, pero no por eso menos importante, quiero agradecer a Francis Metacarpiano The Third y a Winterpolo Zlotowinter The Third, siameses unidos por la empatía.

A vos. Sí, a vos. No, no mires alrededor, te estoy hablando a vos.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	2
2.1. Introducción a la mecánica cuántica	2
2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica	3
2.1.2. Qubit	5
2.1.3. Entrelazamiento	6
2.1.4. Sistemas de dos qubits	7
2.1.5. Canales cuánticos	8
2.1.6. Distancias	10
2.1.7. Tomografía	11
2.1.8. No clonación	12
2.2. Introducción a la computación cuántica	12
2.2.1. Compuertas cuánticas	13
2.2.2. Circuitos cuánticos	14
2.2.3. Qiskit	15
2.2.4. Computadoras Cuánticas	16
3. Protocolo de teleportación cuántica	18
3.1. Protocolo estándar	18
3.2. Esquema con ruidos	19
4. Distancia media de teleportación y certificación	21
4.1. Criterio estándar de certificación	21
4.2. Contradicciones en la certificación	22
4.3. Combatiendo ruido con ruido	24
4.4. Entrelazamiento y certificación	25
5. Estimación experimental de la distancia media de teleportación	27
5.1. Esquema de la herramienta	27
5.1.1. Inicialización	28
5.1.2. Ruidos	28
5.1.3. Corrección Óptima	29
5.1.4. Cambio de base	29
5.2. Resultados simulación	31
5.3. Resultados experimentales	32
6. Conclusiones	35
 Apéndice	 39
A. Contornos distancia media de teleportación	40

B. Regiones separabilidad y certificación 45

C. Resultados de la simulación 50

1. INTRODUCCIÓN

La teleportación cuántica [1] es un protocolo fundamental en el campo de la información, la comunicación y la computación cuántica [2]. El mismo permite transferir el estado de un sistema cuántico desconocido a otro sistema alejado en el espacio, utilizando un par entrelazado previamente distribuido. La imposibilidad de realizar operaciones básicas de la teoría de la información clásica, como el copiado de información [3, 4], lo convierte en una herramienta indispensable a la hora de implementar una amplia gama de algoritmos y técnicas [5-7].

En el caso ideal, al finalizar el protocolo el estado del sistema receptor es exactamente igual al estado a transferir. Sin embargo, en aplicaciones reales, las interacciones del par entrelazado con el ambiente (conocidas como ruido) afectan su funcionamiento, causando que el sistema receptor exhiba un estado típicamente diferente al del emisor. Es por esto de gran interés el estudio del comportamiento del protocolo de teleportación cuántica bajo distintos escenarios de ruido [8-11].

Desde su primera realización experimental en 1997 [12], se han logrado avances significativos en su implementación, tanto en la extensión de las distancias entre los sistemas [13], como en el uso de redes urbanas de fibras óptica para la distribución del canal de comunicación cuántico [14, 15]. Asimismo, gran parte de dichos avances se enfocaron en mejorar la eficacia de la implementación del protocolo. No obstante, la evaluación de su rendimiento resulta no ser un problema trivial.

Históricamente, se utilizó una figura de mérito basada en la fidelidad entre estados cuánticos no solo para cuantificar la eficacia de un protocolo dado, sino para otorgarle certificación cuántica; la cual ocurre cuando el rendimiento del protocolo supera su contraparte clásica dada por el protocolo óptimo de tipo “medir y preparar” [16, 17]. Recientemente, se han introducido otras figuras de mérito basadas en diferentes nociones de distancias entre estados cuánticos [18] y se demostró que diferentes métricas certifican de forma contradictoria un mismo protocolo [19]. Esto nos indica que el criterio utilizado hasta ahora no es universal y que cada figura evalúa distintos aspectos del rendimiento de un protocolo dado.

En este trabajo se lleva a cabo un estudio sistemático del comportamiento del protocolo afectado por distintos tipos de ruidos generalmente encontrados en escenarios reales, empleando diferentes métricas para observar cómo varía su rendimiento y certificación. Como parte de dicho estudio se amplía lo sabido hasta el momento sobre fenómeno conocido como “combatir ruido con ruido” [10] y se discute el rol del entrelazamiento en la certificación de un protocolo. Asimismo, se presenta una herramienta de código abierto [20] que permite estimar experimentalmente la distancia media de teleportación para cualquier protocolo ruidoso y cualquier función de distancia utilizando Qiskit [21]. El correcto funcionamiento de la misma es evaluado ejecutándola tanto en simuladores como en computadoras cuánticas reales y contrastando sus resultados con los valores teóricos esperados.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción a la mecánica cuántica

La mecánica cuántica es esencialmente un marco matemático, un conjunto de reglas que permiten el desarrollo de teorías de la física tales como la teoría cuántica de campos y la electrodinámica cuántica. Como con toda teoría, comenzamos con un conjunto de axiomas o *postulados*, a partir de los cuales se desarrollarán teoremas, algoritmos, protocolos, técnicas y métodos. A diferencia de algunas teorías emblemáticas como las de la relatividad especial y general de Einstein o la ley de gravitación universal de Newton, la concepción de la teoría de la mecánica cuántica no se reduce a una publicación de un solo autor. Por el contrario, fue el resultado de décadas de desarrollo en conjunto, iniciado en 1900 cuando Max Planck describió por primera vez la energía de la radiación térmica en *quanta*, o cantidades discretas [22]. La teoría carecía de un formalismo unificado que abarque todos los hallazgos hechos en el campo hasta que, a principios de la década de 1930 y gracias a los aportes de Dirac, Hilbert y von Neumann, se consolidaron varios de los fundamentos matemáticos que se utilizan hoy en día en el estudio de la mecánica cuántica. Este formalismo matemático utiliza el lenguaje del álgebra lineal, por lo que es necesario poseer conocimientos básicos sobre el estudio de los espacios vectoriales para comprender los postulados de esta teoría y sus subsiguientes resultados.

En su trabajo *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica* de 1932 [23], John von Neumann describió por primera vez de forma rigurosa a la mecánica cuántica como una teoría de operadores hermíticos y espacios de Hilbert. En este formalismo los sistemas físicos se caracterizan en términos de los llamados estados, los observables y su dinámica. En los postulados del próximo apartado trazaremos los paralelismos correspondientes entre estas caracterizaciones y las herramientas matemáticas que las modelan.

Existen varias formulaciones equivalentes para referirse al estado y comportamiento de los sistemas cuánticos, las cuales pueden llegar a ser de más o menos utilidad a la hora de estudiar distintos aspectos de la teoría. Las dos formas canónicas para describir un estado cuántico son a través del uso del *vector de estado* y la *matriz densidad*, que corresponden a vectores en un espacio de Hilbert y a operadores positivos con traza igual a uno sobre dicho espacio, respectivamente.

Antes de comenzar con la enumeración de los postulados, es conveniente introducir la notación estándar que se utiliza en el campo, llamada *notación de Dirac*:

Notación	Descripción
$ \psi\rangle$	Vector. También llamado <i>ket</i>
$\langle\psi $	Vector dual. También llamado <i>bra</i>
$\langle\phi \psi\rangle$	Producto interno entre los vectores $ \phi\rangle$ y $ \psi\rangle$
$ \phi\rangle \otimes \psi\rangle$	Producto tensorial entre los vectores $ \phi\rangle$ y $ \psi\rangle$
$ \phi\rangle \psi\rangle$	Notación abreviada para $ \phi\rangle \otimes \psi\rangle$
$ \phi\psi\rangle$	Notación abreviada para $ \phi\rangle \otimes \psi\rangle$
A^*	Conjugado complejo de la matriz A
A^\dagger	Conjugado complejo o adjunto de la matriz A . $A^\dagger = (A^T)^*$
$\langle\phi A \psi\rangle$	Producto interno entre $ \phi\rangle$ y $A \psi\rangle$. Idem entre $A^\dagger \phi\rangle$ y $ \psi\rangle$.

2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica

En esta sección reproduciremos los postulados fundamentales de la mecánica cuántica, tal como se presentan en el libro de Nielsen y Chuang [24]. Estos establecen una conexión entre el mundo físico y el formalismo matemático de la mecánica cuántica.

El primer postulado de la mecánica cuántica define el marco donde esta teoría se desarrolla: el espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial sobre números complejos con un producto interno. En este espacio, los estados cuánticos pueden representarse tanto por vectores como por operadores densidad, lo que permite describir sistemas puros y mixtos de manera generalizada.

Postulado 1. *Cada sistema físico aislado está asociado a un espacio de Hilbert, conocido como el espacio de estados. El estado del sistema es representado por un operador ρ positivo con traza igual a 1 que actúa en dicho espacio, llamado operador densidad. Si un sistema está en el estado ρ_i con probabilidad p_i , entonces su operador densidad es $\sum_i p_i \rho_i$.*

La geometría del espacio de estados cuánticos corresponde a la de un conjunto convexo, en cuyo borde se encuentran los llamados estados *puros*, que satisfacen $\rho^2 = \rho$ y pueden ser expresados alternativamente como vectores en el espacio de Hilbert. Estos estados son aquellos que se conocen con exactitud, por lo que la información que aportan es máxima. Por otro lado, en el interior de dicho espacio se encuentran los estados *mixtos*, los cuales son combinaciones convexas de estados puros.

El segundo postulado explica la dinámica de los sistemas cuánticos, es decir, cómo se comportan las transformaciones que sufren en un intervalo de tiempo determinado.

Postulado 2. *La evolución de un sistema cuántico cerrado es descrita por $U\rho U^\dagger = \rho'$, donde ρ es el estado del sistema en el instante t_1 , ρ' es el estado del sistema en el instante t_2 y U es un operador unitario que depende únicamente de t_1 y t_2 .*

Si bien, en términos generales, ningún sistema es cerrado (salvo el universo mismo), existen diversos escenarios de interés donde es una aproximación suficientemente buena describir un sistema como si lo fuese.

Es evidente que esta formulación del postulado describe el paso del tiempo en intervalos discretos lo cual, para el alcance de este trabajo, resulta suficiente. No obstante, es importante destacar que existe una versión más refinada de este postulado que explica la evolución de un sistema cuántico en tiempo continuo, llamada *ecuación de Schrödinger*, que depende de una constante física determinada experimentalmente llamada *constante de Planck* y de un operador H llamado *Hamiltoniano* del sistema.

A la hora de realizar un experimento, resulta lógico que luego de evolucionar un sistema mediante operadores unitarios se desee observar la propiedad de interés que este exhibe. En la mecánica cuántica la medición es un proceso irreversible que le asigna un valor real a un sistema cuántico, a su vez interactuando con este, de manera que deja de ser cerrado. El tercer postulado define el comportamiento y las repercusiones de este proceso que transforma el sistema de manera tal que los operadores unitarios ya no son suficientes para describir su evolución.

Postulado 3. *Las mediciones de un sistema cuántico están descritas por un conjunto de operadores $\{M_m\}$ que actúan en el espacio de estados del mismo llamados operadores de medición, donde el índice m hace referencia a los posibles resultados de la medición en el*

experimento. Sea ρ el estado del sistema inmediatamente antes de efectuar la medición, entonces la probabilidad de que se obtenga el resultado m está dada por la ecuación

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.1)$$

y el estado del sistema inmediatamente después de la medición es

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.2)$$

Los operadores de medición deben satisfacer la ecuación de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (2.3)$$

La ecuación de completitud expresa el hecho de que las probabilidades deben sumar uno, y es equivalente a que valga para todo ρ la siguiente ecuación:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho). \quad (2.4)$$

Existe también una versión especial del Postulado 3 que describe un tipo de medición llamada *medición proyectiva*, la cuál provee una mayor comodidad a la hora de hacer cálculos en varias de las aplicaciones de la computación en información cuántica, siendo a su vez equivalente al postulado general de medición (siempre y cuando se le otorgue la posibilidad de efectuar transformaciones unitarias). Este tipo de medición se define de la siguiente manera:

Mediciones Proyectivas. Una medición proyectiva es descrita por un observable, M , un operador hermítico en el estado de espacios del sistema observado. El observable posee una descomposición espectral

$$M = \sum_m m P_m, \quad (2.5)$$

donde P_m es el proyector sobre el autoespacio de M con autovalor m . Los posibles resultados de la medición corresponden a los autovalores m del observable. La probabilidad de obtener el resultado m de la medición del estado ρ está dada por

$$p(m) = \text{tr}(P_m \rho), \quad (2.6)$$

dejando al sistema medido en el estado

$$\frac{P_m \rho P_m}{\sqrt{p(m)}}. \quad (2.7)$$

Una de las ventajas de las mediciones proyectivas es su facilidad para calcular los valores medios de medición de un estado con respecto a un observable:

$$E(M) = \text{tr}(\rho M). \quad (2.8)$$

Pocos son los casos en los que pretendemos estudiar sólo un sistema cuántico. El último postulado nos otorga la herramienta que precisamos para describir sistemas compuestos por más de un sistema físico, lo cual resulta indispensable para modelar algoritmos y procedimientos tales como la teleportación cuántica.

Postulado 4. *El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados que lo componen. Luego, si disponemos de los sistemas numerados del 1 al n y el i -ésimo sistema está preparado en el estado ρ_i , entonces el estado conjunto del sistema compuesto es $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$*

A la hora de estudiar sistemas compuestos, frecuentemente nos vemos en la necesidad de describir los subsistemas que lo componen. Es en estos casos cuando más útil resulta la matriz densidad como forma de representación, ya que nos permite utilizar una herramienta de suma utilidad llamada *operador densidad reducido*. Sean A y B sistemas físicos descritos por el operador densidad ρ^{AB} . Luego, el operador densidad reducido para el sistema A está definido por

$$\rho^A \equiv \text{tr}_B(\rho^{AB}), \quad (2.9)$$

donde tr_B es un mapa de operadores conocido como la *traza parcial* sobre el sistema B . A su vez, esta se define como

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|). \quad (2.10)$$

2.1.2. Qubit

El *quantum bit* o qubit es la unidad básica de información en las áreas de computación cuántica e información cuántica. Se trata del sistema cuántico más simple posible ya que su espacio de estados consta de dos dimensiones, por lo que podemos representar el estado de un qubit como un vector unitario en \mathbb{C}^2 .

Para describir un qubit es necesario primero elegir una base en el espacio de estados. Usualmente se suele pensar en términos de la llamada *base computacional*, la cual está compuesta por los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que, a su vez, corresponden a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Una vez elegidos los estados que conformarán nuestra base, podemos crear combinaciones lineales de estos, usualmente llamadas *superposiciones*. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ representamos el vector de estado de un qubit $|\psi\rangle$ como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (2.11)$$

En esta representación se observan a simple vista las probabilidades de medir los elementos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de la base computacional: $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$, respectivamente, por lo que los coeficientes utilizados en los vectores de estado deberán cumplir con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

De esta forma representamos un qubit puro como un vector de estado en la base computacional. Análogamente, podemos hacer lo propio en formato matriz densidad calculando $|\psi\rangle\langle\psi|$. En la base computacional, esto se expresa como

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^*\beta \\ \alpha\beta^* & \beta^2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

En el caso de los qubits, existe una forma adicional para representar estados cuánticos: como puntos en una esfera tridimensional de radio 1, llamada esfera de Bloch. Para introducir esta representación es conveniente primero reformular la ecuación (2.11) en términos

de la forma polar de α y β . Así,

$$\alpha = r_\alpha e^{i\phi_\alpha}, \quad (2.13)$$

$$\beta = r_\beta e^{i\phi_\beta}, \quad (2.14)$$

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |1\rangle \quad (2.15)$$

con $r_\alpha, \phi_\alpha, r_\beta, \phi_\beta \in \mathbb{R}$.

Ahora, si reescribimos (2.15), tenemos que $r_\alpha^2 + r_\beta^2 = 1$ y podemos aplicar la identidad Pitagórica para hacer el cambio de variable $r_\alpha = \cos \frac{\theta}{2}$ y $r_\beta = \sin \frac{\theta}{2}$. Adicionalmente, podemos sacar factor común $e^{i\phi_\alpha}$ y renombrar $\phi = \frac{\phi_\beta}{\phi_\alpha}$ para obtener la expresión

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \right). \quad (2.16)$$

Nos referimos a $e^{i\phi_\alpha}$ como un factor de fase global, el cual no tiene efectos observables. Esto significa que, al momento de realizar una medición del sistema, la existencia de ese factor no modificará el resultado observado, por lo que podemos obviarlo.

Finalmente, llegamos a que podemos describir el estado de un qubit con dos números reales, lo cual nos permite pensar en términos de dos ángulos que componen un sistema de coordenadas polares en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, notemos que la derivación solo admite puntos sobre la superficie de la esfera, los cuales se corresponden con el conjunto de estados puros. Para representar estados mixtos (combinaciones convexas de estados puros), debemos contemplar los puntos en su interior. Esto se puede lograr para un estado ρ cualquiera considerando un tercer parámetro $|r|$ (la norma del vector), o mediante la ecuación

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{t} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.17)$$

donde \vec{t} , con $|\vec{t}| \leq 1$ es el vector de Bloch del estado y $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es el vector de las matrices de Pauli. Estas se definen como

$$\sigma_1 = |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1|, \quad (2.18)$$

$$\sigma_2 = i |1\rangle \langle 0| - i |0\rangle \langle 1| \quad \text{y} \quad (2.19)$$

$$\sigma_3 = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1| \quad (2.20)$$

y junto con la identidad forman una base del espacio de matrices densidad de un qubit (ver sección 2.2.1). Observando la ecuación (2.17) vemos que el vector de Bloch $(0, 0, 0)$ es equivalente a la matriz de densidad $\mathbb{1}/2$ y corresponde a un estado máximamente mezclado, es decir, que provee mínima información.

