Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Construcción de números simplemente normales con dependencias de dígitos

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Agustin Luis Marchionna

Directora: Verónica Becher

Buenos Aires, Agosto 2023

CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS SIMPLEMENTE NORMALES CON DEPENDENCIAS DE DÍGITOS

Dado un entero $b \geq 2$ y un conjunto de primos $\mathcal{P}$, consideramos el conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ de números de Toeplitz compuesto por los números reales de $[0, 1)$ cuyos dígitos $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ en base b satisfacen $a_n = a_{pn}$ para todo $p \in \mathcal{P}$ y $n \geq 1$. Usando funciones completamente aditivas, construimos un número en $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ que es simplemente normal si y solamente si $\sum_{p\in\mathbb{P}\setminus\mathcal{P}} 1/p = \infty$ o $2 \notin \mathcal{P}$, según el caso. Primero damos la demostración para el caso $b = 2$, luego para $b > 2$. Damos además otra demostración para todo valor de $b \geq 2$ junto con una cota superior efectiva para la discrepancia de las secuencia $\{b^n x \mod 1\}_{n\geq 0}$ para el número x que construimos.

Palabras claves: numeros normales, secuencias de Toeplitz, discrepancia, funciones aditivas y multiplicativas.

CONSTRUCTION OF SIMPLY NORMAL NUMBERS WITH DIGIT DEPENDENCIES

Given an integer $b \geq 2$ and a set $\mathcal{P}$ of prime numbers, the set $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ of Toeplitz numbers comprises all elements of $[0, 1)$ whose digits $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ in the base-b expansion satisfy $a_n = a_{pn}$ for all $p \in \mathcal{P}$ and $n \geq 1$. Using completely additive arithmetical functions, we construct a number in $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ that is simply Borel normal if, and only if, $\sum_{p\in\mathbb{P}\setminus\mathcal{P}} 1/p = \infty$, or $p \notin \mathcal{P}$ depending on the case. First, we give the proof for $b = 2$. Then, for $b > 2$. In addition we give another proof for any $b \geq 2$ that yields a discrepancy bound of the sequence $\{b^n x \mod 1\}_{n\geq 0}$, for the constructed number x.

Keywords: normal numbers, Toeplitz sequences, discrepancy, additive and multiplicative functions.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN Y ENUNCIADOS DE RESULTADOS

Utilizaremos a lo largo del trabajo varios resultados clásicos, que se encuentran por ejemplo en el libro de Gérald Tenenmbaum [14].

Comenzamos con las nociones básicas de normalidad de números reales, ideadas por Émile Borel a principios de 1900.

Definición 1 (Simple normalidad)**.** Sea b un entero positivo mayor o igual que 2. Un número real se dice *simplemente normal* en base b, si en su expansión en base b, todos los dígitos $0,\ 1, \ldots,\ b-1$ aparecen con la misma frecuencia en el límite $1/b$. Un número real se dice *normal* en base b si el número real es simplemente normal en base b^j para cada $j \geq 1$.

A lo largo del trabajo, utilizamos $\mathbb{P}$ para referirnos al conjunto de los números primos. Siguiendo la definición provista por Konrad Jacobs y Michael Keane [10], dado un subconjunto de los números primos $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$, introducimos el conjunto de números reales $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ asociado a una base arbitraria b *fija*, que siempre es un número entero mayor o igual que 2.

Definición 2 (Conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$)**.** Dado un conjunto arbitrario de números primos $\mathcal{P}$, y un número positivo b, un número real entre 0 y 1 pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ si en su desarrollo en base b si para cada $p \in \mathcal{P}$, el dígito en la posición n es el mismo que en la posición pn. Es decir, si

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

entonces $a_n = a_{pn}$ para cada n entero positivo, y cada primo p del conjunto.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\mathcal{P} = \{2, 3\}$, entonces el número $0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ tiene como dígitos independientes a $a_1, a_5, a_7, a_{11}, \ldots$, mientras que $a_2, a_3, a_4, a_6, \ldots$ son dependientes de los anteriores. En general, cuando hablemos de una sucesión a_n a lo largo del trabajo, estaremos haciendo referencia implícita a los dígitos en base b del número con el que estemos trabajando.

Siguiendo esta noción, Aistleitner, Becher y Carton [1] demostraron que para cada conjunto de primos $\mathcal{P}$ finito, y base arbitraria b, casi todos los números de $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ son normales en base b. Para el caso particular en el cual $\mathcal{P} = \{2\}$ y $b = 2$, Becher, Carton y Heiber [2] exhibieron un número de $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ que es normal en base 2. Dicha construcción se puede generalizar para cualquier conjunto $\mathcal{P}$ de un elemento, y base arbitraria b.

Para construir un número que pertenezca a $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, proponemos la siguiente definición.

Consideremos la función aritmética $\Omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para cada entero positivo n, si su factorización en primos es $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, cuenta con repeticiones la cantidad de factores primos de n. Es decir, $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \mapsto_{\Omega} \alpha_1 + \ldots \alpha_k$.

Definición 3 (Función $\Omega_{\mathcal{P}}$)**.** Dado un conjunto de primos $\mathcal{P}$, definimos la función aritmética $\Omega_{\mathcal{P}}(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que da la cantidad de factores primos contados con repetición que no están en $\mathcal{P}$. Es decir, si la factorización en primos de n es $n = q_1^{\beta_1} \ldots q_j^{\beta_j} \cdot p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, con cada q en $\mathcal{P}$ y cada p fuera de $\mathcal{P}$, entonces $n \overset{\Omega_{\mathcal{P}}}{\mapsto} \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$.

Por ejemplo, $\Omega_{\{2,3\}}(2^1 3^2 5^3 7^7) = 3 + 7 = 10$.

Observemos que tomando $\mathcal{P} = \emptyset$, recuperamos la definición original de Ω. La principal propiedad de $\Omega_{\mathcal{P}}$ que usaremos es que es una función *completamente aditiva*, es decir, $\Omega_{\mathcal{P}}(mn) = \Omega_{\mathcal{P}}(m) + \Omega_{\mathcal{P}}(n)$ para todo conjunto de primos $\mathcal{P}$, y enteros positivos m y n cualesquiera.

Definición 4 (El número $\xi_{\mathcal{P},b}$)**.** Dado un conjunto de primos $\mathcal{P}$ y una base b, el número en base b

$$\xi_{\mathcal{P},b} := 0.a_1a_2a_3\ldots$$

donde

$$a_n = \Omega_{\mathcal{P}}(n) \mod b.$$

Es claro que $\xi_{\mathcal{P},b} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, dado que $\Omega_{\mathcal{P}}(n) = \Omega_{\mathcal{P}}(pn)$ para cada $p \in \mathcal{P}$, por definición de $\Omega_{\mathcal{P}}$.