2.1.3. Entrelazamiento

En el Postulado 4 se estableció al producto tensorial como la herramienta para describir sistemas compuestos. Decimos que un sistema compuesto es separable cuando se puede escribir como una combinación convexa de sus productos. Es decir,

$$\rho^{AB} \text{ separable} \iff \rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \quad (2.21)$$

Al hablar de estados puros, la condición se expresa como $|\psi\rangle^{ab} = |a\rangle |b\rangle$.

Aquellos estados que no son separables se denominan entrelazados, y son unos de los fenómenos más interesantes y característicos de la mecánica cuántica. Estos son una parte clave en la formulación de varios protocolos pertenecientes a las áreas de información y computación cuántica, como la criptografía cuántica [25], la codificación superdensa [26] y la teleportación cuántica [1]. Es por ello que se considera al entrelazamiento un *recurso* fundamental de la naturaleza, como lo es la energía, la información o la entropía.

Los ejemplos paradigmáticos de estados entrelazados son los llamados *estados de Bell* y se definen como

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.22)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.23)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \text{ y} \quad (2.24)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.25)$$

Estos estados se denominan “máximamente entrelazados”, ya que partir de ellos se pueden generar cualquier otro estado de dos qubits por medio de operaciones locales y comunicación clásica.

Una manera de medir el grado de entrelazamiento es mediante el cálculo de su *negatividad* [27], definida como

$$\mathcal{N}(\rho) \equiv \frac{\|\rho^{\Gamma A}\|_1 - 1}{2}, \quad (2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho^{\Gamma A} &= (T \otimes id)(\rho) = \sum_{i_A, j_A=1}^2 \sum_{i_B, j_B=1}^2 \langle i_A i_B | \rho | j_A j_B \rangle T(|i_A\rangle \langle j_A|) \otimes |i_B\rangle \langle j_B| \\ &= \sum_{i_A, j_A=1}^2 \sum_{i_B, j_B=1}^2 \langle i_A i_B | \rho | j_A j_B \rangle |j_A\rangle \langle i_A| \otimes |i_B\rangle \langle j_B| \end{aligned} \quad (2.27)$$

es la traspuesta parcial [28] de ρ con respecto al subsistema A y $\|X\|_1 = \text{tr}|X| = \text{tr}\sqrt{X^\dagger X}$ es la norma traza. Para estados de dos qubits, se tiene que ρ^{AB} separable $\iff \mathcal{N}(\rho^{AB}) = 0$ [27].

2.1.4. Sistemas de dos qubits

Hasta ahora solo vimos cómo representar un sistema arbitrario de dos qubits utilizando vectores de estado y matrices de densidad. En esta sección introduciremos otra manera de expresar estos sistemas, que nos será de gran utilidad para describir el proceso de teleportación más adelante: la *forma de Fano*, dada por [29]

$$\rho = \frac{1}{4} \left[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \vec{r}^A \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{r}^B \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right], \quad (2.28)$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad en el espacio de estados del sistema correspondiente, \vec{r}^A y \vec{r}^B son los vectores de Bloch de los estados reducidos y $r_{ij} = \text{tr}(\rho\sigma_i \otimes \sigma_j)$ son los elementos de la matriz de correlación.

Observemos que calcular el estado reducido de cualquier qubit que compone cualquier estado de Bell nos da como resultado $1/2$ el cual, como se vio en la sección 2.1.2, es un estado con máxima incertidumbre (o mínima información). Esto se condice con la afirmación hecha en 2.1.3: que no se pueden describir por separado.

Finalizamos esta sección dando la fórmula para la forma de Fano de un par de Bell, la cual nos será de gran utilidad más adelante:

$$|\beta_{xy}\rangle\langle\beta_{xy}| = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 (w_{xy})_{ii} \sigma_i \otimes \sigma_i) \quad (2.29)$$

donde

$$w_{00} = \text{diag}(1, -1, 1), \quad (2.30)$$

$$w_{01} = \text{diag}(1, 1, -1), \quad (2.31)$$

$$w_{10} = \text{diag}(-1, 1, 1), \text{ y} \quad (2.32)$$

$$w_{11} = \text{diag}(-1, -1, -1) \quad (2.33)$$

son las matrices de correlación correspondientes.

2.1.5. Canales cuánticos

En la sección 2.1.1 se describió la evolución de sistemas cerrados, aislados de interacciones con sistemas externos. En escenarios de esta naturaleza, los algoritmos y procedimientos que dependen de la manipulación de qubits obtienen resultados ideales, como es el caso del protocolo de teleportación (explicado en el apartado 3.1), que logra transmitir el estado exacto del qubit inicial al sistema receptor.

En aplicaciones reales no existen sistemas perfectamente cerrados, sino que sufren interacciones indeseadas con el mundo exterior, las cuales se manifiestan como *ruido* en sistemas de procesamiento de información cuántica. No obstante, para comprender en mayor profundidad los efectos del mismo sobre los procesos cuánticos e intentar mitigarlos en la medida de lo posible, es de nuestro interés estudiar y caracterizar los tipos de ruidos más comunes.

Este fenómeno no es exclusivo del estudio de sistemas cuánticos: de forma análoga podemos observar cómo el ruido altera sistemas clásicos, producto de interacciones con el ambiente. De hecho, se pueden trazar varios paralelismos entre los formalismos para describir dichas interacciones y los que estudiaremos a continuación, que analizan el caso cuántico.

Existen distintas caracterizaciones del ruido en los canales cuánticos; las cuales, dependiendo del contexto, pueden ser de mayor o menor utilidad. De cualquier forma, todas ellas se basan sobre los fundamentos del *formalismo de operaciones cuánticas*. Este formalismo no se limita al modelado de canales ruidosos; sino que, de forma mucho más general, expresa el cambio que sufre un estado, producto de algún proceso físico. Tal es su alcance, que tanto las transformaciones unitarias como las mediciones son ejemplos de operaciones cuánticas, cuya notación se suele expresar como

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho'. \quad (2.34)$$

de problema computable. Resulta que, al igual que con el caso clásico, es posible construir sistemas de procesamiento de información cuántica (usualmente en forma de *qubits*) que resuelvan los mismos tipos de problemas. De hecho, las computadoras clásicas y cuánticas pueden simularse mutuamente.

De la afirmación anterior surge naturalmente la pregunta ¿de qué nos puede ser útil una computadora cuántica si ya disponemos de una clásica? Esta es aún una pregunta abierta en el campo. A priori, existen problemas para los cuales el mejor algoritmo cuántico es más eficiente que el mejor algoritmo clásico conocido hasta el momento. Más aún, existen problemas cuyas soluciones en computadoras cuánticas son más eficientes que cualquier solución posible en una clásica; aunque, en esos casos, la diferencia no es tan significativa (más concretamente, el salto en complejidad temporal no es exponencial).

Otra pregunta abierta [33] igual de importante en el área es la tesis de Church-Turing fuerte, la cual afirma que una máquina de Turing probabilística es capaz de simular eficientemente (es decir, en tiempo polinomial) cualquier proceso algorítmico. De ser verdadera, esto implicaría la capacidad de una computadora clásica de simular en tiempo razonable a una cuántica, poniendo en duda su utilidad.

Dejando de lado algunos algoritmos diseñados específicamente para resaltar la ventaja cuántica (tales como el de Deutsch–Jozsa [34] o el de Simon [35]), existen ejemplos destacables de problemas reales y aplicables cuyos algoritmos cuánticos exhiben una mejora significativa. Tal es el caso del algoritmo de Shor [36], capaz de encontrar los factores primos de un número en tiempo polinómico; y el algoritmo de Grover [37], el cual logra realizar búsquedas sobre secuencias no ordenadas de datos en tiempo sublineal. Intuitivamente, es posible que una de las mejores aplicaciones de las computadoras cuánticas sea llevar a cabo simulaciones de sistemas cuánticos demasiado difíciles de simular en computadoras clásicas.

2.2.1. Compuertas cuánticas

Para comenzar a estudiar la caracterización de los algoritmos cuánticos, es necesario definir primero sus operaciones más elementales: las compuertas. Es inmediata la asociación con las compuertas lógicas que componen las bases de la computación clásica. Estas son dispositivos físicos capaces de implementar funciones booleanas sobre sus bits de entrada, tales como las funciones *NOT*, *OR* o *AND*, y devolver el resultado sobre su o sus bits de salida. Por el primer postulado de la mecánica cuántica, sabemos que los sistemas evolucionan a través de operadores unitarios, los cuales poseen una representación como matrices cuadradas en los complejos. Es la aplicación sucesiva de estas matrices (análogas a las funciones booleanas) la que nos permitirá manipular los estados de los qubits de entrada para llevar a cabo cómputos.

Si bien son muchos los paralelismos entre las compuertas clásicas y las cuánticas, existe un hecho que las diferencia fundamentalmente: como se mencionó, las primeras pueden representar cualquier función booleana computable, mientras que las segundas están restringidas exclusivamente a las operaciones unitarias sobre el espacio de estados del sistema de entrada.

Al operar sobre un continuo, existen infinitas posibles compuertas que actúen sobre 1, 2 o n qubits. No obstante, hay un subconjunto de ellas que destacan por su utilidad en el estudio de la computación e información cuántica. Algunas de ellas son las llamadas compuertas (o matrices, u operadores) de Pauli, anteriormente definidas, cuya representación matricial en la base computacional es la siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_0 \equiv I &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Es útil pensar a las matrices X, Y y Z como rotaciones de 180° sobre los ejes x, y y z , respectivamente, de la esfera de Bloch. Otras compuertas relevantes en este trabajo son la compuerta Hadamard H y la compuerta de fase S

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

y la compuerta universal

$$U(\theta, \phi, \lambda) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\phi+\lambda)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

capaz de generar cualquier compuerta de un qubit.

Si nos limitáramos a compuertas que actúan sobre solo un qubit probablemente no seríamos capaces de realizar ningún cómputo significativo. Para usufructuar las posibilidades que nos da, por ejemplo, el entrelazamiento, necesitamos poder operar sobre múltiples qubits. El ejemplo introductorio por excelencia a este tipo de operadores es la compuerta *CNOT* (por “controlled-*NOT*”), la cual toma de entrada un qubit de control y otro objetivo, el cual es invertido si el primero estaba en el estado $|1\rangle$. Podemos definir el comportamiento de la misma mediante su representación como matriz

$$U_{CN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.49)$$

o, de forma más intuitiva, mediante las ecuaciones

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle; |01\rangle \rightarrow |01\rangle; |10\rangle \rightarrow |11\rangle; |11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (2.50)$$

La compuerta *CNOT* es un caso específico de compuerta controlada, donde la operación no es otra que la X definida más arriba. Este concepto puede ser generalizado para obtener toda una familia de compuertas controladas, donde la operación a ser aplicada al qubit objetivo es cualquier operador U unitario. Por motivos de alcance de este trabajo, basta con mencionar compuertas de hasta dos qubits, si bien no hay límite en la dimensión de las mismas y sus comportamientos pueden ser muy variados. Más aún, sin importar su dimensión o comportamiento, cualquier operador unitario U posee una descomposición en términos de la compuerta *CNOT* y la compuerta universal de un qubit $U(\theta, \phi, \lambda)$ [38].

2.2.2. Circuitos cuánticos

A la hora de representar algoritmos cuánticos, colocamos las compuertas que lo componen en el marco de un circuito, tal como podemos ver en la figura 2.2. En esta representación, los qubits que serán utilizados se disponen verticalmente y a cada uno le corresponde

un cable, el cual acarreará su estado a través de todas las transformaciones que sufra, de izquierda a derecha. En el ejemplo podemos observar que el circuito consiste de dos qubits inicializados en $|0\rangle$. La primer operación aplicada es una compuerta H sobre el segundo qubit. Luego, le sigue la compuerta $CNOT$ en su representación más común, donde el segundo qubit actúa como control y el primero como objetivo.

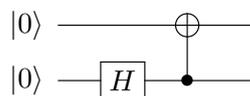


Fig. 2.2: Circuito cuántico para crear el par de Bell β_{00} a partir de dos qubits no entrelazados

En la figura 2.3 encontramos ejemplificada la operación de medición. Esta convierte el estado de un qubit $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ en un bit clásico M (cuya distinción de un qubit se da por el cable dibujado con dos líneas), el cual es igual a 0 con probabilidad $|\alpha|^2$ y 1 con probabilidad $|\beta|^2$.



Fig. 2.3: Medición y bits clásicos en un circuito cuántico

Usualmente encontraremos en circuitos cuánticos una compuerta controlada por un bit clásico, producto de una medición intermedia (esto es, una medición realizada cuando el algoritmo aún no finalizó). Por el *principio de medición diferida* [24], todas las mediciones en etapas intermedias de un circuito pueden ser trasladadas al final del mismo. En consecuencia, cualquier operación controlada por un bit clásico puede reemplazarse por una controlada por un qubit, al cual se le realiza una medición al final del circuito.

2.2.3. Qiskit

Qiskit es un SDK (software development kit) desarrollado por IBM Research [21] para trabajar con computadoras cuánticas. Su biblioteca para el lenguaje de programación Python permite la construcción de circuitos cuánticos para su posterior ejecución tanto en computadoras cuánticas propias (mediante la plataforma Qiskit Runtime) como en simuladores.

El SDK provee, entre otras cosas, utilidades para representar estados cuánticos, operadores, canales, funciones de distancia, circuitos y una amplia gama de compuertas. La biblioteca permite no solo ejecutar los circuitos y obtener los resultados de sus mediciones, sino también adaptarlos y optimizarlos para su ejecución en hardware específico.

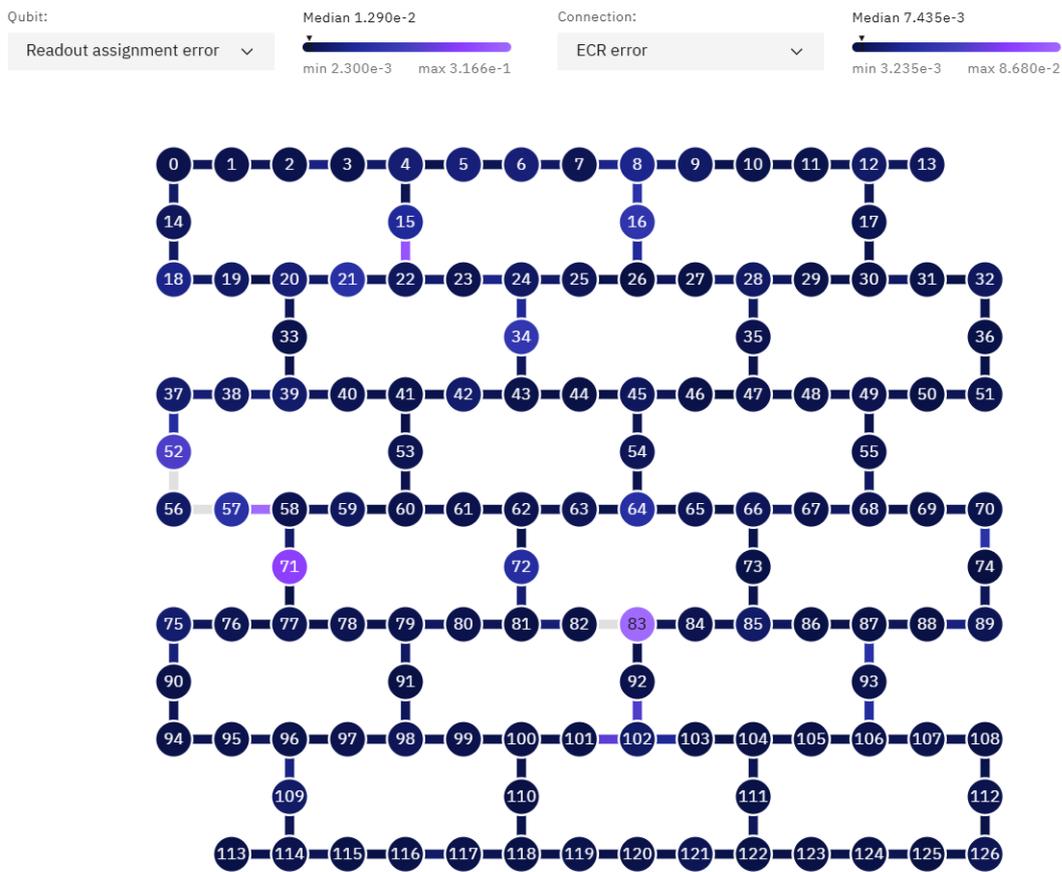


Fig. 2.4: Grafo de conectividad de los qubits del equipo `ibm_sherbrooke`. Los colores de los qubits y de las conexiones entre ellos denotan el grado de error que poseen, producto del ruido y la decoherencia.

3. PROTOCOLO DE TELEPORTACIÓN CUÁNTICA

3.1. Protocolo estándar

Al final el apartado 2.1.8 se dio una breve introducción al protocolo de teleportación cuántica [1], el cual es el centro de este trabajo. En esta sección se presentará una caracterización formal y una explicación detallada de su funcionamiento en el caso ideal, es decir, sin la presencia de ruidos que alteren su funcionamiento.

El protocolo consta de dos partes, denominadas Alice y Bob, las cuales comparten un *recurso* en la forma de un estado de Bell $|\beta_{00}\rangle$ generado en algún momento del pasado utilizando el circuito en la figura 2.2. Una vez generado el par, Alice y Bob toman un qubit cada uno y se alejan arbitrariamente. Eventualmente, Alice pretende transmitirle a Bob el estado de un qubit desconocido $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, para lo cual aplica operaciones locales y luego le transmite dos bits de información clásica, los cuales Bob utiliza para efectuar ciertas correcciones y así reconstruir el estado original de $|\psi\rangle$.