Daremos condiciones suficientes y necesarias sobre el conjunto $\mathcal{P}$ para que $\xi_{\mathcal{P},b}$ sea simplemente normal en base b. Más aún, presentaremos una cota superior efectiva sobre la velocidad de convergencia a simple normalidad en base b.

Estamos en condiciones de presentar el resultado principal en este trabajo. Siguiendo la notación usual para funciones numéricas f, escribimos $f \ll g$ si existe una constante c tal que $|f| \leq c|g|$.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos y sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de aquellos primos que no pertenecen a $\mathcal{P}$. Sea b un entero positivo mayor a 1. El número $\xi_{\mathcal{P},b}$ es simplemente normal en base b si y solamente si la serie*

$$\sum_{p\in\mathcal{Q}} \frac{1}{p}$$

diverge. Más aún, si para cada dígito posible k en base b definimos para N

$$\epsilon_{N,k} = \left|\frac{1}{N}|\{1 \leq n \leq N : \ a_n = k\}| - 1/b\right|, \quad E(N) := \sum_{p\leq N,\ p\in\mathcal{Q}} \frac{1}{p},$$

se tiene que

$$\epsilon_{N,k} \ll e^{-E(N)/(180b^2)}.$$

Antes de presentar la demostración daremos dos resultados más débiles, en el sentido de que pueden obtenerse del Teorema 1. El Teorema 2 considera la base $b = 2$, el Teorema 3 considera cualquier base b mayor que 2. Sus demostraciones son más elementales que las del Teorema 1.

Teorema 2. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos y sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de aquellos primos que no pertenecen a $\mathcal{P}$. El número $\xi_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal en base 2 si y solamente si $\sum_{p\in\mathcal{Q}} 1/p$ diverge.*

Teorema 3. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos y sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de aquellos primos que no pertenecen a $\mathcal{P}$. Sea b un entero positivo mayor a 2. El número $\xi_{\mathcal{P},b}$ es simplemente normal en base b si y solamente si $\sum_{p\in\mathcal{Q}} 1/p$ diverge.*

Consideremos ahora la clásica función aritmética $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para cada entero positivo n, dada su factorización en primos $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, cuenta *sin* repeticiones la cantidad de factores primos de n. Es decir, $p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k} \mapsto_{\omega} k$.

Definición 5 (Función $\omega_{\mathcal{P}}$)**.** Dado un conjunto de primos $\mathcal{P}$, definimos $\omega_{\mathcal{P}}(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a la cantidad de factores primos contados *sin* repetición que no están en $\mathcal{P}$. Es decir, si tenemos que la factorización en primos de n es

$$n = q_1^{\beta_1} \dots q_j^{\beta_j} \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

con cada q en $\mathcal{P}$ y cada p fuera de $\mathcal{P}$, entonces $n \overset{\omega_{\mathcal{P}}}{\mapsto} k$.

A diferencia de $\Omega_{\mathcal{P}}$, la función $\omega_{\mathcal{P}}$ no es completamente aditiva, sino que es *aditiva*. Es decir, para todo conjunto de primos $\mathcal{P}$, se tiene que $\omega_{\mathcal{P}}(mn) = \omega_{\mathcal{P}}(m) + \omega_{\mathcal{P}}(n)$ siempre y cuando m y n sean enteros positivos *coprimos* entre sí. Teniendo esta función en mente, definiremos $\xi'_{\mathcal{P},b}$, verificaremos que pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, y luego enunciaremos los resultados análogos a los del Teorema 2 y Teorema 3.

Definición 6 (El número $\xi'_{\mathcal{P},b}$)**.** Definimos ahora el número en base b

$$\xi'_{\mathcal{P},b} := 0.a_1a_2a_3\dots$$

donde

$$a_n = \omega_{\mathcal{P}}(n) \mod b$$

Observemos que $\xi'_{\mathcal{P},b} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, ya que $\omega_{\mathcal{P}}(n) = \omega_{\mathcal{P}}(pn)$ para cada $p \in \mathcal{P}$, por definición de $\omega_{\mathcal{P}}$. Daremos condiciones suficientes y necesarias sobre el conjunto $\mathcal{P}$ para que $\xi'_{\mathcal{P},b}$ sea simplemente normal en base b.

Teorema 4. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos y sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de primos que no pertenecen a $\mathcal{P}$. El número $\xi'_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal en base 2 si y solamente si $\sum_{p\in\mathcal{Q}} 1/p$ diverge, o $2 \in \mathcal{Q}$.*

Teorema 5. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos, sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de primos que no pertenecen a $\mathcal{P}$. Sea b una base mayor que 2. El número $\xi'_{\mathcal{P},b}$ es simplemente normal en base b si y solamente si $\sum_{p\in\mathcal{Q}} 1/p$ diverge.*

Comparando los resultados para $\Omega_{\mathcal{P}}$ y para $\omega_{\mathcal{P}}$, la única diferencia se encuentra entre los Teoremas 2 y 4. La comprenderemos al dar sus respectivas demostraciones.

2. DEFINICIONES Y OTROS PRELIMINARES

Presentamos aquí las definiciones y resultados auxiliares, que necesitaremos para dar las demostraciones de los resultados que enunciamos en el capítulo anterior, Teoremas 1 a 5.

Estos 5 teoremas consideran un conjunto de números primos $\mathcal{P}$ con una propiedad: que la serie de primos que no pertenecen al conjunto $\mathcal{P}$ diverja. Para que tenga sentido esta propiedad, la serie de todos los primos debería divergir también (de lo contrario todas las series de primos convergerían). Comencemos demostrando ese resultado.

Proposición. *La serie* $\sum_p 1/p$ *diverge.*

Si bien no es una prueba cuyas ideas sean luego importantes, la siguiente demostración del teorema se debe a Paul Erdös [7].

Demostración. Supongamos lo contrario, que $\sum_p 1/p$ converge. Sean $p_1, p_2, p_3, \ldots$ los primos en orden creciente. Tomemos un valor de N que satisfaga $\sum_{i>N} 1/p_i < 1/2$, que existe bajo la suposición de convergencia.

Sea M_x el conjunto de números entre 1 y x que no son divisibles por un primo mayor a p_N.

Vamos a separar la solución en dos pasos. El primero, encontrar una cota inferior para $|M_x|$ y el segundo, encontrar una cota superior para $|M_x|$.

Cota inferior: Los elementos en $\{1, 2, \ldots, x\} \setminus M_x$ son todos divisibles por un primo mayor a p_N. Sea $N_{i,x}$ el conjunto de los elementos de $\{1, 2, \ldots, x\}$ divisibles por p_i. Notar además que a lo sumo x/p_i elementos son divisibles por p_i. Luego

$$\{1, 2, \ldots, x\} \setminus M_x = \bigcup_{i>N} N_{i,x}$$

y por lo tanto, tomando cardinales, obtenemos que

$$x - |M_x| \leq \sum_{i>N} |N_{i,x}| \leq \sum_{i>N} x/p_i < x/2,$$

por lo que $x/2 < |M_x|$.

Cota superior: Notar que cada entero positivo se puede escribir de una única manera como $n = m^2 r$, con r libre de cuadrados. Para que $n \in M_x$, r solo puede ser divisible por primos menores o iguales a p_N, y cada uno de los N puede o no aparecer (y si lo hace, lo hace con exponente 1). Por lo que hay 2^N posibilidades para r. Además, para m hay a lo sumo $\sqrt{x}$ posibilidades. Por lo tanto, $|M_x| \leq 2^N \sqrt{x}$.

Combinando ambas cotas, obtenemos que si $x/2 \leq 2^N \sqrt{x}$ entonces $x \leq 2^{2N+2}$. Pero esto es una contradicción para valores de x mayores al lado derecho, que está fijo.

El absurdo provino de suponer que la serie converge, por lo que la serie diverge. □

Definición. Un conjunto de primos $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$ *deja muchos afuera* si $\sum_{p \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{P}} 1/p$ diverge.

Como es usual en funciones aritméticas consideraremos funciones que van de números naturales a números complejos. Veamos las propiedades que vamos a utilizar de dichas funciones.

Definición. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función. Entonces g es

- *completamente aditiva* si $g(mn) = g(m) + g(n)$ para cualesquiera enteros positivos m y n;
- *aditiva* si $g(mn) = g(m) + g(n)$ para cualesquiera enteros positivos m y n con $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$;
- *completamente multiplicativa* si $g(mn) = g(m)g(n)$ para cualesquiera enteros positivos m y n;
- *multiplicativa* si $g(mn) = g(m)g(n)$ para cualesquiera enteros positivos m y n con $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$.

Utilizaremos la notación $\exp(x) := e^x$, sin distinguir los casos x real o complejo.

Observación. Para cada conjunto de primos $\mathcal{P}$ la función $\Omega_{\mathcal{P}}$ es completamente aditiva, y la función $\omega_{\mathcal{P}}$ es aditiva. Por lo tanto, para cada entero a y entero positivo b, la función $\exp\left(2\pi i \frac{a\Omega_{\mathcal{P}}}{b}\right)$ es completamente multiplicativa, y la función $\exp\left(2\pi i \frac{a\omega_{\mathcal{P}}}{b}\right)$ es multiplicativa. Utilizaremos estas propiedades en las hipótesis de los resultados intermedios.

Definición (Promedio de una función)**.** Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Definimos *el promedio* de g como

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{g(1) + g(2) + \cdots + g(N)}{N}.$$

Definimos la siguiente clase de funciones complejas.

Definición. Sean $A, B > 0$. Definimos el conjunto $\mathfrak{M}_0(A, B)$ de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que verifican las siguientes dos condiciones:

- $\max_p |f(p)| \leq A$,
- $\sum_{p^\nu,\ \nu \geq 2} \frac{|f(p^\nu)| \log p^\nu}{p^\nu} \leq B$,

en donde utilizamos la variable p para denotar primos, y ν para enteros.

Por último, vamos a necesitar algunos resultados adicionales de convergencia de algunas series, que utilizaremos.

Proposición. *Para cada primo p, se tiene que $\sum_{\nu \geq 2} \frac{\nu}{p^\nu}$ converge.*

Demostración. Observemos que para ν suficientemente grande, $\nu \leq p^{\nu/2}$, con lo cual para ν suficientemente grande, $\dfrac{\nu}{p^\nu} \leq p^{-\nu/2}$, por lo que la serie converge, siendo que cada término suficientemente grande queda acotado por el de una progresión geométrica de razón menor a 1. □

Observación. Una observación curiosa, y necesaria, es que efectivamente podemos calcular cuánto da dicha serie. Si llamamos

$$S := \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^3} + \dots,$$

se obtiene que

$$S/p = \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p^4} + \dots,$$

y por lo tanto

$$S - S/p = \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \dots.$$

Esta última expresión es igual a

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{1 - 1/p} - 1 - \frac{1}{p},$$

utilizando la suma de una serie geométrica convergente. Despejando, se obtiene que

$$S = \frac{2p - 1}{p^2(p-1)}.$$

Esta última expresión es del orden de p^{-2}.

Veamos ahora el siguiente resultado intermedio.

Proposición. *La serie* $\displaystyle\sum_p \frac{\ln(p)}{p^2}$ *converge.*

Demostración. Notemos que $\ln(p) \leq \sqrt{p}$ para todo primo, por lo que cada término está acotado por $p^{-3/2}$ y por lo tanto la serie diverge. □

Veamos ahora sí como juntar los últimos dos resultados en uno solo.

Proposición 1. *La serie*

$$\sum_{p^\nu,\ \nu \geq 2} \frac{\log p^\nu}{p^\nu}$$

converge.

Demostración. Notemos que

$$\sum_{p^\nu,\ \nu \geq 2} \frac{\log p^\nu}{p^\nu} = \sum_p \log p \sum_{\nu \geq 2} \frac{\nu}{p^\nu} = \sum_p \frac{(\log p)(2p-1)}{p^2(p-1)}.$$

Ahora, cada término de dicha serie es como mucho $3 \log p / p^2$, y ya vimos que $\displaystyle\sum_p \frac{\log p}{p^2}$ converge. □

Veamos ahora un resultado de la serie armónica, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$. Primero, notemos que la serie armónica también está dada por

$$\prod_p \sum_{k \geq 0} 1/p^k.$$

Esto se puede ver de la siguiente manera. Si consideramos cada entero positivo n y su factorización en números primos $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, entonces a $1/n$ lo podemos obtener al realizar el producto

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{p_k^{\alpha_k}}.$$

Más aún, utilizando la fórmula para la serie geométrica, se puede reescribir como

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p-1}\right).$$

Proposición. *La serie armónica tiene orden de crecimiento logarítmico.*

Demostración. Una posible demostración de este hecho usa integrales, acotando tanto por arriba como por abajo la integral de $1/x$ entre cada par de enteros consecutivos. Otra demostración es la siguiente.