En la figura 3.1 podemos ver el procedimiento y debajo cinco marcadores con los que denotaremos el estado del sistema en diferentes momentos. Comenzamos con el estado de entrada

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)], \quad (3.1)$$

en donde los dos primeros qubits están en poder de Alice y el tercero de Bob. La primera operación que realiza Alice consiste en aplicar una compuerta *CNOT* a sus qubits, controlada por el qubit a transferir, de modo tal que el sistema resulta en la siguiente expresión:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)]. \quad (3.2)$$

Luego pasa su primer qubit a través de una compuerta Hadamard, representada por la letra *H* (definida en la sección 2.2.1), obteniendo:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)], \quad (3.3)$$

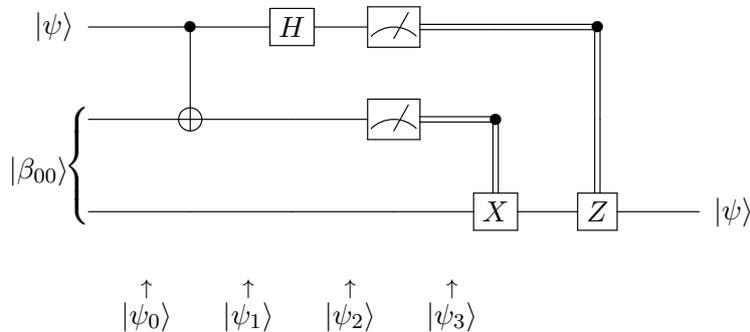


Fig. 3.1: Circuito cuántico que implementa el protocolo de teleportación. Los dos primeros cables representan el sistema de Alice mientras que el último representa el sistema de Bob.

el cual puede ser reescrito como

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) \\ + |10\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |11\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)] \quad (3.4)$$

reagrupando los términos. Cada uno de los cuatro posibles resultados $ij \in \{0, 1\}^2$ de medir los qubits de Alice en la base computacional determinarán de forma precisa el estado del qubit de Bob, como se puede observar en los términos de la ecuación (3.4). De esta forma, luego de la medición, el sistema de Bob será descrito por el estado condicional $|\psi_3(ij)\rangle$. Al recibir los dos bits de información clásica enviados por Alice, Bob conocerá con certeza el estado de su sistema, el cual deberá ser transformado por operaciones locales para reconstruir el estado de $|\psi\rangle$ (recordar que α y β son las amplitudes que lo describían).

El procedimiento que debe seguir Bob una vez recibidas las mediciones de Alice es el siguiente:

- si recibe 00, el estado de su qubit es $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, por lo que no necesita hacer nada
- si recibe 01, el estado de su qubit es $\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$, por lo que debe aplicar una compuerta X
- si recibe 10, el estado de su qubit es $\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle$, por lo que debe aplicar una compuerta Z
- si recibe 11, el estado de su qubit es $\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle$, por lo que debe aplicar una compuerta X y luego una Z

3.2. Esquema con ruidos

La descripción del protocolo de teleportación cuántica provista en la sección 3.1 asume sistemas perfectamente cerrados, los cuales no sufren de interacciones indeseadas con el mundo exterior. El caso es que cualquier implementación real del protocolo se verá afectada por ruidos que alteran los estados de los qubits empleados en el mismo. Es por eso que es de vital importancia comenzar a medir el rendimiento del protocolo bajo dichos escenarios empleando las medidas de distancia estudiadas en el apartado 2.1.6, las cuales usaremos para cuantificar la disparidad entre el qubit a transmitir y el resultado del proceso. Al mismo tiempo, utilizaremos los formalismos descritos en el apartado 2.1.5 para contemplar en la caracterización del protocolo el efecto que pueden tener dos canales cuánticos diferentes aplicados a cada qubit del estado recurso compartido por Alice y Bob, y cómo se pueden optimizar las correcciones locales del último para minimizar el error de transmisión.

Antes de comenzar con el marco teórico de la teleportación ruidosa es conveniente explicitar la notación utilizada a partir de ahora. Sean a , A y B los sistemas del qubit a transmitir, el qubit recurso de Alice y el qubit recurso de Bob, respectivamente. Los estados serán expresados como operadores densidad o como vectores de Bloch ocasionalmente. Los resultados de la medición en la base de Bell que realiza Alice serán etiquetados con los índices $ij \in \{0, 1\}^2$. Luego de la medición, el sistema de Bob queda en el estado $\rho^{B|ij}$ con probabilidad p_{ij} (la cual, como se puede ver en la ecuación (3.4), en el caso ideal vale $\frac{1}{4}$). Una vez que Bob recibe la información de la medición, le aplica a su estado el operador unitario U_{ij} , para dejar su sistema en el estado $\rho_{ij}^B = U_{ij} \rho^{B|ij} U_{ij}^\dagger$.

Consideremos la ecuación (2.29), la cual describe la forma de Fano para un estado de Bell cualquiera y representa sistema ρ^{AB} en ausencia de ruidos. Si contemplamos a los canales $\mathcal{E}(\vec{t}) = \mathbb{A}_{\mathcal{E}}\vec{t} + \vec{b}_{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{F}(\vec{t}) = \mathbb{A}_{\mathcal{F}}\vec{t} + \vec{b}_{\mathcal{F}}$ caracterizados como transformación afín, actuando sobre el estado recurso, la expresión se transforma de la siguiente manera:

$$(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})(|\beta_{xy}\rangle\langle\beta_{xy}|) = \frac{1}{4} \left[\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \vec{r}^A \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \vec{r}^B \cdot \vec{\sigma} + \sum_{k,l=1}^3 r_{kl} \sigma_k \otimes \sigma_l \right] \quad (3.5)$$

con

$$\vec{r}^A = \vec{b}_{\mathcal{E}}, \quad (3.6)$$

$$\vec{r}^B = \vec{b}_{\mathcal{F}} \text{ y} \quad (3.7)$$

$$r = \vec{b}_{\mathcal{E}}^t \vec{b}_{\mathcal{F}} + \mathbb{A}_{\mathcal{E}}^t \mathbb{w}_{xy} \mathbb{A}_{\mathcal{F}}. \quad (3.8)$$

Ahora, si Alice obtiene el resultado ij en su medición, podemos representar al estado del sistema B como

$$\rho^{B|ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \vec{t}^{B|ij} \cdot \vec{\sigma} \right), \text{ con} \quad (3.9)$$

$$\vec{t}^{B|ij} = \frac{\vec{r}^B + (\mathbb{w}_{ij} \mathbb{r})^T \vec{t}}{4p_{ij}}, \text{ donde a su vez} \quad (3.10)$$

$$p_{ij} = \frac{1 + \vec{t} \cdot (\mathbb{w}_{ij} \vec{r}^A)}{4}. \quad (3.11)$$

Para finalizar la descripción del protocolo de teleportación con ruidos aplicados al estado recurso solo resta llegar a la expresión ρ_{ij}^B , la cual resulta de aplicarle las correcciones óptimas a $\rho^{B|ij}$ (la noción de optimalidad será discutida en el próximo apartado). Estas correcciones pueden ser expresadas como operadores unitarios U_{ij} que operan sobre $\rho^{B|ij}$ o como operadores ortogonales \mathbb{R}_{ij} actuando sobre su correspondiente vector de Bloch $\vec{t}^{B|ij}$.

4. DISTANCIA MEDIA DE TELEPORTACIÓN Y CERTIFICACIÓN

Dada una medida de distancia D y dos canales ruidosos \mathcal{E}, \mathcal{F} actuando respectivamente sobre los qubits de un estado de Bell, ¿cómo se expresa la precisión del protocolo? La figura de mérito elegida es la llamada *distancia media de teleportación* [19]

$$\langle \bar{D} \rangle = \int \bar{D}(\rho^a) d\psi \quad (4.1)$$

donde $\rho^a = |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\bar{D}(\rho^a) = \sum_{i,j=0}^1 p_{ij} D(\rho^a, \rho_{ij}^B)$ es el puntaje de calificación del protocolo para un estado dado, el cual consiste en un promedio ponderado de las distancias de teleportación para cada estado condicional, acompañado de su respectiva probabilidad. La media se toma sobre todos los estados puros con $d\psi$ una medida de Haar normalizada: $\int d\psi = 1$.

En el esquema sin ruidos, las correcciones de Bob sobre su qubit son $U_{ij} = Z^i X^j$ o, expresadas como rotaciones en la esfera de Bloch, $\mathbb{R}_{ij} = w_{ij}$. Al considerar el esquema con ruidos aplicados sobre el estado recurso, las correcciones no son fijas, sino que se debe aplicar aquella operación que maximiza el rendimiento del protocolo. Se dice que un protocolo es *incondicionalmente óptimo* si las rotaciones \mathbb{R}_{ij} que maximizan el rendimiento no dependen de la métrica D utilizada. Sin embargo, en los protocolos *condicionalmente óptimos*, el cálculo de \mathbb{R}_{ij} depende tanto del protocolo como de la elección de D [19]. El análisis llevado a cabo en este trabajo utilizará rotaciones que optimizan el protocolo para la medida de Fidelity.

Las rotaciones de Bob que optimizan la medida de Fidelity son de la forma $\mathbb{R}_{ij} = w_{ij} \tilde{w}$, donde $\tilde{w} \in \{w_{00}, w_{01}, w_{10}, w_{11}\}$ es la *matriz de correlación* asociada al estado de Bell correspondiente al máximo autovalor de la matriz $\frac{1}{4}(\mathbb{1}_4 + \sum_{k=1}^3 r_k \sigma_k \otimes \sigma_k)$, y r_k son los elementos de la diagonalización de \mathfrak{r} . Notar que \tilde{w} es una función de los canales \mathcal{E}, \mathcal{F} y del estado de Bell en el que se inicializó el recurso β_{xy} .

4.1. Criterio estándar de certificación

Contamos de ahora en más con la *distancia media de teleportación* como instrumento para cuantificar el rendimiento del protocolo. No obstante, disponer de su valor en términos absolutos, sin un marco de referencia adecuado, no aporta información significativa. ¿Con qué criterio puede uno afirmar que el rendimiento del protocolo es bueno? Trivialmente, cuando el valor de la distancia es 0 (o 1 en los casos de la Fidelity y Affinity) sabemos que los estados son idénticos (hecho altamente improbable en escenarios reales). También podemos observar con facilidad cuándo una implementación es superior a otra, lo cual tampoco es muy útil ya que carecemos de una referencia (ambas implementaciones podrían ser malas).

Un criterio a priori razonable consiste en considerar la distancia media de teleportación del mejor protocolo clásico, es decir, un protocolo que no utiliza recursos cuánticos (tal como lo es el entrelazamiento). Luego, cualquier protocolo cuyo rendimiento supere el del mejor protocolo clásico se considera “certificado cuántico” [16, 17].

Cualquier protocolo clásico de teleportación se basa en la técnica de *medir y preparar*, utilizando exclusivamente un canal de comunicación clásico. En esta variante, Alice realiza una medición del sistema que desea transmitir y comunica el resultado a Bob. Este último,

Medida de distancia	g_d	r^{opt}	$\langle \bar{D} \rangle_{cl}$
Trace Distance [24]	$\frac{\sqrt{1-2rz+r^2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{10}-5}{3} \approx 0.441$	$\frac{8(11-2\sqrt{10})}{81} \approx 0.461$
Wootters Distance [30]	$\arccos \sqrt{\sqrt{12}(1+rz)}$	1	≈ 0.589
Affinity [31]	$A(z, r) = \frac{1+rz+\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{1+r}+\sqrt{1-r})}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745$
Fidelity [24]	$\frac{1}{2}(1+rz)$	1	$\frac{2}{3}$

Tab. 4.1: Valores de g_d , r^{opt} y $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$ para cada medida de distancia utilizada.

a su vez, prepara el estado de su qubit de acuerdo con el resultado obtenido y con una estrategia de preparación previamente acordada con Alice.

El protocolo clásico óptimo se define como aquel que optimiza la distancia media de teleportación, ecuación (4.1), entre todas las mediciones posibles de Alice y las preparaciones de Bob. En [19] se ha caracterizado este protocolo óptimo clásico, demostrando que, para cualquier distancia media de teleportación, la estrategia óptima con el mínimo número de mediciones de Alice es una medición proyectiva arbitraria sobre su qubit, caracterizada por vectores de Bloch unitarios antiparalelos \vec{s}_1 y \vec{s}_2 . Luego, dada esta medición y la comunicación del resultado i -ésimo ($i = 1, 2$), la estrategia de preparación óptima de Bob se describe mediante la preparación del estado

$$\rho_i^{opt} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + r^{opt} \vec{s}_i \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.2)$$

donde Bob ajusta la pureza de su estado de acuerdo con el problema de optimización

$$r^{opt} = \arg \min_{0 < r \leq 1} \int_{-1}^1 g_d(z, r)(1+z)dz, \quad (4.3)$$

siendo $g_d(z, r_i) = D(\rho_A, \rho_i^B)$ una reformulación de la distancia D en términos del coseno del ángulo entre los vectores de Bloch de ρ_A, ρ_i^B y la norma del vector de Bloch de ρ_i^B . Finalmente, la distancia media óptima para un protocolo clásico de teleportación se expresa como [19]

$$\langle \bar{D} \rangle_{cl} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_d(z, r^{opt})(1+z)dz. \quad (4.4)$$

En la tabla 4.1, podemos observar las expresiones de g_d y los valores de r^{opt} y $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$ para las medidas de distancia utilizadas en este trabajo.

Históricamente, la medida de distancia utilizada en la bibliografía para analizar el rendimiento del protocolo de teleportación es la Fidelity, lo cual llevaría a suponer que si un protocolo dado exhibe $\langle \bar{F} \rangle > \frac{2}{3}$ [5, 16] entonces puede ser concluyentemente clasificado como cuántico. Sin embargo, en el apartado siguiente se observará cómo dicha clasificación dependerá también de la función D elegida, lo cual impide declarar a $\langle \bar{D} \rangle < \langle \bar{D} \rangle_{cl}$ (o $\langle \bar{D} \rangle > \langle \bar{D} \rangle_{cl}$ en el caso de medidas de similitud) como criterio universal para decidir si un protocolo puede ser certificado cuántico o no.

4.2. Contradicciones en la certificación

Para evaluar el comportamiento del criterio estándar de certificación detallado en la sección 4.1, se emplearon las cuatro medidas de distancia presentadas en la sección 2.1.6

con el fin de calcular la distancia media de teleportación del protocolo afectado por ruidos. Fueron elegidos cuatro tipos de canales ruidosos típicamente encontrados en escenarios experimentales, los cuales actúan tanto sobre el qubit de Alice como sobre el de Bob, generando un total de dieciséis instancias diferentes del protocolo de teleportación.

El primero de los canales ruidosos utilizados en este trabajo se denomina Amplitude Damping Channel y su efecto sobre la esfera de Bloch es el de colapsar todos los puntos hacia el $(0, 0, 1)$, equivalente al estado $|0\rangle$. Su transformación afín se expresa como

$$ADC_p(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \vec{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

El segundo canal ruidoso es el Mirrored Amplitude Damping Channel, el cual actúa de forma análoga al anterior, salvo que la esfera se colapsa sobre el punto $(0, 0, -1)$, equivalente al estado $|1\rangle$ y se puede calcular mediante la fórmula

$$MADC_p(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \vec{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

El tercer canal se denomina Depolarizing Channel y, de forma similar a los anteriores, su efecto es el de colapsar la esfera sobre el origen de la siguiente manera:

$$DC_p(\vec{t}) = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \vec{t}. \quad (4.7)$$

Por último, contamos con el denominado Phase Damping Channel, cuya acción sobre un vector de Bloch actúa de acuerdo a la ecuación

$$PDC_p(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{t}. \quad (4.8)$$

En los gráficos de contorno de la figura 4.1 podemos observar cómo varía la distancia media de teleportación en función de los parámetros de intensidad p_a y p_b , que corresponden a los canales ruidosos de Alice y Bob. La zona de color rojo denota la región de parámetros para la cual el protocolo es certificado cuántico (según la medida de distancia utilizada), mientras que la zona azul indica que el rendimiento es peor que la cota clásica. Un hecho notable es que el gráfico 4.1b exhibe una simetría que no es propia del problema (en las ecuaciones (3.10) y (3.11) se observa claramente que los canales tienen roles distintos en la expresión del estado final del qubit de Bob), lo cual fortalece la motivación para considerar diversas medidas de distancia a la hora de evaluar un protocolo.

De los resultados surgidos de la consideración de las diferentes medidas, se observa que el criterio de certificación a partir del establecimiento de un umbral clásico para la distancia media no es universal. Más aún, para los diferentes protocolos analizados no existe una medida que sea siempre la más restrictiva, de modo que no es posible establecer una jerarquía entre ellas.