Veamos primero el resultado para potencias de 2. Sea $N = 2^k$ y acotemos $\sum_{n \leq N} 1/n$ entre dos términos de orden k. Consideremos las siguientes cotas:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & \leq 1 & \leq 1 \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}
\end{array}$$

Sumando las k filas, y no olvidando a $1/2^k$, obtenemos que

$$k/2 \leq \sum_{n \leq N} 1/n \leq k + 1/2^k \leq k + 1,$$

como queríamos ver. Ahora, si $2^k < N < 2^{k+1}$, entonces podemos usar las cotas que ya tenemos para 2^k y 2^{k+1} de la siguiente manera:

$$k/2 \leq \sum_{n \leq 2^k} 1/n \leq \sum_{n \leq N} 1/n \leq \sum_{n \leq 2^{k+1}} 1/n \leq k + 2.$$

Es decir, obtuvimos que

$$\frac{\log N - 1}{2} \leq \sum_{n \leq N} 1/n \leq \log N + 2,$$

como deseábamos obtener. □

Utilizamos la notación de Landau para el comportamiento asintótico de las funciones.

Definición. Decimos que una función $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ si existen constantes c, x_0 tales que para todo $x \geq x_0$ se tiene que $|g(x)| \leq c \cdot |f(x)|$. Más aún, decimos que $g(x) = o(f(x))$ si para toda constante c, existe x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ se tiene que $g(x) \leq cf(x)$.

Necesitaremos el comportamiento asintótico de la serie de los inversos de los primos. Uno de los teoremas que Mertens [12] demostró en conexión con la distribución de los números primos es una versión más fuerte del hecho que la serie de los inversos de los primos diverge, mostrando cómo es su comportamiento asintótico.

Teorema (Segundo Teorema de Mertens)**.** *Existe una constante B para la cual*

$$\sum_{p \leq x} 1/p = \log\log x + B + \mathcal{O}(1/\log(x)).$$

En [13], Rosser y Schoenfled mejoraron la cota del error a $\mathcal{O}(1/\log(x)^2)$. En [5], Pierre Dusart la mejoró pero en el mismo orden. En esta tesis utilizaremos que el error es del orden de $o(1/\log(X))$, que se desprende del hecho de que es del orden de $\mathcal{O}(1/\log(x)^2)$. Estos resultados tienen relación con el Teorema de los Números Primos.

Lema. *Sean T, c reales positivos mayores que 1. Sean*

$$A := \bigcup_{k \geq 0} (Tc^{2k}, Tc^{2k+1}], \text{ y } B := \bigcup_{k \geq 0} (Tc^{2k+1}, Tc^{2k+2}].$$

Entonces $\sum_{p \in A} 1/p$ *y* $\sum_{p \in B} 1/p$ *divergen.*

Dado que la serie de los inversos de los primos diverge, alguna de las dos series debe divergir. Veamos que ambas divergen.

Demostración. Entendamos el orden de la suma de los inversos de los primos en cada uno de dichos intervalos, para luego concluir lo que estamos buscando. Sea $K := Tc^l$ para algún l y trabajemos con $(K, cK]$. Por el segundo teorema de Mertens, con la mejora de la cota para el error, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{p \in (K, cK]} 1/p &= \log\log cK - \log\log K + o(1/\log(K)) + o(1/\log(cK)) \\ &= \log\left(1 + \frac{\log c}{\log K}\right) + o(1/\log(K)).\end{aligned}$$

Observemos que el primer término es al menos $\log c/(2\log K)$ para un K suficientemente grande, puesto que $\log(1+x) \geq x/2$ para todo x lo suficientemente cerca de 1. Más aún, usando la definición de K en función de l, tenemos que

$$\sum_{p \in (K, cK]} 1/p \gg 1/l + o(1/l).$$

Tanto la serie armónica para los pares como para los impares diverge, entonces ambas series divergen. □

No es estrictamente necesario que el término de error sea $o(1/\log(x))$. Bastaría con tener un término de error en el Segundo Teorema de Mertens que sea $\mathcal{O}(1/\log(x))$, pero cuya constante c en $c \cdot 1/\log(X)$ haga que el término dominante en la demostración del Lema sea efectivamente $\log(1 + \log c/\log K)$ y no potencialmente el término de error $\mathcal{O}(1/\log K)$.

3. UNOS Y CEROS: DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 2 Y 4

El objetivo de este capítulo es dar condiciones suficientes y necesarias sobre un conjunto de primos $\mathcal{P}$ para que las siguientes sucesiones sean simplemente normales sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

- $\Omega_{\mathcal{P}}(n) \mod 2, n \geq 1$
- $\omega_{\mathcal{P}}(n) \mod 2, n \geq 1$

Es decir, en términos de lo introducido en la primera sección del trabajo, demostrar los Teoremas 2 y 4, buscando condiciones suficientes y necesarias sobre $\mathcal{P}$ para garantizar la simple normalidad de los números $\xi_{\mathcal{P},2}$ y $\xi'_{\mathcal{P},2}$. Notar que la noción de simple normalidad, y de normalidad aplica de la misma forma para sucesiones como para números reales. Podemos asociar cada número real a la sucesión formada por los dígitos de su expansión b-aria, y realizar el análisis correspondiente sobre dicha sucesión.

Comenzamos con una caracterización de la propiedad de simple normalidad sobre sucesiones de símbolos en $\{-1,1\}$.

Lema 1. *Sea $g : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$. Entonces la sucesión $g(n)$ es simplemente normal sobre el alfabeto $\{-1,1\}$ si y solamente si el promedio de g es 0.*

Demostración. Veamos primero la ida. Sean

- $a_n = \{1 \leq i \leq n \mid g(i) = 1\}$,
- $b_n = \{1 \leq i \leq n \mid g(i) = -1\}$.

Por hipótesis, tenemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$, y $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2}$. Entonces, usando álgebra de límites, tenemos que $\lim_{N\to+\infty} \frac{a_N - b_N}{N} = 0$, pero esto último es justamente $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} g(i)}{N} = 0$, por lo tanto g tiene promedio igual a 0.

Veamos ahora la vuelta. Por hipótesis, tenemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} g(i)}{n} = 0$. Pero la suma es justamente $a_n - b_n$, por lo tanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - b_n}{n} = 0$. A su vez, tenemos que $a_n + b_n = n$, por lo tanto tenemos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - (n - a_n)}{n} = 0$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n - b_n) - b_n}{n} = 0$. Manipulando ambos límites, obtenemos que $\lim_{N\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2}$. □

En este capítulo consideramos únicamente funciones que toman valores reales de valor absoluto a lo sumo 1. Dicha hipótesis es suficiente para garantizar que el promedio existe, y este resultado se debe a Wirsing. Previamente, muchos matemáticos habían conjeturado (entre los cuales se encontraba Erdös) que una función de los naturales que toma valores 1 o -1 únicamente siempre tenía promedio.

Teorema 6 (Wirsing,[16])**.** *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función multiplicativa que satisface $|g(n)| \leq 1$ para todo entero positivo n. Entonces el promedio*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n)$$

existe.

No usaremos el Teorema 6 directamente, pero será útil para simplificar el siguiente teorema y así tener mejores condiciones necesarias y suficientes para que una función que nos interesa tenga promedio igual a 0. Esto nos permitirá definir sucesiones simplemente normales para base 2.

Teorema 7 (Delange, Wirsing, Halász, [6])**.** *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función multiplicativa. Entonces el promedio*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n)$$

existe y es no nulo si y solamente si se satisfacen ***en simultáneo*** *las siguientes dos condiciones:*

- *existe un entero positivo k que satisface $g(2^k) \neq -1$,*
- *la serie*

$$\sum_{p} \frac{1 - g(p)}{p}$$

converge.

De los Teoremas 6 y 7 podemos deducir que si tenemos una función multiplicativa real de módulo a lo sumo 1, entonces el límite existe. Además, es 0 si y solamente si se satisface *alguna* de las siguientes dos condiciones:

- para todo entero positivo k se satisface $g(2^k) = -1$,
- la serie

$$\sum_{p} \frac{1 - g(p)}{p}$$

diverge.

Entonces, para garantizar que el promedio de una función multiplicativa real de módulo a lo sumo 1, es 0, basta con chequear estas condiciones. No hace falta chequear que el promedio exista porque eso lo tenemos garantizado por el Teorema 6.

3.1. Demostración del Teorema 2

Daremos condiciones suficientes y necesarias para que $\xi_{\mathcal{P},2}$ sea simplemente normal. Recordemos que el hecho de que sea simplemente normal, quiere decir la sucesión $\{\Omega_{\mathcal{P}}(n) \text{ mód } 2\}_{n\geq 1}$ es simplemente normal sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

Lema 2 (Ida del Teorema 2)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos que deja muchos afuera. Entonces $\xi_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal en base 2.*

Demostración. Escribimos $\xi_{\mathcal{P},2} = 0.a_1a_2a_3\ldots$. Definimos la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ completamente multiplicativa:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 0, \\ -1 & \text{si } a_n = 1. \end{cases}$$

En otras palabras, tenemos que $g(n) = (-1)^{\Omega_{\mathcal{P}}(n)}$. Por como definimos g, es equivalente ver que g es simplemente normal sobre el alfabeto $\{-1, 1\}$ a que $\xi_{\mathcal{P},2}$ lo sea en base 2, puesto que es solamente un renombre de los dígitos binarios del número.

Dada la definición de g, para $p \in \mathcal{P}$ se tiene que $g(p) = 1$, y para $p \notin \mathcal{P}$ se tiene $g(p) = -1$. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{1 - g(p)}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } g(p) = 1, \\ \\ 2/p & \text{si } g(p) = -1. \end{cases}$$

Notemos entonces que

$$\sum_{p} \frac{1 - g(p)}{p} = \sum_{p \notin \mathcal{P}} \frac{2}{p},$$

que por hipótesis diverge. Por lo tanto, utilizando el Teorema 7, obtenemos que el promedio de g es 0. Pero ya vimos en el Lema 1 que si el promedio era 0, y el alfabeto tenía solamente los símbolos 1 y -1, entonces era simplemente normal. Por lo tanto, a_n es simplemente normal, o sea, $\xi_{\mathcal{P},2}$ lo es en base 2. □

Veamos la vuelta ahora, que para que la sucesión $\xi_{\mathcal{P},2}$ sea simplemente normal, entonces $\mathcal{P}$ debe dejar muchos afuera.

Lema 3 (Vuelta del Teorema 2)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos. Si $\xi_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal, entonces $\mathcal{P}$ deja muchos afuera.*

Demostración. Definimos la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ completamente multiplicativa:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 0 \\ \\ -1 & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$$

Como la sucesión a_n es simplemente normal, debe ser que el promedio de g existe y es 0, por el Lema 1. Por el Teorema 7 se tiene que o bien $g(2^k) = -1$ para todo entero positivo k, o bien la serie $\displaystyle\sum_{p} \frac{1 - g(p)}{p}$ diverge. Notemos que si $2 \in \mathcal{P}$, entonces $g(2) = 1$, y si $2 \notin \mathcal{P}$, entonces $g(4) = (-1)^2 = 1$, por lo que debe ocurrir necesariamente que $\dfrac{1 - g(p)}{p}$ diverge. Por lo que dedujimos anteriormente, esta última serie es también

$$\sum_{p \notin \mathcal{P}} \frac{2}{p},$$

por lo que debe ocurrir que $\mathcal{P}$ deja muchos afuera, como queríamos. □

En virtud de los últimos lemas, hemos probado el Teorema 2.

3.2. Demostración del Teorema 4

Debemos dar condiciones suficientes y necesarias para que $\xi'_{\mathcal{P},2}$ sea simplemente normal en base 2.

Lema 4 (Parte de la ida del Teorema 4)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos que deja muchos afuera. Entonces $\xi'_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal.*

Demostración. La demostración es prácticamente la misma que para $\xi_{\mathcal{P},2}$. Definimos la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplicativa:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 1, \\ \\ -1 & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

En otras palabras, tenemos que $g(n) = (-1)^{\omega_{\mathcal{P}}(n)}$.

Como $\mathcal{P}$ deja muchos afuera, la serie $\displaystyle\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$ diverge. Por lo tanto, por el Teorema 7, g debe tener promedio nulo. En virtud del Lema 1, g es simplemente normal, y por lo tanto $\xi_{\mathcal{P},2}$ en base 2 también. □

Lema 5 (Parte de la ida del Teorema 4)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos tales que $2 \notin \mathcal{P}$. Entonces $\xi'_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal en base 2.*

Demostración. Definimos la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplicativa:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 0 \\ \\ -1 & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$$

Como $2 \notin \mathcal{P}$, entonces $g(2^k) = (-1)^1 = -1$ para todo entero positivo k. Por lo tanto, por el Teorema 7, g debe tener promedio nulo. En virtud del Lema 1, g es simplemente normal, y por lo tanto $\xi_{\mathcal{P},2}$ en base 2 también. □

Veamos ahora la vuelta de estos últimos dos resultados.