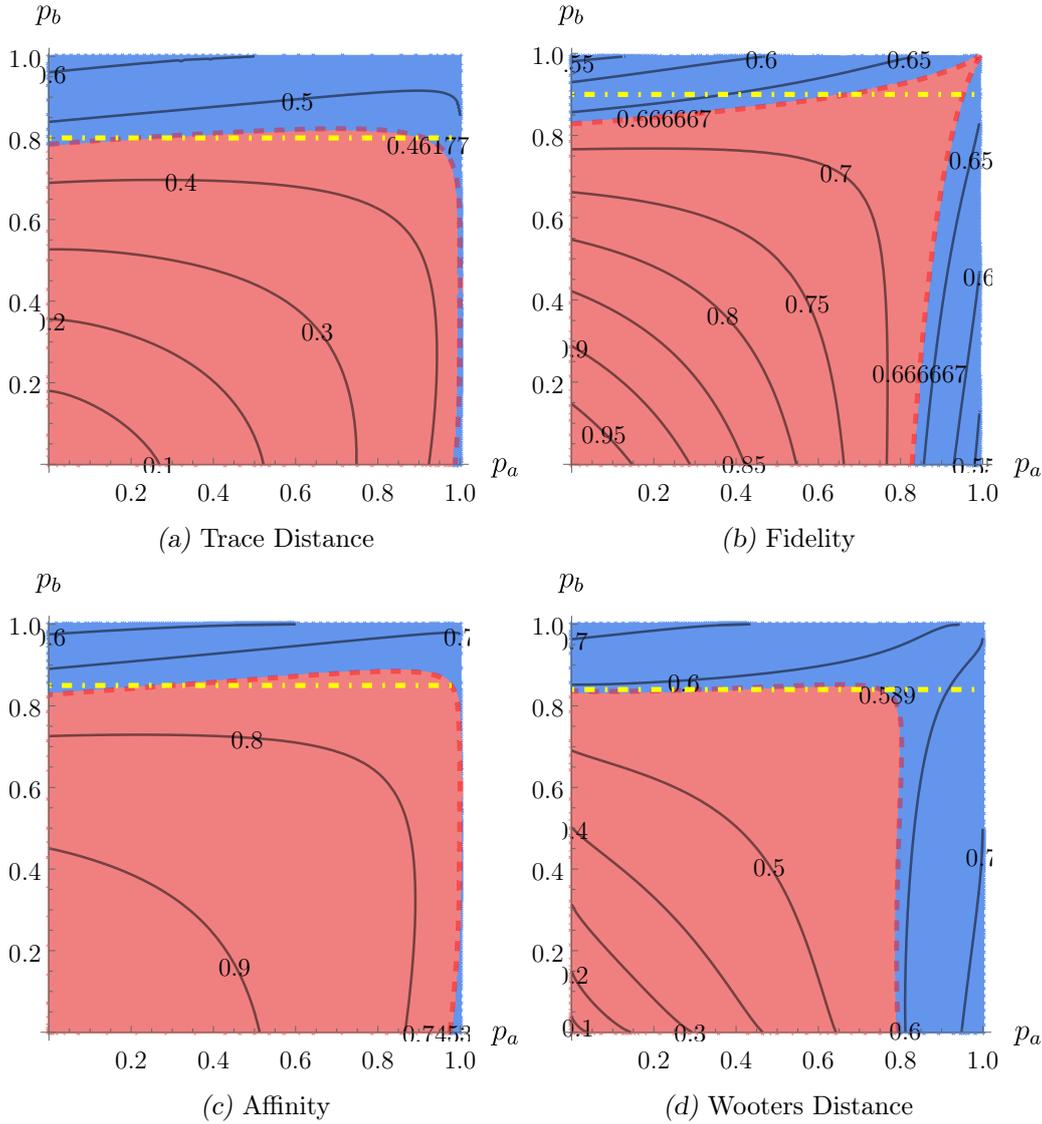


Fig. 4.1: Distancia media de teleportación en función de los parámetros p_a y p_b de dos Amplitude Damping Channels. La zona de color rojo denota certificación cuántica y la azul, un rendimiento peor a la cota clásica. La línea punteada amarilla muestra un posible camino por el cual se puede transicionar de certificación clásica a cuántica aumentando el ruido en uno de los qubits.

En el Apéndice A se encuentran los gráficos de contornos para todas las combinaciones de los ruidos empleados.

4.3. Combatiendo ruido con ruido

En trabajos anteriores [9, 10] se identificaron escenarios puntuales en los que ocurría otro fenómeno destacable: era posible mejorar el rendimiento de un protocolo al punto de pasar de no certificado a certificado cuántico por medio de un aumento en la intensidad del ruido en uno de los dos qubits. Esto es de especial relevancia ya que, si bien en aplicaciones reales no es posible deshacerse de ruidos que afecten el protocolo, sí es verosímil pensar

que, en ambientes controlados, se puede aumentar la intensidad del ruido de alguno de los dos qubits. Esto podría no sólo mejorar la precisión de la teleportación sino también, en ciertos casos, promover el protocolo a “certificado cuántico”. El fenómeno de “combatir ruido con ruido” se había observado anteriormente solo para la función Fidelity; sin embargo, las figuras 4.1a, 4.1c y 4.1d indican que la misma no es exclusiva de esta medida de distancia, sino que ocurre también para otras figuras de mérito. En ese sentido, los resultados fortalecen la hipótesis de que el fenómeno de combatir ruido con ruido es genuino.

4.4. Entrelazamiento y certificación

La formulación original del protocolo utiliza un estado de Bell como canal de comunicación cuántico entre Alice y Bob. Como se mencionó en la sección 2.1.3, estos estados se denominan máximamente entrelazados. A medida que aumenta la intensidad de los ruidos que actúan sobre el sistema, el grado de entrelazamiento del mismo naturalmente disminuye. En la figura 4.2 se puede observar el comportamiento de la negatividad del estado $|\beta\rangle_{00}$ a medida que aumentan las intensidades de dos canales de tipo Depolarizing Channel y Amplitude Damping Channel actuando sobre los qubits de Alice y Bob, respectivamente.

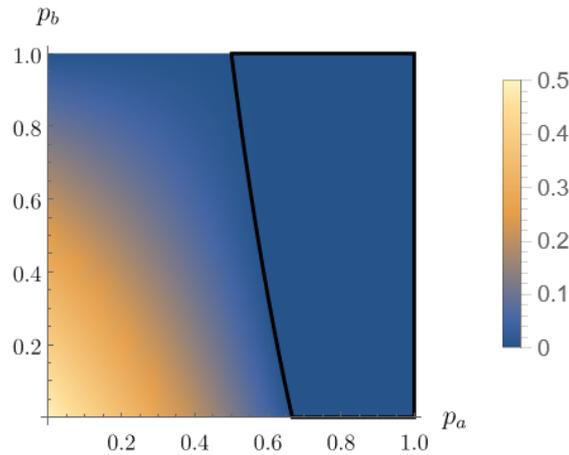


Fig. 4.2: Negatividad del estado recurso en función de los parámetros de intensidad p_a, p_b de un Depolarizing Channel actuando sobre el qubit de Alice y un Amplitude Damping Channel actuando sobre el de Bob. La región delimitada por la línea negra denota que el estado es separable.

Si se aumentan lo suficiente los parámetros de intensidad de los canales que actúan sobre el par, eventualmente ocurrirá que el mismo pasará a ser separable, es decir, no entrelazado. A pesar de ser un recurso necesario para la teleportación en el caso ideal, se han estudiado familias de estados recursos entrelazados que no dan lugar a una certificación cuántica del protocolo [39]. Por el contrario, otros trabajos han mostrado evidencia de que al ir más allá del criterio de certificación por fidelidad, existen estados recursos separables que sí dan lugar a teleportación cuántica certificada [19]. De estos hechos se deriva que, contrario a la intuición, la propiedad de entrelazamiento del estado recurso no determina la certificación de un protocolo. En la figura 4.3 se aprecia cómo ambos escenarios conviven en una misma configuración de canales ruidosos.

En el Apéndice B se encuentran las regiones de separabilidad y certificación para todas

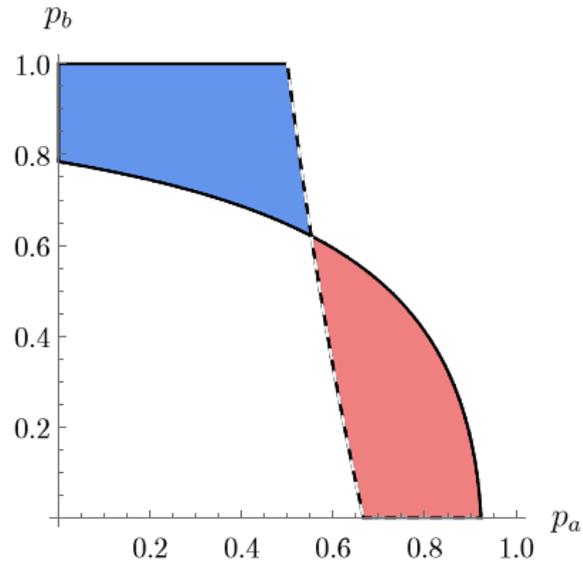


Fig. 4.3: Separabilidad y certificación en función de los parámetros de intensidad p_a, p_b de un Depolarizing Channel actuando sobre el qubit de Alice y un Amplitude Damping Channel actuando sobre el de Bob, utilizando Trace Distance. La región roja indica que el estado recurso es separable y el protocolo es certificado cuántico, mientras que la región azul implica un estado entrelazado que no alcanza la certificación.

las combinaciones de los ruidos empleados.

5. ESTIMACIÓN EXPERIMENTAL DE LA DISTANCIA MEDIA DE TELEPORTACIÓN

Se utilizó la biblioteca de Qiskit para Python para desarrollar una herramienta que permite estimar la distancia media de teleportación para cualquier configuración de ruido sobre el estado recurso y cualquier medida de distancia de estados cuánticos [20]. Esta fue posteriormente evaluada contrastando los resultados obtenidos con los valores teóricos esperados, calculados en la sección 4.2. Dichos resultados fueron el producto de ejecutar la herramienta utilizando tanto simuladores como QPUs provistas por la plataforma Qiskit Runtime.

5.1. Esquema de la herramienta

Dada una configuración de ruidos aplicados al estado recurso, la herramienta genera un conjunto de circuitos cuya ejecución permite estimar los estados ρ_{ij}^B , junto con sus respectivas probabilidades p_{ij} . Luego, para cualquier medida de distancia D , podemos calcular el puntaje de calificación $\bar{D}(\rho^a)$ del estado de entrada ρ^a . Para lograr esto fue necesario aumentar el circuito estándar de teleportación (figura 3.1) con cuatro componentes adicionales, como se puede observar en la figura 5.1:

- un componente de inicialización del qubit a transmitir
- componentes capaces de simular canales ruidosos
- un componente capaz de aplicar las nuevas correcciones óptimas al qubit de Bob
- un componente de cambio de base previo a la medición.

Otra modificación en cuanto al circuito de la figura 3.1 es el reemplazo de compuertas controladas por bits clásicos a compuertas controladas por qubits, trasladando las mediciones de Alice al final del circuito. Este cambio, realizado por simplicidad en la construcción del circuito, es permitido por el principio de medición diferida, presentado en la sección 2.2.2.

A continuación se detallarán los funcionamientos de los nuevos componentes.

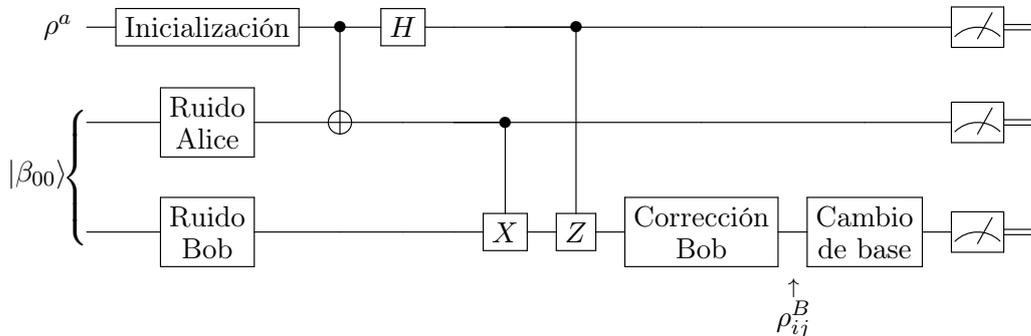


Fig. 5.1: Circuito esquemático de la implementación en Qiskit del protocolo de teleportación con ruidos. Las cajas etiquetadas abstraen operaciones que pueden estar implementadas tanto con compuertas universales paramétricas o con circuitos embebidos, como en el caso de los ruidos.

5.1.1. Inicialización

La primera adición que podemos observar en el nuevo circuito es un componente de inicialización del qubit a transmitir, ya que sería imposible estudiar el comportamiento real de un protocolo si únicamente intentamos transmitir el qubit $|0\rangle$, que es el valor inicial por default en Qiskit.

Con el objetivo de aproximar la integral sobre la medida de Haar (que en este caso quiere decir integrar uniformemente sobre una esfera tridimensional) como indica la ecuación (4.1), se toman muestras de puntos uniformemente distribuidos sobre la esfera de Bloch. Para lograr esto debemos recurrir a la compuerta cuántica universal, conocida en Qiskit como *UGate* y definida en la ecuación (2.48). Eligiendo apropiadamente los parámetros θ , ϕ y λ generaremos compuertas que llevan el estado inicial $|0\rangle$ a un punto al azar sobre la esfera de Bloch; es decir, un qubit puro aleatorio. Esta elección consta de tomar $\phi, \lambda \sim U(0, 2\pi)$ y $\theta \sim \frac{1}{2} \sin(U(0, \pi))$ [40] siendo $U(a, b)$ una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$. Esta compuerta se aplica sobre el qubit a transmitir, dejando un circuito como el de la figura 5.1.

Asimismo, existen algunos escenarios específicos [41] para los cuales vale la siguiente igualdad:

$$\langle \bar{D} \rangle = \frac{1}{|P|} \sum_{|\psi\rangle \in P} \bar{D}(\rho^a), \quad (5.1)$$

donde $\rho^a = |\psi\rangle\langle\psi|$ y P es el conjunto de los autovectores de las matrices de Pauli. Este es un hecho destacable ya que nos permite calcular de forma exacta (salvo errores estadísticos en la tomografía) la distancia media de teleportación tomando el promedio sobre seis estados, lo cual es de especial utilidad a la hora de correr los experimentos en QPUs debido al limitado tiempo de ejecución disponible.

En particular, la fórmula vale cuando la medida de distancia es la Fidelity, por lo que los experimentos en computadoras cuánticas serán limitados a esos casos particulares.

5.1.2. Ruidos

Como se detalló en la sección 2.1.5, una operación cuántica puede modelarse considerando su transformación como la interacción entre un sistema y su entorno, a través de un operador unitario. En consecuencia, su representación como circuito debe incluir al menos un qubit adicional para poder caracterizar al entorno. Estos qubits auxiliares forman parte del circuito final de teleportación; sin embargo, por simplicidad, fueron omitidos y considerados dentro de las cajas de ruido de Alice y Bob en la figura 5.1.

En la figura 5.2 se presentan los circuitos cuánticos para los cuatro tipos de ruido aplicados, Amplitude Damping Channel (Fig. 5.4b), Depolarizing Channel (Fig. 5.2b), Mirrored Amplitude Channel (Fig. 5.2c) y Phase Damping Channel (Fig. 5.2d), respectivamente, en función de un ángulo de rotación θ . Este ángulo depende de $p \in [0, 1]$, el parámetro que mide la intensidad del ruido en el canal. Para los circuitos de las figuras 5.4b, 5.2c y 5.2d, se tiene $\theta(p) = 2 \arcsin \sqrt{p}$ [24]. En cambio, para el circuito de la figura 5.2b, $\theta(p) = 2 \arccos \sqrt{1-z}$, donde z es la menor de las raíces del polinomio $-z^2 + z - p/4$ [42].

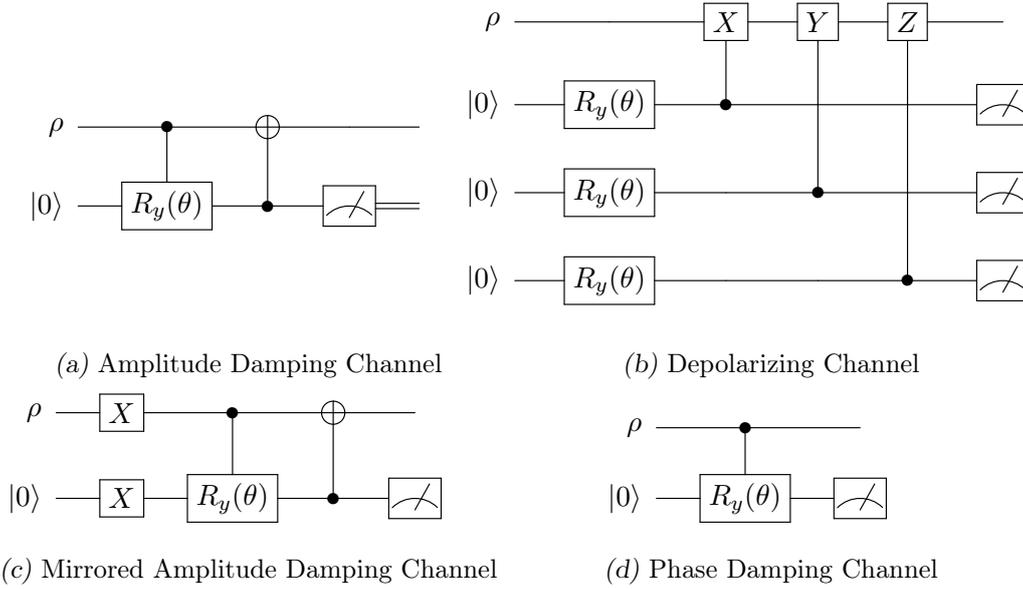


Fig. 5.2: Circuitos cuánticos correspondientes a los canales ruidosos utilizados en este trabajo.