Lema 6. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de primos. Si $\xi'_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal, entonces debe ocurrir alguna de las siguientes dos opciones (o ambas):*

- *$\mathcal{P}$ deja muchos afuera,*
- *$2 \notin \mathcal{P}$.*

Demostración. Definimos la siguiente función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplicativa:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 0 \\ \\ -1 & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$$

Como $\xi'_{\mathcal{P},2}$ es simplemente normal, debe ser que el promedio de g existe y es 0. Por el Teorema 7 se tiene que o bien $g(2^k) = -1$ para todo entero positivo k, o bien la serie

$\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$ diverge. Notemos que si $g(2^k) = -1$ para todo entero positivo k, entonces debe ocurrir que $2 \notin \mathcal{P}$. Si por otro lado ocurre que $\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$ diverge, entonces $\mathcal{P}$ deja muchos afuera. □

En virtud de los últimos tres lemas, hemos probado el Teorema 4.

3.3. Un comentario

Tenemos condiciones necesarias y suficientes sobre el conjunto $\mathcal{P}$ que garantiza que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es simplemente normal en base 2, tomando respectivamente, $a_n := \Omega_{\mathcal{P}}(n)$ mód 2 y $a_n := \omega_{\mathcal{P}}(n)$ mód 2. Estas sucesiones cumplen $a_n = a_{pn}$ para cada $p \in \mathcal{P}$. Si tomamos $\mathcal{P} = \{2, 3\}$ tenemos sucesiones computables y simplemente normales que cumplen $a_n = a_{2n} = a_{3n}$. Dichas sucesiones son

- $\Omega_{\{2,3\}}(n)$ mód 2,
- $\omega_{\{2,3\}}(n)$ mód 2.

En [11] tenemos algunos avances. Se conjetura que $\xi_{\emptyset,2}$ es un número normal en base 2. Solamente tenemos resultados para $k = 2$ y $k = 3$. El hecho de que $\xi_{\emptyset,2}$ sea normal en base 2 es equivalente a la Conjetura de Chowla [4], y esta implica la hipótesis de Riemann (pero no son equivalentes).

A partir de los resultados de este capítulo creemos que si se demuestra que $\xi_{\emptyset,2}$ es normal, se podrá también demostrar que para ciertos conjuntos de primos $\mathcal{P}$ el número $\xi_{\mathcal{P},2}$ también es normal.

4. ALFABETO GRANDE: DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 3 Y 5

Ahora vamos a trabajar con las sucesiones $\Omega_{\mathcal{P}}(n) \mod b$, y $\omega_{\mathcal{P}}(n) \mod b$, es decir, con los números $\xi_{\mathcal{P},b}$ y $\xi'_{\mathcal{P},b}$ para bases b mayores a 2. Procederemos de forma similar a la del capítulo anterior. Primero demostraremos que nuestras funciones tienen promedio, y luego usaremos las condiciones del Teorema de Delange, Wirsing y Halasz para dar condiciones suficientes y necesarias sobre el conjunto $\mathcal{P}$ que garanticen que los respectivos números sean simplemente normales en base b.

Damos a continuación la versión completa del Teorema 7, que presentamos en el capítulo anterior. Usamos la notación $\Re(z)$ para denotar la parte real del número complejo z.

Teorema 7 (Delange, Wirsing, Halász, versión completa)**.** *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función multiplicativa. Entonces el promedio*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n)$$

*existe y es no nulo si y solamente si se satisfacen **en simultáneo** las siguientes dos condiciones:*

- *existe un entero positivo k que satisface $g(2^k) \neq -1$,*
- *la serie*

$$\sum_p \frac{1 - g(p)}{p}$$

  converge.

Más aún, el límite existe y es nulo si y solamente si ocurre alguna de las dos siguientes condiciones:

- *existe un real τ tal que $g(2^k) = -2^{ik\tau}$ para todo entero positivo k,*
- *la serie*

$$\sum_p \frac{1 - \Re(g(p)p^{-i\tau})}{p}$$

  diverge para todo real τ.

Por comodidad a la hora de presentar algunas expresiones, vamos a definir la siguiente notación.

Definición 7 (Distancia pretenciosa, [9])**.** Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que $|f|, |g| \leq 1$, y X un entero positivo. Definimos

$$\mathbb{D}(f, g, X) := \left(\sum_{p \leq X} \frac{1 - \Re(f(n)\overline{g(n)})}{p} \right)^{\frac{1}{2}},$$

dónde p es un número primo. Definimos además $\mathbb{D}(f, g) := \lim_{X\to+\infty} \mathbb{D}(f, g, X)$.

Existe una teoría de la distancia pretenciosa que incluye al Teorema 7, nosotros no entraremos en ella. En este trabajo, únicamente usaremos dicha definición.

Necesitamos el siguiente lema.

Lema 7. *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función multiplicativa que únicamente puede tomar como valor las raíces m-ésimas de la unidad, para algún m determinado. Entonces g tiene promedio.*

Demostración. A lo largo de la demostración, usaremos p para referirnos a números primos, como así también las series y sumas serán únicamente sobre números primos.

Veremos que se cumple una condición del Teorema 7. Si $\mathbb{D}(g, n^{i\tau})$ diverge para todo real τ, entonces ya está dicho por el Teorema 7 que g tiene promedio. Veamos que si τ es no nulo entonces $\mathbb{D}(g, n^{i\tau})$ no converge. Dicha expresión es

$$\sum_p \frac{1 - \Re(g(p) \exp(-i\tau \log p))}{p}.$$

La idea es tomar aquellos primos que hacen que $g(p)\exp(-i\tau \log p)$ esté lejos de 1 en el plano complejo. Como dicho número yace sobre el círculo unitario, bastará ver que su argumento está lejos del ángulo 0 módulo 2π. Una vez que sepamos qué características tienen esos primos, veremos que la serie de los inversos de los primos que cumplen dicha característica diverge. Esto será suficiente, puesto que si $g(p)\exp(-i\tau \log p)$ está a distancia por lo menos c del 1, entonces $1 - \Re(g(p)\exp(-i\tau \log p))$ será por lo menos c, y por lo tanto $\sum_p \frac{1 - \Re(g(p)\exp(-i\tau \log p))}{p}$ divergirá. Lo que estamos haciendo es considerar algunos de todos los primos, notando que aquellos términos que estamos quitando son no negativos, por lo que si una subserie diverge, como todos son positivos, la serie deberá divergir.

Consideremos

$$A_m = \bigcup_{0 \le t < m} \left(\frac{t}{m} - \frac{1}{4m}, \frac{t}{m} + \frac{1}{4m} \right) \quad \text{mód } 1$$

Entonces, A_m tiene los valores que 'están cerca' de las fracciones con denominador m. Por lo tanto, vamos a querer considerar aquellos primos p tales que $\tau \log p/(2\pi) \notin A_m$. De esta manera, el número complejo $g(p)\exp(-i\tau \log p)$ estará lejos del 1, sin importar cuanto valga $g(p)$.

Consideremos el complemento de A_m, al cual llamaremos

$$B_m = \bigcup_{0 \le t < m} \left[\frac{t}{m} + \frac{1}{4m}, \frac{t}{m} + \frac{3}{4m} \right] \quad \text{mód } 1$$

En la siguiente figura, podemos observar que buscamos que el complejo $\exp(-i\tau \log p)$ caiga en los intervalos verdes. Esto sería lejos de las raíces de la unidad b-ésimas. Y esto es equivalente a que $\tau \log p/(2\pi)$ pertenezca a B_m.

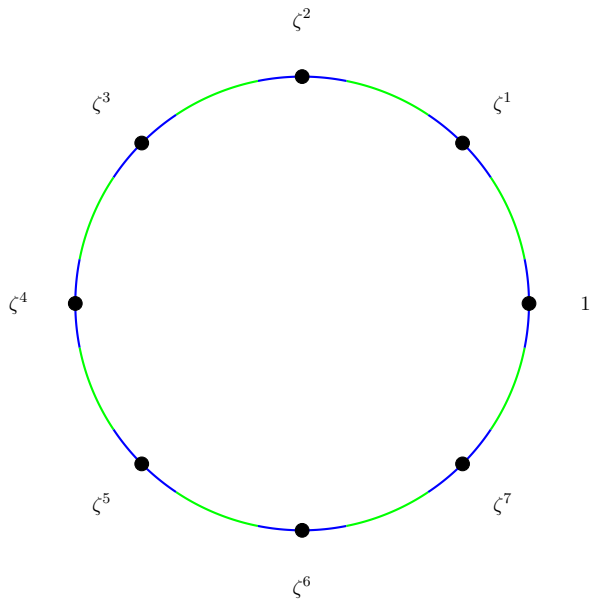

Fig. 4.1: Construcción para A_8 y B_8.

Volviendo a la expresión $\tau \log p/(2\pi) \in B_m$, buscamos que exista un valor entero de k y un resto módulo k para t para los cuáles se verifica que

$$\tau \log p/(2\pi) \in \left[k + \frac{t}{m} + \frac{1}{4m}, k + \frac{t}{m} + \frac{3}{4m}\right].$$

En ésta expresión, podemos despejar p para así obtener que buscamos dichos k y t para los cuales

$$p \in \left[\exp\left(\frac{2\pi}{\tau}\left(k + \frac{t}{m} + \frac{1}{4m}\right)\right), \exp\left(\frac{2\pi}{\tau}\left(k + \frac{t}{m} + \frac{3}{4m}\right)\right)\right].$$

Uniendo todos esos posibles intervalos, y definiendo

$$T = \exp\left(\frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{1}{4m}\right), \; c = \exp\left(\frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{2}{4m}\right)$$

en definitiva estamos considerando los p que pertenecen a $[T, cT] \cup [Tc^2, Tc^3] \cup \ldots$, y por el Lema 2, la serie de los inversos de los primos diverge sobre dicho conjunto, como deseábamos obtener.

Esto quiere decir que, en el caso de que exista τ que haga que la serie converge, debe ser necesariamente $\tau = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_p \frac{1 - \Re(g(p))}{p} < \infty.$$

Como g toma finitos valores en la circunferencia unitaria, para todo primo p debe ser $g(p) = 1$ o $1 - \Re(g(p)) \geq c$ para alguna constante c positiva. Esto quiere decir que

$$c \sum_{p, g(p) \neq 1} \frac{1}{p} \leq \sum_p \frac{1 - \Re(g(p))}{p} < \infty,$$

o sea $\sum_{p,g(p)\neq 1} \frac{1}{p}$ converge. Pero como $|1-g(p)| \leq 2$, tenemos entonces que

$$\sum_p \frac{|1-g(p)|}{p} \leq \sum_{p,g(p)\neq 1} \frac{2}{p} = 2 \sum_{p,g(p)\neq 1} \frac{1}{p} < \infty,$$

por lo que por el Teorema 7 nuevamente, g tiene promedio.

□

Una demostración alternativa para este último Lema, es la que se puede encontrar en [8, Proposition 2. (i)]

Sea ζ una raíz b-ésima de la unidad. Vamos a emular lo hecho en el capítulo anterior para la raíz cuadrática primitiva (-1). Vamos a analizar las funciones $g(n) = \zeta^{\Omega_{\mathcal{P}}(n)}$ y $g(n) = \zeta^{\omega_{\mathcal{P}}(n)}$. Utilizando el Teorema 7, y el Lema anterior, dichas funciones tienen promedio nulo si y solamente sí alguna de las siguientes se cumple:

- $g(2^k) = -1$ para todo entero positivo k,
- la serie

$$\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$$

diverge.

En el contexto de nuestro problema, la primera condición ahora es imposible, ya que $b > 2$. Por lo tanto las $g(n)$ definidas anteriormente tendrán promedio igual a 0 si y solamente si la serie

$$\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$$

diverge. Por lo visto antes, esta última suma es igual a $\sum_{p\notin\mathcal{P}} \frac{1-\zeta}{p}$, por lo tanto la serie diverge si y solamente si $\mathcal{P}$ deja muchos afuera.

Resta ver que $\xi_{\mathcal{P},b}$ y $\xi'_{\mathcal{P},b}$ son simplemente normales en base b si y solamente si la función $g(n)$ tiene promedio 0. Usaremos el siguiente lema, que vale más generalmente.

Lema 8. *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplicativa que toma valores en las raíces m-ésimas de la unidad. Entonces g es simplemente normal si y solamente si $g, g^2, \ldots, g^{m-1}$ tienen todas promedio nulo.*

Demostración. Veamos directamente la vuelta, ya que la ida es clara.