5.1.3. Corrección Óptima

En el protocolo de teleportación cuántica sin ruidos, las correcciones de Bob a su sistema dependen exclusivamente de la medición de Alice. Sin embargo, en la sección 3.2 se observó que en la versión ruidosa del protocolo optimizado para la Fidelity, la corrección de Bob es de la forma $\mathbb{R}_{ij} = w_{ij}\tilde{w}$. Esto indica que dicha corrección depende tanto de la medición de Alice como de \tilde{w} , que es una función del protocolo.

Para realizar las rotaciones descritas por \mathbb{R}_{ij} debemos encontrar la forma de expresarlas como una compuerta cuántica. Considerando el caso más simple, en el cual no actúa ningún ruido sobre el estado recurso, tenemos que $\tilde{w} = w_{00}$. Esto implica $\mathbb{R}_{ij} = w_{ij}$ y la corrección es idéntica a la del protocolo estándar. Luego, al generalizar para otros valores de \tilde{w} , observamos que la transformación es equivalente a corregir como el protocolo original y luego aplicar una compuerta como indica la tabla 5.1.

\tilde{w}	Corrección extra de Bob
w_{00}	I
w_{01}	X
w_{10}	Z
w_{11}	ZX

Tab. 5.1: Compuerta a aplicar al qubit de Bob en función del valor de \tilde{w} definido en la sección 3.2

5.1.4. Cambio de base

Para poder comparar el estado del qubit recibido por Bob con el del transmitido por Alice, es necesario utilizar el procedimiento conocido como tomografía de estado, detallado en la sección 2.1.7. Este método nos permite reconstruir estadísticamente las coordenadas del vector de Bloch de un qubit mediante repetidas preparaciones y mediciones del mismo.

Sin embargo, Qiskit solo permite medir en la base computacional y la tomografía requiere estimar el valor medio de los observables σ_1, σ_2 y σ_3 . Es por eso que debemos realizar manualmente las operaciones descritas en la tabla 5.2 inmediatamente antes de la operación de medición para que los resultados de la misma estén expresados en la base deseada.

Al ser esta una estimación, la precisión de cada coordenada del vector de Bloch resultante de la tomografía aumentará a medida que se aumenten las repeticiones de cada experimento, convergiendo en el límite al valor real de dicha coordenada.

Observable	Transformación
σ_1	H
σ_2	HS^\dagger
σ_3	I

Tab. 5.2: Compuertas necesarias para efectuar el cambio de base sobre el qubit de Bob

Si se realizara tomografía estándar sobre el qubit de Bob, estaríamos estimando el estado $\sum_{ij \in \{0,1\}^2} p_{ij} \rho_{ij}^B$, un ensamble de los estados condicionales del resultado del protocolo. No obstante, si deseamos calcular $\langle \bar{D} \rangle$ debemos obtener las probabilidades p_{ij} y los estados ρ_{ij}^B por separado. Para lograr esto se deben realizar tomografías condicionadas a las mediciones de Alice, lo cual consiste en analizar los resultados de las tres mediciones partiendo en casos.

Dado un experimento, una vez realizadas n mediciones con cada uno de los tres observables, contaremos con tres multiconjuntos R_1, R_2 y R_3 . Cada uno está compuesto de n instancias de cadenas $ijk \in \{0,1\}^3$, donde los primeros dos símbolos corresponden a la medición de Alice y el último, a la de Bob.

Por un lado, debemos estimar los correspondientes p_{ij} , que representan la probabilidad de Alice de obtener ij de la medición de sus qubits. Para ello utilizaremos la siguiente fórmula, donde $|\cdot|_x$ denota la cantidad de apariciones de un elemento x en un multiconjunto:

$$p_{ij} = \frac{1}{3n} (|R_1|_{ij0} + |R_1|_{ij1} + |R_2|_{ij0} + |R_2|_{ij1} + |R_3|_{ij0} + |R_3|_{ij1}). \quad (5.2)$$

De esta forma estamos calculando la cantidad de veces que Alice midió ij y dividiendo por el total. Notar que la medición de Alice es independiente del observable utilizado.

Por otro lado, para reconstruir los estados condicionales

$$\rho_{ij}^B = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + (r_{ij}^1, r_{ij}^2, r_{ij}^3) \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.3)$$

podemos calcular cualquier componente r_{ij}^k para $k \in \{1, 2, 3\}$ utilizando la siguiente ecuación:

$$r_{ij}^k = \frac{|R_k|_{ij0} - |R_k|_{ij1}}{|R_k|_{ij0} + |R_k|_{ij1}}. \quad (5.4)$$

Esta se asemeja más al procedimiento visto en la sección 2.1.7, solo que acotamos el espacio de resultados a aquellos en los que Alice midió ij . Recordar que el bit 0 representa el autovalor 1 y el bit 1 representa el autovalor -1 de los observables.

Una observación importante es que el denominador de la ecuación (5.4) se anula si y sólo si $p_{ij} = 0$, para valores de n lo suficientemente grandes. Esto implica que no es necesario estimar el estado ρ_{ij}^B , ya que tiene probabilidad 0 de ocurrir.

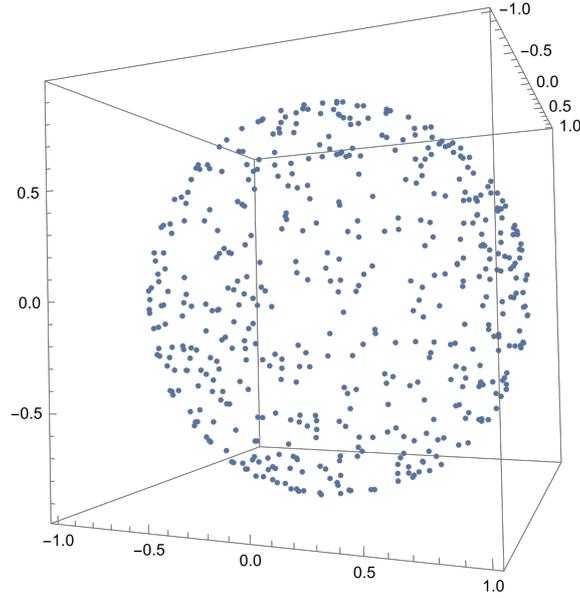


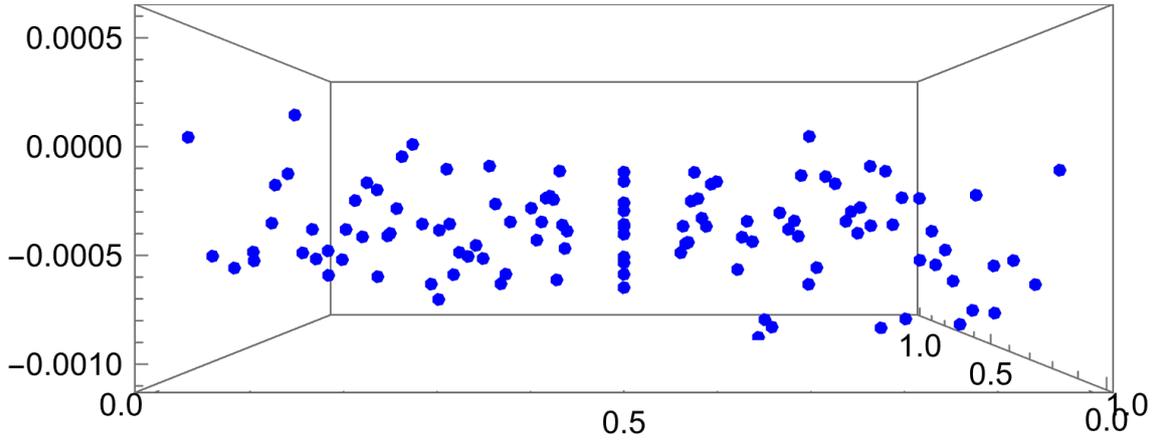
Fig. 5.3: Representación de 500 muestras aleatorias dispuestas sobre la esfera de Bloch

5.2. Resultados simulación

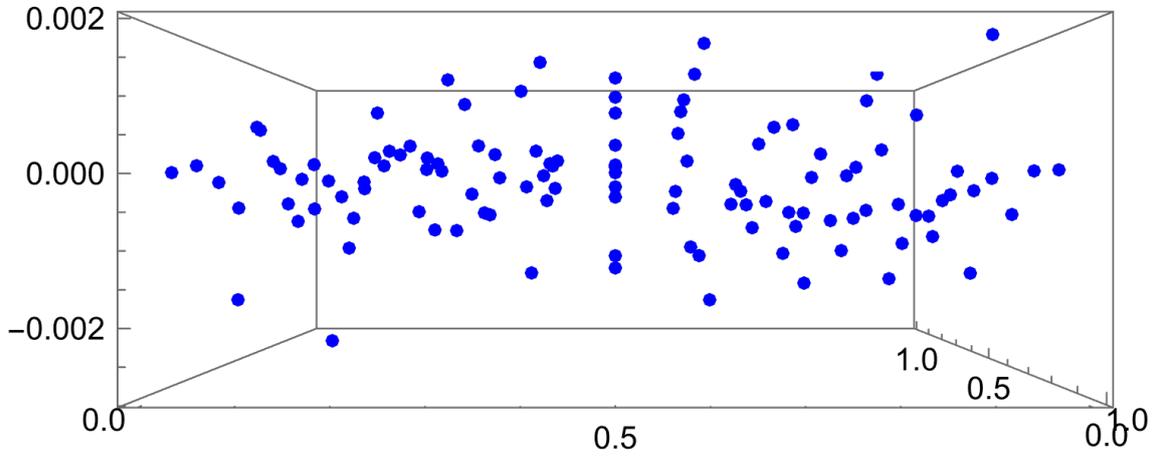
Se corrieron simulaciones utilizando el circuito descrito en la figura 5.1 para calcular la distancia media de teleportación bajo todas las medidas de distancia y canales ruidosos, instanciando sus parámetros de intensidad p_a y p_b sobre una cuadrícula de $[0, 1] \times [0, 1]$ con incrementos de 0.1, lo que equivale a 121 pares de (p_a, p_b) por cada combinación de canales ruidosos.

Los experimentos fueron llevados a cabo tomando 500 muestras aleatorias, ilustradas en la figura 5.3, lo cual se consideró lo suficientemente bueno para el alcance de este trabajo. Es importante destacar que el número de muestras tiene un impacto significativo en los tiempos de ejecución de cada experimento; por lo que, si bien aumentarlo mejora considerablemente la exactitud de la estimación, las restricciones de recursos disponibles (tanto de cómputo como de tiempo) fueron un factor determinante a la hora de elegir ese valor. Análogamente, el número de ejecuciones (o *shots*) para todas las simulaciones realizadas es de 2000 y fueron tenidas en cuenta las mismas limitaciones que aplicaron en la elección de cantidad de muestras.

Luego, se tomó el valor absoluto de la diferencia entre cada resultado de la simulación y su correspondiente valor teórico utilizando la fórmula (4.1), como se puede apreciar en la figura 5.4. Finalmente, para cada configuración de ruido y medida de distancia se calculó el promedio y el desvío estándar de los errores. Los resultados se pueden encontrar en la tabla C.1 del Apéndice C.



(a) Diferencias entre valores esperados y simulados utilizando Affinity para dos canales de tipo Depolarizing Channel actuando sobre los qubits de Alice y Bob.



(b) Diferencias entre valores esperados y simulados utilizando Fidelity para canales de tipo Amplitude Damping Channel y Depolarizing Channel actuando sobre los qubits de Alice y Bob, respectivamente.

Fig. 5.4: Diferencias entre valores esperados y simulados para distintas métrica y configuraciones de ruido.

El mínimo error obtenido se encontró al exponer tanto a Alice como a Bob a un canal de tipo Depolarizing Channel y utilizar como medida la Fidelity, obteniendo una diferencia de promedio de 3.81×10^{-04} . A su vez, el máximo error fue de 5.34×10^{-03} , el cual ocurrió al exponer ambos qubits a un Phase Damping Channel y evaluar el rendimiento con la Wooters Distance.

5.3. Resultados experimentales

Para esta sección se diseñaron experimentos más acotados que los ejecutados en simuladores debido a las limitaciones al tiempo de ejecución en QPUs provistas por Qiskit Runtime. Por un lado, dejó de ser factible simular la integral sobre la medida de Haar tomando 500 muestras uniformemente aleatorias debido a dichas limitaciones. En consecuencia, se recurrió a la equivalencia presentada en (5.1), logrando así calcular la distancia

media de teleportación realizando tomografía de estado sobre solo seis estados. Esto implica otra serie de restricciones, ya que la ecuación no vale para todos los casos analizados en la sección 5.2. Por ello, se decidió utilizar únicamente la función Fidelity para evaluar el caso donde ambos qubits fueron expuestos a ruido de tipo Amplitude Damping Channel. Por otro lado, el espacio de parámetros de intensidad (p_a, p_b) de los ruidos se redujo a rectas dentro de la región $[0, 1] \times [0, 1]$.

Para los experimentos ejecutados en QPUs fueron puestas a prueba diferentes técnicas de generación y ejecución de los circuitos con el objetivo de optimizar la precisión de estos. Podemos apreciar en la figura 5.5 que distintas optimizaciones produjeron mejoras en los resultados obtenidos.

Los puntos amarillos corresponden a ejecuciones sobre circuitos idénticos a los utilizados en la sección 5.2 y son los que más difieren con los valores teóricos esperados.

Los puntos verdes corresponden a circuitos que, si bien respetan el esquema de la figura 5.1, evitan el uso de la compuerta paramétrica $UGate$ y lo reemplaza por secuencias de compuertas fijas equivalentes. Se observa que el rendimiento mejora considerablemente, aunque algunos puntos se alejan de la curva esperada. La hipótesis es que el uso extensivo de compuertas $UGate$ impide realizar grandes optimizaciones sobre el circuito, lo cual es crucial para reducir la profundidad del mismo y así disminuir los errores producidos durante su ejecución.

Por último, a los circuitos optimizados se adicionaron mecanismos de mitigación de errores provistos por Qiskit Runtime conocidos como “Pauli Twirling” [43] y “Dynamical Decoupling” [44], los cuales aplican técnicas que alteran el circuito para hacerlo más resiliente a errores. Los resultados fueron marginalmente superiores y pueden apreciarse en los puntos rojos de la figura 5.5.

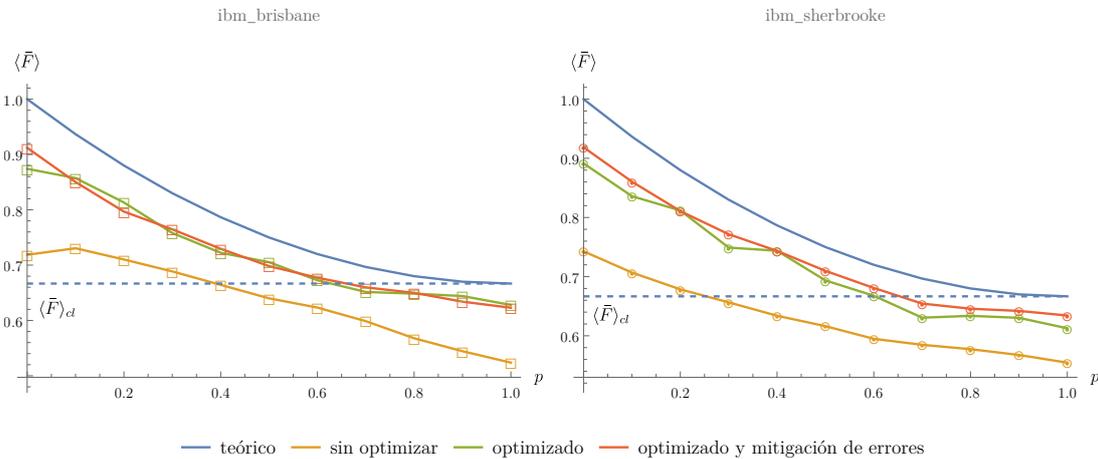


Fig. 5.5: Experimentos corridos en QPUs analizando dos canales expuestos a Amplitude Damping Channel con parámetros de intensidad p mediante la función Fidelity. Los experimentos fueron repetidos 2000 veces en cada base de medición del proceso de tomografía de estado.

Adicionalmente, se deseó observar el fenómeno mencionado al final de la sección 4.2, donde se logra una certificación cuántica aumentando el ruido en uno de los dos qubits. Para lograr esto se fijó uno de los parámetros de intensidad $p = 0.85$ en pos de transicionar de certificación clásica a cuántica a medida que el otro parámetro es incrementado (ver figura 4.1b). Los resultados observados en la figura 5.6 indican que no se dispone de la precisión

necesaria para apreciar dicho fenómeno, a pesar de haber incrementado la cantidad de *shots* a 10000.

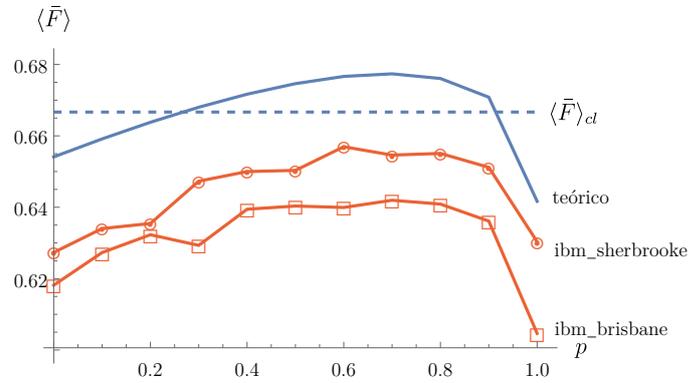


Fig. 5.6: Experimentos corridos en QPUs analizando dos canales expuestos a Amplitude Damping Channel con parámetros de intensidad 0.85 y p , mediante la función Fidelity. Cada experimento fue repetido 10000 veces.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se llevó a cabo un estudio sistemático del protocolo de teleportación cuántica bajo distintos escenarios de ruido, cuantificando su desempeño a través de la *distancia media de teleportación* (sección 3.2).

Los resultados obtenidos en el capítulo 4 fortalecen el argumento hecho en [19], confirmando la necesidad de explorar diferentes figuras de rendimiento del protocolo, dado que la distancia media de teleportación se muestra susceptible al sesgo introducido por cada métrica utilizada. Esto impacta en que la certificación del protocolo depende de la métrica aplicada, lo que la convierte en un criterio no universal (sección 4.2). Además, se halló que el fenómeno de “combatir ruido con ruido”, previamente identificado en canales de tipo Amplitude Damping Channel utilizando la medida de Fidelity [9, 10], también se manifiesta con otras métricas, lo que sugiere que es un fenómeno intrínseco del protocolo, independiente de la métrica empleada (sección 4.3). Paralelamente, se cuestionó el rol del entrelazamiento en el protocolo de teleportación (sección 4.4), observando una falta de correspondencia entre la separabilidad del estado recurso y la certificación del protocolo.

Por otro lado, se desarrolló una herramienta [20] que permite estimar experimentalmente la distancia media de teleportación para cualquier protocolo ruidoso y cualquier función de distancia utilizando Qiskit (capítulo 5). La misma fue ejecutada tanto en simuladores como en computadoras cuánticas, y los resultados obtenidos se contrastaron con los valores teóricos esperados para validar su correcto funcionamiento. Las simulaciones (sección 5.2) mostraron que los circuitos de la herramienta lograron una alta precisión respecto a los valores teóricos, estando limitados principalmente por variables estadísticas, como la cantidad de repeticiones por experimento o el número de muestras a teleportar.

En cuanto a las ejecuciones en QPUs, las mismas exhibieron un menor rendimiento debido a los ruidos inherentes de las plataformas cuánticas disponibles (sección 5.3). Sin embargo, las discrepancias con los valores esperados fueron coherentes y revelaron un patrón consistente a medida que se incrementó el ruido inyectado en el circuito que generaba el estado recurso de Alice y Bob.

Este trabajo resalta la necesidad de explorar otras figuras de mérito y criterios de certificación de protocolos de teleportación. Una posible línea de investigación es contemplar momentos diferentes a la media [45], o estudiar la distribución de probabilidad de una métrica aplicada al rendimiento de la teleportación.

Por otra parte, sería de interés identificar más escenarios realistas en los que se observa el fenómeno de combatir ruido con ruido; o, en su defecto, definir las condiciones que debe cumplir un par de canales ruidosos para exhibir dicho fenómeno.

En paralelo, surge la pregunta de cuáles son las propiedades cuánticas que debe poseer el recurso para determinar la certificación. Dado que no se encontró una correspondencia con el entrelazamiento, pueden ser consideradas otras correlaciones cuánticas [46].

Por último, resta poner a prueba la herramienta de estimación de la distancia media de teleportación bajo más canales ruidosos y medidas de distancia.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. H. Bennett et al. «Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels». *Physical review letters* 70.13 (1993), pág. 1895.
- [2] D. Gottesman e I. L. Chuang. «Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations». *Nature* 402.6760 (1999), págs. 390-393.
- [3] W. K. Wootters y W. H. Zurek. «A single quantum cannot be cloned». *Nature* 299.5886 (1982), págs. 802-803.
- [4] D. Dieks. «Communication by EPR devices». *Physics Letters A* 92.6 (1982), págs. 271-272. ISSN: 0375-9601.
- [5] S. Pirandola et al. «Advances in quantum teleportation». *Nature photonics* 9.10 (2015), págs. 641-652.
- [6] T. Liu. «The applications and challenges of quantum teleportation». *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1634. 1. IOP Publishing. 2020, pág. 012089.
- [7] X.-M. Hu et al. «Progress in quantum teleportation». *Nature Reviews Physics* 5.6 (2023), págs. 339-353.
- [8] S. Oh, S. Lee y H.-w. Lee. «Fidelity of quantum teleportation through noisy channels». *Physical Review A* 66.2 (2002), pág. 022316.
- [9] L. T. Knoll, C. T. Schmiegelow y M. A. Larotonda. «Noisy quantum teleportation: An experimental study on the influence of local environments». *Physical Review A* 90.4 (2014), pág. 042332.
- [10] R. Fortes y G. Rigolin. «Fighting noise with noise in realistic quantum teleportation». *Physical Review A* 92.1 (2015), pág. 012338.
- [11] D.-G. Im et al. «Optimal teleportation via noisy quantum channels without additional qubit resources». *npj Quantum Information* 7.1 (2021), pág. 86.
- [12] D. Bouwmeester et al. «Experimental quantum teleportation». *Nature* 390.6660 (1997), págs. 575-579.
- [13] J.-G. Ren et al. «Ground-to-satellite quantum teleportation». *Nature* 549.7670 (2017), págs. 70-73.
- [14] Q.-C. Sun et al. «Quantum teleportation with independent sources and prior entanglement distribution over a network». *Nature Photonics* 10.10 (2016), págs. 671-675.
- [15] R. Valivarthi et al. «Quantum teleportation across a metropolitan fibre network». *Nature Photonics* 10.10 (2016), págs. 676-680.
- [16] S. Massar y S. Popescu. «Optimal extraction of information from finite quantum ensembles». *Physical review letters* 74.8 (1995), pág. 1259.
- [17] X.-M. Hu et al. «Experimental certification for nonclassical teleportation». *Quantum Engineering* 1.2 (2019), e13.
- [18] A. Gilchrist, N. K. Langford y M. A. Nielsen. «Distance measures to compare real and ideal quantum processes». *Physical Review A* 71.6 (2005), pág. 062310.

-
- [19] D. Bussandri, G. M. Bosyk y F. Toscano. «Challenges in certifying quantum teleportation: moving beyond conventional fidelity benchmark». *accepted en Physical Review A* (2024).
- [20] Bruno, Patricio (2024). URL: <https://github.com/pdbruno/tesis>.
- [21] IBM Quantum (2024). URL: <https://quantum.ibm.com>.
- [22] H. Kragh. «Max Planck: the reluctant revolutionary». *Physics World* (2020).
- [23] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*. Vol. 53. Princeton university press, 2018.
- [24] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [25] A. K. Ekert. «Quantum cryptography and Bell's theorem». *Quantum Measurements in Optics* (1991), págs. 413-418.
- [26] C. H. Bennett y S. J. Wiesner. «Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states». *Phys. Rev. Lett.* 69 (20 nov. de 1992), págs. 2881-2884.
- [27] K. Życzkowski et al. «Volume of the set of separable states». *Phys. Rev. A* 58 (2 ago. de 1998), págs. 883-892.
- [28] J. Maziero. «Computing partial transposes and related entanglement functions». *Brazilian Journal of Physics* 46.6 (2016), págs. 605-611.
- [29] I. Bengtsson y K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge university press, 2017.
- [30] W. K. Wootters. «Statistical distance and Hilbert space». *Phys. Rev. D* 23 (2 ene. de 1981), págs. 357-362.
- [31] S. Luo y Q. Zhang. «Informational distance on quantum-state space». *Phys. Rev. A* 69 (3 mar. de 2004), pág. 032106.
- [32] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010. Cap. 8.
- [33] D. Deutsch. «Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer». *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 400.1818 (1985), págs. 97-117.
- [34] D. Deutsch y R. Jozsa. «Rapid solution of problems by quantum computation». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 439 (1907 1992), págs. 553-558.
- [35] D. R. Simon. «On the power of quantum computation». *SIAM journal on computing* 26.5 (1997), págs. 1474-1483.
- [36] P. Shor. «Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring». *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. 1994, págs. 124-134.
- [37] L. K. Grover. «A fast quantum mechanical algorithm for database search». *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1996, págs. 212-219.

-
- [38] A. Barenco et al. «Elementary gates for quantum computation». *Phys. Rev. A* 52 (5 nov. de 1995), págs. 3457-3467.
- [39] D. Cavalcanti, P. Skrzypczyk e I. Šupić. «All Entangled States can Demonstrate Nonclassical Teleportation». *Phys. Rev. Lett.* 119 (11 sep. de 2017), pág. 110501.
- [40] Di Matteo, Olivia. «Understanding the Haar measure» (2021). URL: https://pennylane.ai/qml/demos/tutorial_haar_measure/.
- [41] C. Dankert et al. «Exact and approximate unitary 2-designs and their application to fidelity estimation». *Physical Review A* 80.1 (jul. de 2009). ISSN: 1094-1622.
- [42] URL: <https://quantumcomputing.stackexchange.com/a/4369>.
- [43] J. J. Wallman y J. Emerson. «Noise tailoring for scalable quantum computation via randomized compiling». *Phys. Rev. A* 94 (5 nov. de 2016), pág. 052325.
- [44] N. Ezzell et al. «Dynamical decoupling for superconducting qubits: A performance survey». *Phys. Rev. Appl.* 20 (6 dic. de 2023), pág. 064027.
- [45] J. Bang, J. Ryu y D. Kaszlikowski. «Fidelity deviation in quantum teleportation». *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 51.13 (feb. de 2018), pág. 135302.
- [46] Y. Fan, C. Jia y L. Qiu. «Quantum steering as resource of quantum teleportation». *Phys. Rev. A* 106 (1 jul. de 2022), pág. 012433.

Apéndice

A. CONTORNOS DISTANCIA MEDIA DE TELEPORTACIÓN

En este apéndice se presentan todos los gráficos generados en el marco del estudio de la distancia media de teleportación, encontrado en la sección 4.2. En estos se pueden visualizar los contornos de $\langle \bar{D} \rangle$ en función de los parámetros de intensidad p_a y p_b de los ruidos analizados en este trabajo. Para cada configuración de ruido se aprecia cómo las distintas métricas certifican de forma contradictoria al protocolo, según el color de la región.

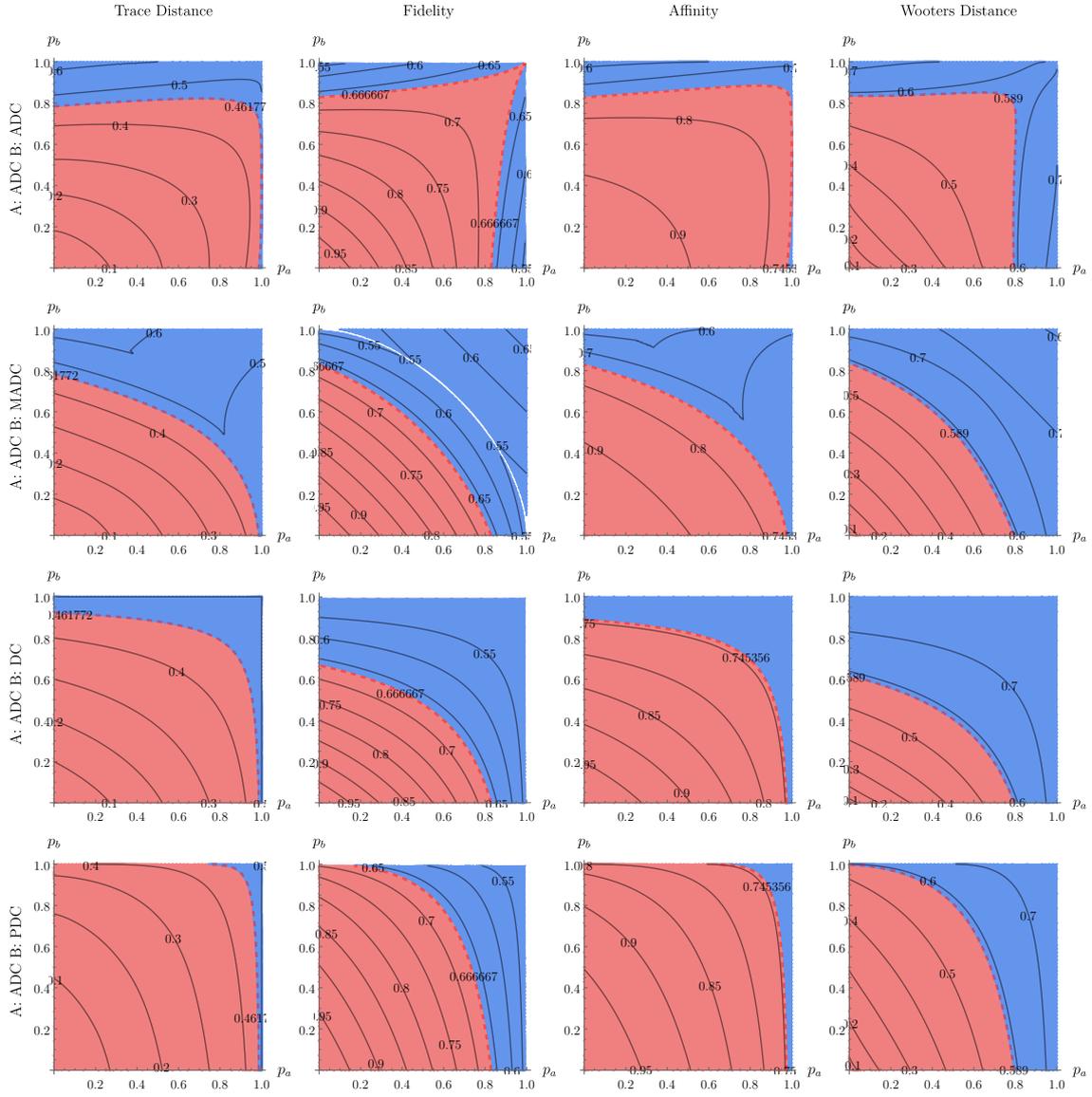


Fig. A.1: Distancia media de teleportación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La línea punteada marca el contorno $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$, que divide la región roja “certificada cuántica” de la azul, a la cual le corresponde un rendimiento peor al mejor protocolo clásico.

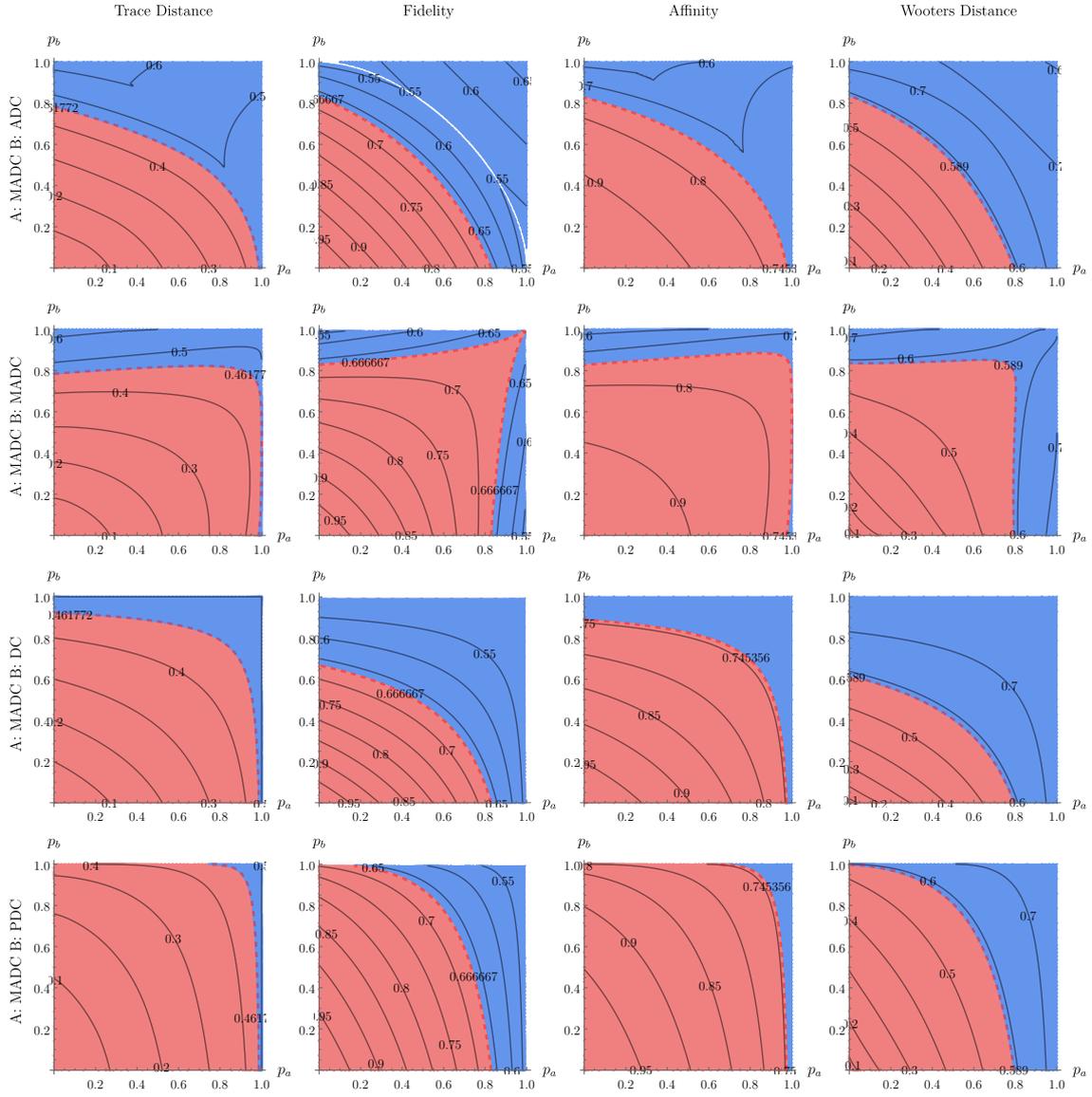


Fig. A.2: Distancia media de teleportación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La línea punteada marca el contorno $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$, que divide la región roja “certificada cuántica” de la azul, a la cual le corresponde un rendimiento peor al mejor protocolo clásico.

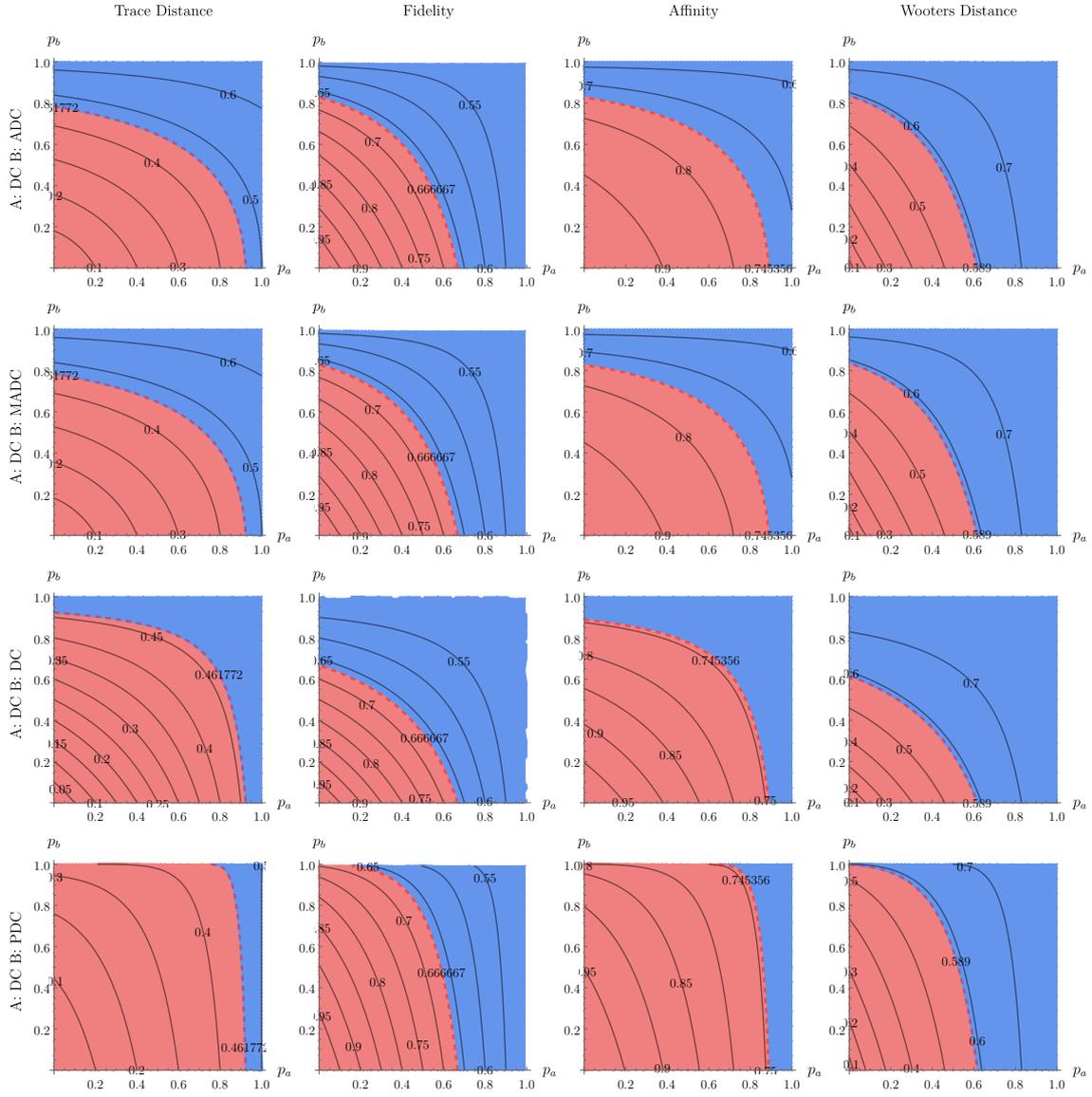


Fig. A.3: Distancia media de teleportación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La línea punteada marca el contorno $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$, que divide la región roja “certificada cuántica” de la azul, a la cual le corresponde un rendimiento peor al mejor protocolo clásico.

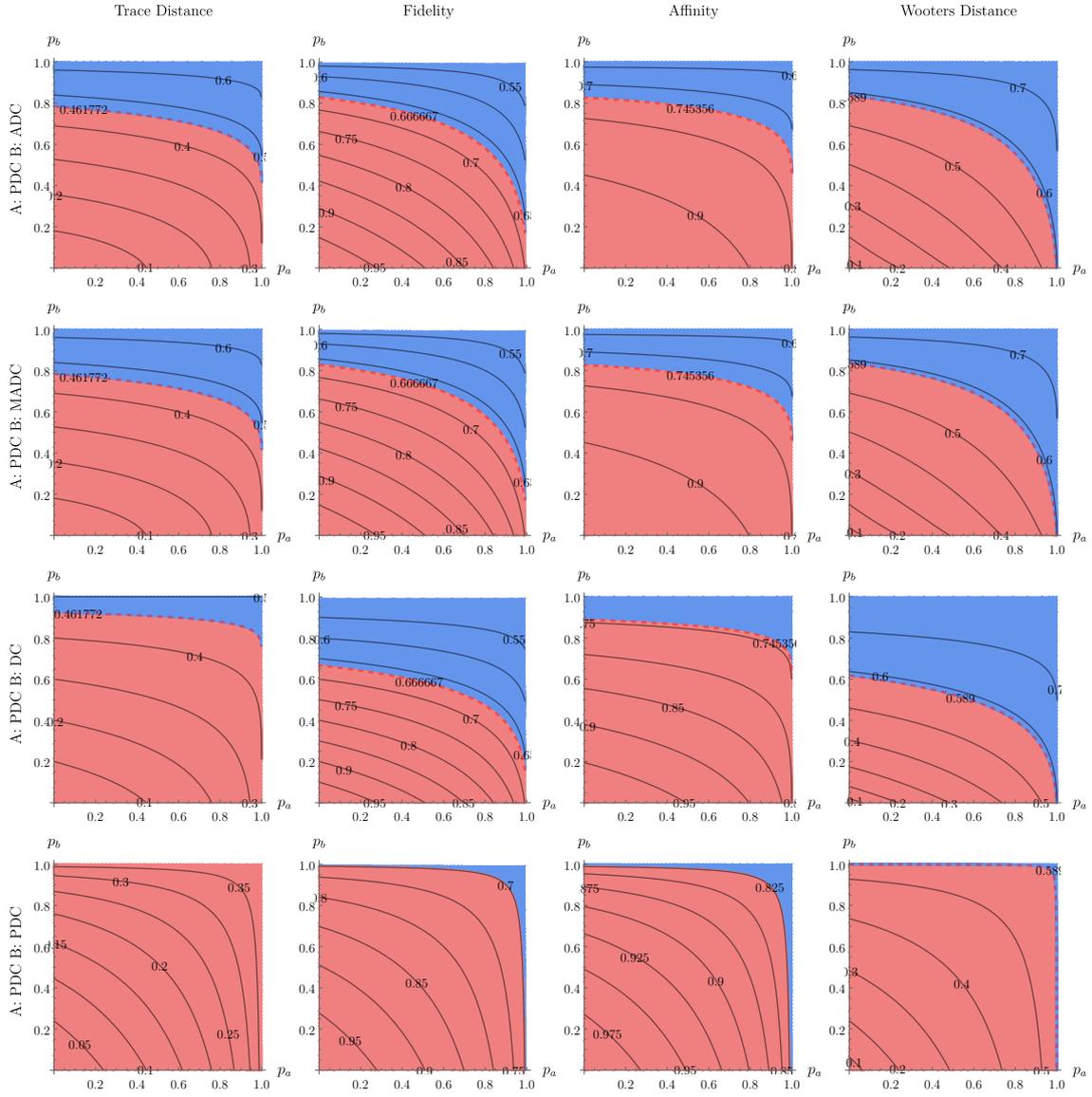


Fig. A.4: Distancia media de teleportación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La línea punteada marca el contorno $\langle \bar{D} \rangle_{cl}$, que divide la región roja “certificada cuántica” de la azul, a la cual le corresponde un rendimiento peor al mejor protocolo clásico.

B. REGIONES SEPARABILIDAD Y CERTIFICACIÓN

En esta sección se encuentran los gráficos del estudio de la negatividad y separabilidad del estado recurso y su rol en la certificación del protocolo, llevado a cabo en la sección 4.4. En la figura B.1 podemos apreciar como disminuye la negatividad (una medida del entrelazamiento) del par de Alice y Bob a medida que aumentan las intensidades de los canales ruidosos que actúan sobre sus sistemas.

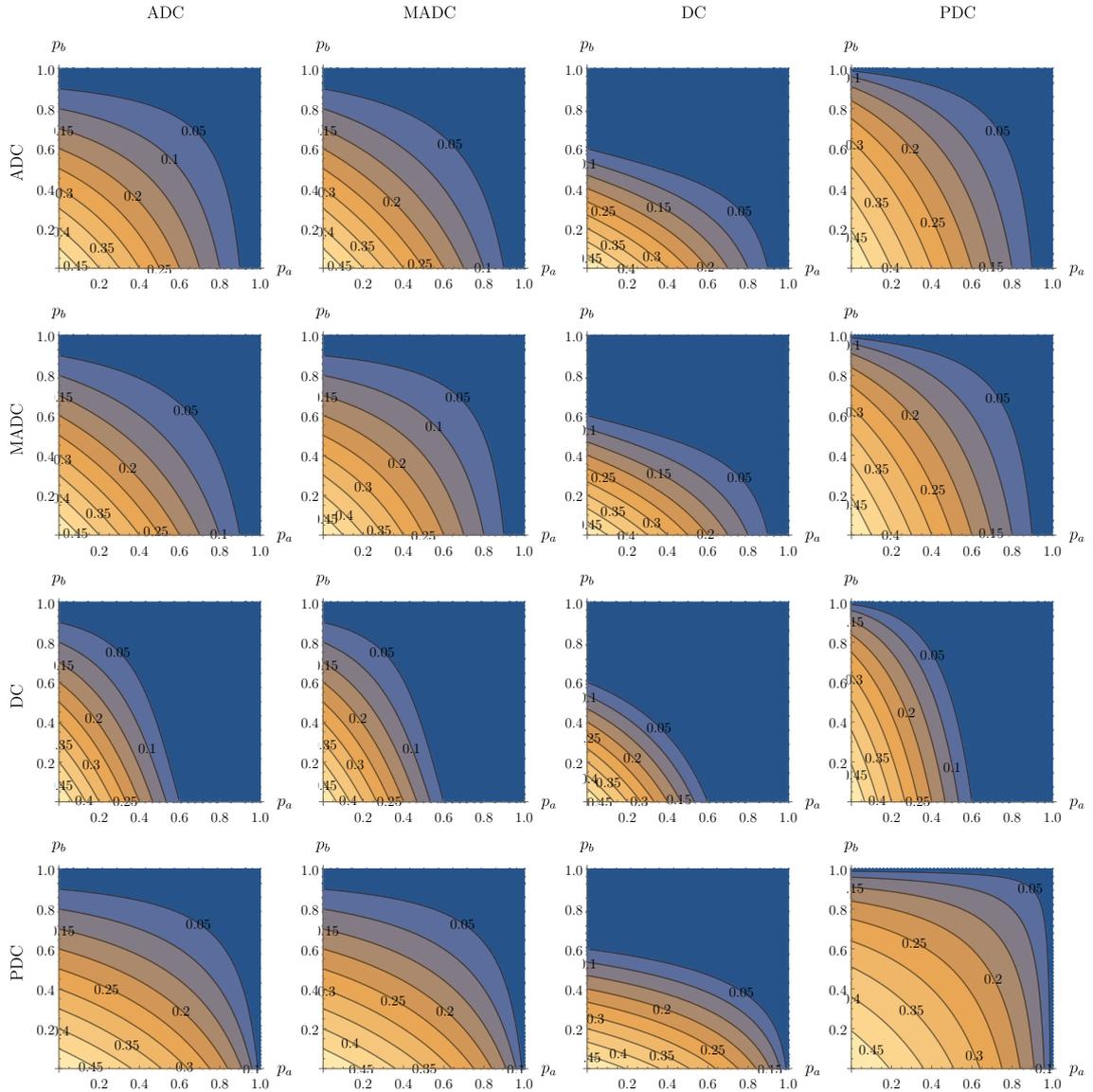


Fig. B.1: Negatividad del sistema compuesto de Alice y Bob sometido a diferentes combinaciones de canales ruidosos en función de p_a y p_b

A continuación se presentan, para todas las configuraciones de ruido y medidas de distancia, las regiones para las cuales el protocolo obtiene certificación cuántica a partir de

un sistema separable y las regiones en las cuales, a pesar de contar con un par entrelazado, no se consigue la certificación.

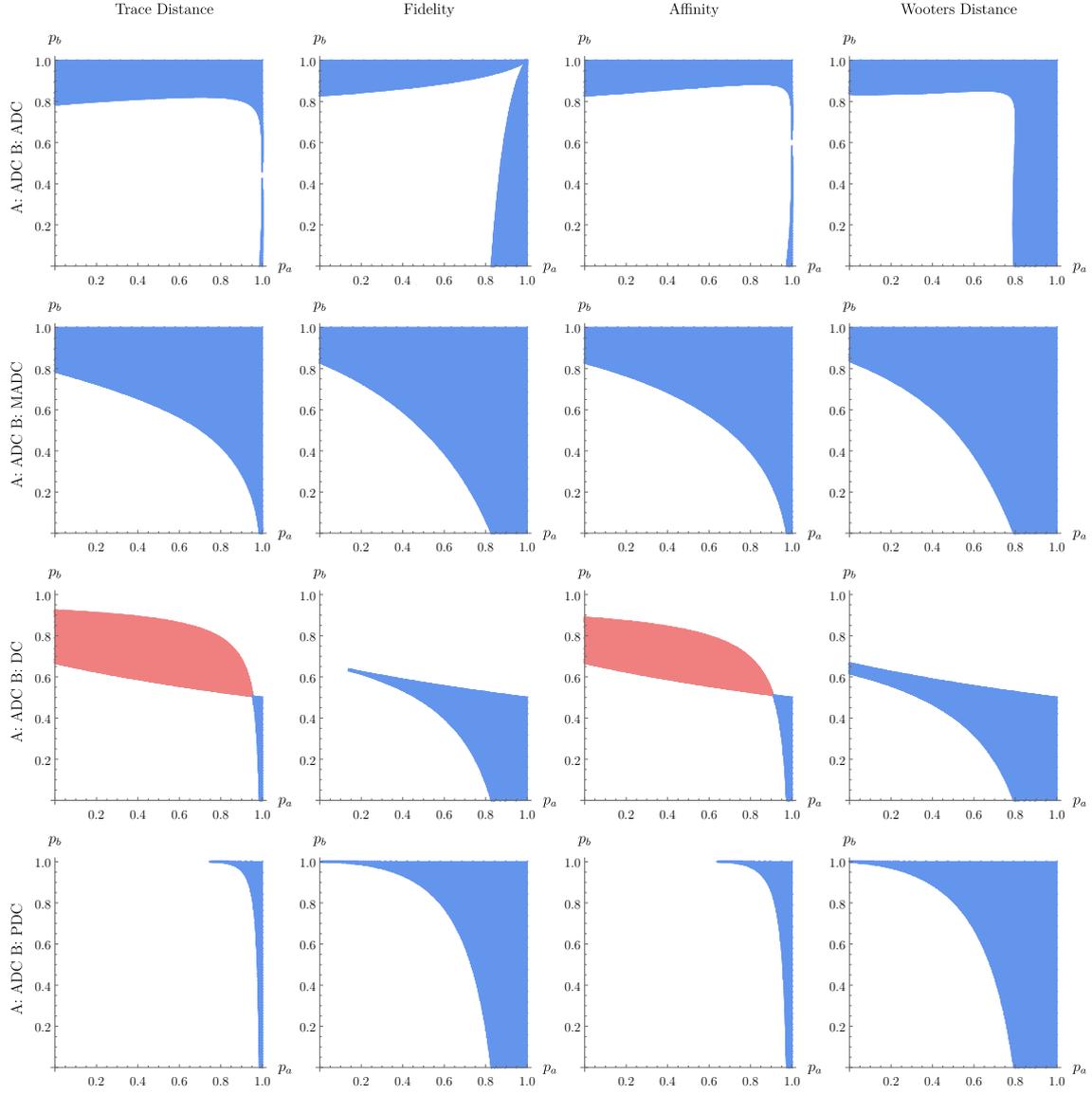


Fig. B.2: Separabilidad y certificación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La región roja indica que el estado recurso es separable y el protocolo es certificado cuántico, mientras que la región azul implica un estado entrelazado que teleporta con certificación clásica.

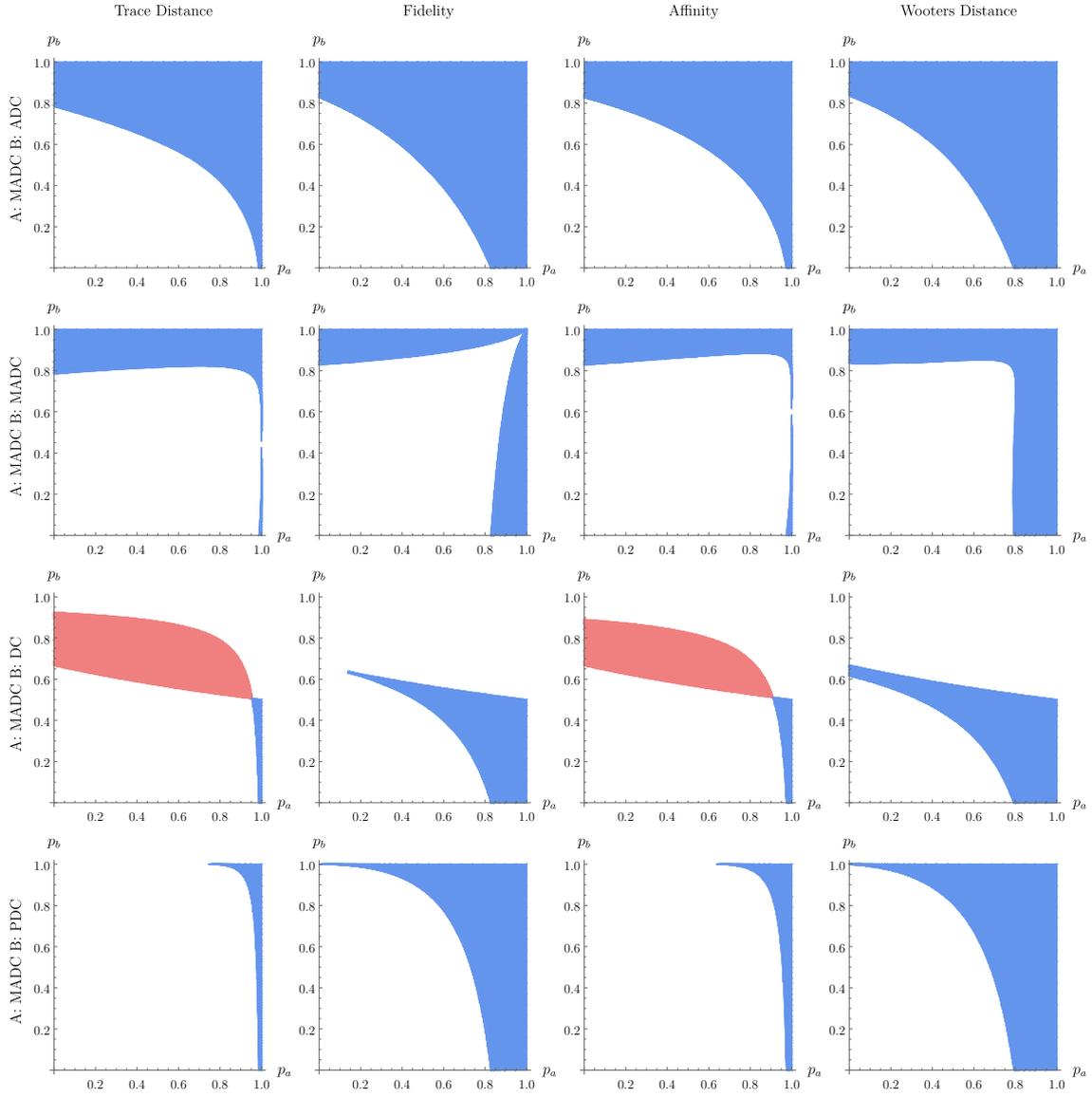


Fig. B.3: Separabilidad y certificación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La región roja indica que el estado recurso es separable y el protocolo es certificado cuántico, mientras que la región azul implica un estado entrelazado que teleporta con certificación clásica.

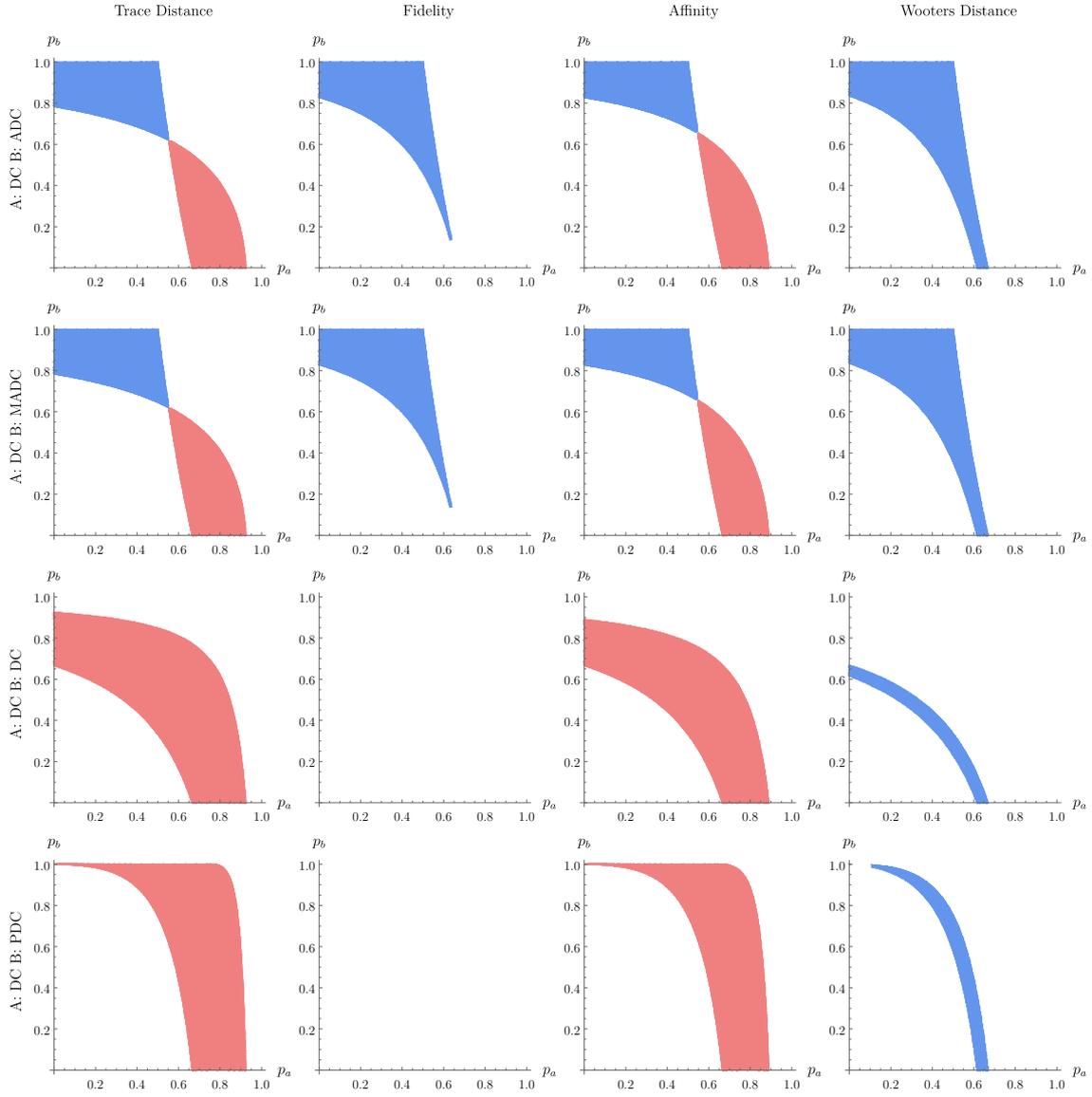


Fig. B.4: Separabilidad y certificación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La región roja indica que el estado recurso es separable y el protocolo es certificado cuántico, mientras que la región azul implica un estado entrelazado que teleporta con certificación clásica.

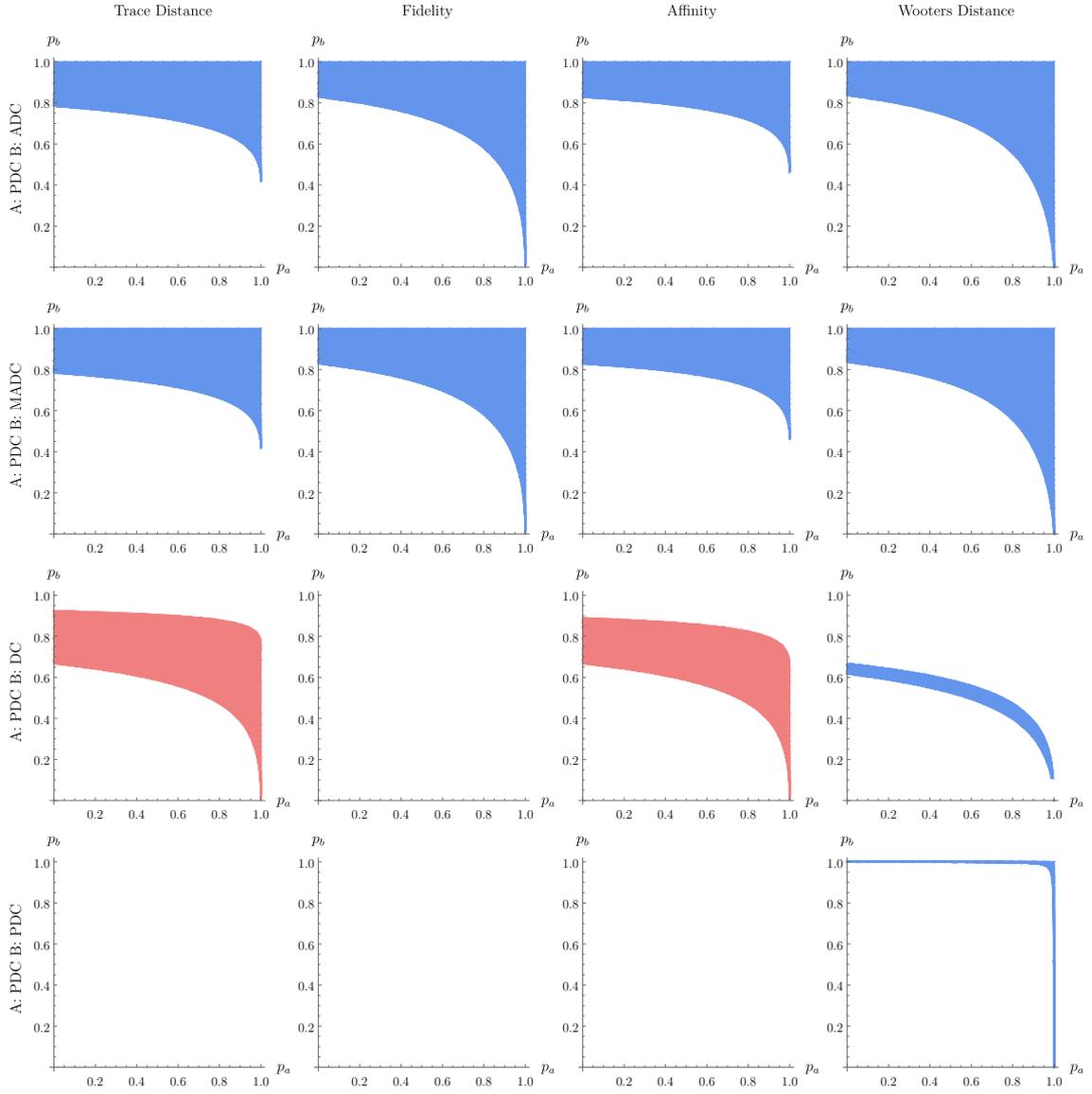


Fig. B.5: Separabilidad y certificación para los canales ruidosos y las distancias presentadas en la sección 4.2 en función de p_a y p_b , los parámetros de intensidad del ruido en los canales de Alice y Bob, respectivamente. La región roja indica que el estado recurso es separable y el protocolo es certificado cuántico, mientras que la región azul implica un estado entrelazado que teleporta con certificación clásica.

C. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

En este apéndice se presentan los errores de la estimación de $\langle \bar{D} \rangle$ utilizando simuladores de computadores cuánticas. Los resultados se encuentran agrupados por configuración de ruido y métrica utilizada, y los datos presentados son el promedio y el desvío estándar de los errores de cada grupo, respectivamente.

Canal Alice	Canal Bob	Distancia	Media	Desvío Estándar
ADC	ADC	affinity	1.15×10^{-03}	1.57×10^{-03}
ADC	ADC	fidelity	1.37×10^{-03}	1.67×10^{-03}
ADC	ADC	trace distance	2.94×10^{-03}	3.35×10^{-03}
ADC	ADC	wooters distance	2.15×10^{-03}	4.64×10^{-03}
ADC	DC	affinity	5.69×10^{-04}	4.14×10^{-04}
ADC	DC	fidelity	6.92×10^{-04}	6.65×10^{-04}
ADC	DC	trace distance	2.07×10^{-03}	2.99×10^{-03}
ADC	DC	wooters distance	1.16×10^{-03}	4.14×10^{-03}
ADC	MADC	affinity	1.59×10^{-03}	1.70×10^{-03}
ADC	MADC	fidelity	1.98×10^{-03}	1.94×10^{-03}
ADC	MADC	trace distance	3.25×10^{-03}	3.32×10^{-03}
ADC	MADC	wooters distance	2.56×10^{-03}	4.62×10^{-03}
ADC	PDC	affinity	7.64×10^{-04}	8.33×10^{-04}
ADC	PDC	fidelity	1.22×10^{-03}	1.56×10^{-03}
ADC	PDC	trace distance	3.14×10^{-03}	3.41×10^{-03}
ADC	PDC	wooters distance	2.40×10^{-03}	4.89×10^{-03}
DC	ADC	affinity	7.14×10^{-04}	5.85×10^{-04}
DC	ADC	fidelity	6.64×10^{-04}	7.35×10^{-04}
DC	ADC	trace distance	1.93×10^{-03}	2.79×10^{-03}
DC	ADC	wooters distance	1.10×10^{-03}	4.21×10^{-03}
DC	DC	affinity	4.56×10^{-04}	3.05×10^{-04}
DC	DC	fidelity	3.81×10^{-04}	5.27×10^{-04}
DC	DC	trace distance	1.75×10^{-03}	2.70×10^{-03}
DC	DC	wooters distance	8.60×10^{-04}	4.36×10^{-03}
DC	MADC	affinity	7.46×10^{-04}	5.56×10^{-04}
DC	MADC	fidelity	6.41×10^{-04}	7.28×10^{-04}
DC	MADC	trace distance	1.98×10^{-03}	2.75×10^{-03}
DC	MADC	wooters distance	1.04×10^{-03}	4.09×10^{-03}
DC	PDC	affinity	7.55×10^{-04}	6.62×10^{-04}
DC	PDC	fidelity	1.02×10^{-03}	1.13×10^{-03}
DC	PDC	trace distance	2.55×10^{-03}	3.18×10^{-03}
DC	PDC	wooters distance	1.82×10^{-03}	4.52×10^{-03}
MADC	ADC	affinity	1.82×10^{-03}	1.79×10^{-03}
MADC	ADC	fidelity	2.44×10^{-03}	2.22×10^{-03}
MADC	ADC	trace distance	3.62×10^{-03}	3.45×10^{-03}
MADC	ADC	wooters distance	2.93×10^{-03}	4.53×10^{-03}
MADC	DC	affinity	5.13×10^{-04}	4.06×10^{-04}

MADC	DC	fidelity	6.28×10^{-04}	6.72×10^{-04}
MADC	DC	trace distance	2.02×10^{-03}	2.98×10^{-03}
MADC	DC	wooters distance	1.15×10^{-03}	4.19×10^{-03}
MADC	MADC	affinity	1.28×10^{-03}	1.81×10^{-03}
MADC	MADC	fidelity	1.36×10^{-03}	2.16×10^{-03}
MADC	MADC	trace distance	3.06×10^{-03}	3.72×10^{-03}
MADC	MADC	wooters distance	2.19×10^{-03}	4.90×10^{-03}
MADC	PDC	affinity	8.16×10^{-04}	8.38×10^{-04}
MADC	PDC	fidelity	1.28×10^{-03}	1.42×10^{-03}
MADC	PDC	trace distance	3.22×10^{-03}	3.42×10^{-03}
MADC	PDC	wooters distance	2.34×10^{-03}	4.67×10^{-03}
PDC	ADC	affinity	7.91×10^{-04}	6.24×10^{-04}
PDC	ADC	fidelity	1.06×10^{-03}	1.03×10^{-03}
PDC	ADC	trace distance	2.32×10^{-03}	3.13×10^{-03}
PDC	ADC	wooters distance	2.33×10^{-03}	4.31×10^{-03}
PDC	DC	affinity	7.21×10^{-04}	6.40×10^{-04}
PDC	DC	fidelity	1.05×10^{-03}	1.24×10^{-03}
PDC	DC	trace distance	2.45×10^{-03}	3.19×10^{-03}
PDC	DC	wooters distance	1.87×10^{-03}	4.73×10^{-03}
PDC	MADC	affinity	8.24×10^{-04}	7.84×10^{-04}
PDC	MADC	fidelity	1.10×10^{-03}	1.22×10^{-03}
PDC	MADC	trace distance	2.64×10^{-03}	3.11×10^{-03}
PDC	MADC	wooters distance	2.26×10^{-03}	4.43×10^{-03}
PDC	PDC	affinity	1.79×10^{-03}	1.83×10^{-03}
PDC	PDC	fidelity	3.18×10^{-03}	3.24×10^{-03}
PDC	PDC	trace distance	4.12×10^{-03}	3.74×10^{-03}
PDC	PDC	wooters distance	5.34×10^{-03}	5.40×10^{-03}

Tab. C.1: Media y Desvío Estándar de la diferencia entre el resultado de la simulación y el valor teórico esperado para todas las posibles combinaciones de canales ruidosos y medidas de distancia sobre una cuadrícula de $[0, 1] \times [0, 1]$ con incrementos de 0.1 para los valores de p de los canales.