Definimos $b_{n,k} = \#\{1 \leq i \leq n \mid g(i) = \zeta^k\}$. La condición para g nos dice que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{1,n}\zeta^1 + b_{2,n}\zeta^2 + \cdots + b_{m,n}\zeta^m}{n} = 0.$$

De la misma forma, tomando g^k para cada $1 \leq k \leq m-1$, obtenemos que

$$l_k := \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{1,n}\zeta^k + b_{2,n}\zeta^{2k} + \cdots + b_{m,n}\zeta^{mk}}{n} = 0.$$

Notar también que $l_m := \lim_{n\to+\infty} \dfrac{b_{1,n}+b_{2,n}+\cdots+b_{m,n}}{n} = 1$, ya que $b_{1,n}+b_{2,n}+\cdots+b_{m,n} = n$. Queremos ver que $\lim_{n\to+\infty} b_{k,n}/n = 1/m$ para cada $1 \le k \le m$. Consideremos

$$l_1/\zeta^k + l_2/\zeta^{2k} + \cdots + l_m/\zeta^{mk} = 1.$$

Basta ver que el lado izquierdo es exactamente $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{mb_{k,n}}{n}$. Observar que para cada $1 \le j \le m$, se tiene que el coeficiente de $b_{j,n}$ en dicha expresión es

$$\frac{1}{n}(\zeta^j/\zeta^k + \zeta^{2j}/\zeta^{2k} + \cdots + \zeta^{mj}/\zeta^{mk}) = \frac{1}{n}(\zeta^{j-k} + \zeta^{2(j-k)} + \cdots + \zeta^{m(j-k)}).$$

Notemos si $j = k$, que el numerador es n; y en caso contrario el numerador es la suma de las potencias de la raíz m-ésima de la unidad (no necesariamente primitiva), y dicho valor es 0. Por lo tanto,

$$l_1/\zeta^k + l_2/\zeta^{2k} + \cdots + l_m/\zeta^{mk} = \lim_{n\to+\infty} mb_{k,n}/n$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty} b_{k,n}/n = 1/m$, como queríamos ver. □

Observemos entonces que si $\mathcal{P}$ deja muchos afuera, entonces cada una de las funciones $g, g^2, \ldots, g^{b-1}$ tiene promedio nulo. En virtud del Lema 8, $\xi_{\mathcal{P},b}$ y $\xi'_{\mathcal{P},b}$ son simplemente normales en base b.

Por otra parte, si $\xi_{\mathcal{P},b}$ y $\xi'_{\mathcal{P},b}$ son simplemente normales, por el Lema 8 eso quiere decir que g tiene promedio nulo. Por lo que debe ser que $\mathcal{P}$ deja muchos afuera.

En virtud de lo obtenido, hemos demostrado los Teoremas 3 y 5.

5. TODOS LOS ALFABETOS: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Consideremos el número $\xi_{\mathcal{P},b}$ para cualquier base b. El Teorema 1 enuncia una cota superior de la velocidad de convergencia de $\xi_{\mathcal{P},b}$ a la simple normalidad en base b. Este resultado da una demostración alternativa de la que dimos para los Teoremas 2, 3, 4 y 5, proveyendo además una estimación de cuán rápido nuestro número converge a la simple normalidad. No sabemos si esta estimación es holgada o no.

El contenido de este capítulo es trabajo conjunto con Verónica Becher y Gérald Tenenbaum recientemente publicado [3].

Cómo lo hicimos en el capítulo anterior, utilizamos una raíz b-ésima primitiva de la unidad. En el capítulo anterior la llamamos ζ, pero en este simplemente utilizamos la notación exponencial, recordando que tomando $a = 0, 1, \ldots, b-1$ en $\exp\left(\frac{a}{b}2\pi i\right)$ obtenemos todas las raíces de la unidad b-ésimas.

Recordemos el Lema 8 del capítulo anterior.

Lema 8. *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplicativa que toma valores en las raíces m-ésimas de la unidad. Entonces g es simplemente normal si y solamente si $g, g^2, \ldots, g^{m-1}$ tienen todas promedio nulo.*

Utilizaremos los siguientes dos resultados de Gérald Tenenbaum en [15], sobre promedios efectivos de funciones multiplicativas complejas. El primero es una versión efectiva del teorema de Delánge [14, Theorem III.4.4]. El segundo nos da la cota efectiva en caso de que el conjunto $\mathcal{P}$ deje muchos afuera.

Lema 9 ([15, Corolario 2.2])**.** *Sean A, B, ϱ reales positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que verifica que $f \in \mathfrak{M}_0(A, B)$ y que para todo primo p se tiene $|f(p)| \leq \varrho$. Si $\sum_p \frac{1 - \Re f(p)}{p}$ converge, entonces*

$$\sum_{n \leq N} f(n) = \frac{e^{-\gamma\varrho} N}{\Gamma(\varrho) \log N} \left[\prod_p \sum_{p^\nu \leq N} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + \mathcal{O}\left(\nu_N^a \exp(Z(N; f)) + \frac{\exp(Z(N; f)}{(\log x)^b} \right) \right],$$

donde:

- $a := w_f \min(1, \varrho)/(5 - \min(1, \varrho))$,
- $b := w_f \min(1, \varrho)/6$,
- $w_f = 1$ *en el caso de que f sea real, y $w_f = 1/2$ si es compleja*
- $Z(N; f) = \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p}$,
- *y ν_N se define de forma tal que $\sum_{p \leq N} \frac{(1 - \Re(f(p))) \log p}{p} \ll \nu_N \log N$ y $\nu_N \to 0$ cuando N tiende a infinito.*

Observar que la existencia de ν_N se deduce del hecho de que $\sum_p \frac{1-\Re f(p)}{p}$ converge, usando suma de Abel a partir de ella.

A lo largo del trabajo veníamos usando $\mathcal{Q}$ para denotar $\mathbb{P}\setminus\mathcal{P}$. Para respetar la notación del autor, en lugar de usar $\mathcal{Q}$, pasaremos a usar E.

Lema 10 ([15, Corolario 2.4]). *Sea E un conjunto de números primos, y $E(x) = \sum_{p\leq x, p\in E} 1/p$. Supongamos que $E(x)\to+\infty$ cuando $x\to+\infty$. Sea $\kappa\in(0,1)$. Si $\kappa\leq r\leq 2-\kappa$, $z=re^{i\theta}$ y $-\pi\leq\theta\leq\pi$, entonces para todo x suficientemente grande se tiene que*

$$\sum_{n\leq x} z^{\Omega_{\mathbb{P}\setminus E}(n)} \ll x\exp\left(r-1-\frac{\kappa\theta^2}{180}\cdot E(x)\right).$$

Pasamos ahora sí a la demostración del Teorema 1, el resultado principal de la tesis.

Demostración. En primer lugar, veamos que si un conjunto de primos $\mathcal{P}$ deja muchos afuera, entonces $\{\Omega_{\mathcal{P}}(n) \mod b\}_{n\in\mathbb{N}}$ es simplemente normal. Gracias al Lema 8, basta con ver que cada una de las funciones definidas por

$$n\mapsto \exp\left(\frac{a}{b}\Omega_{\mathcal{P}}(n)2\pi i\right)$$

tienen promedio cero, para cada $1\leq a\leq b-1$. Pero, por como definimos dichas funciones, basta verlo para un sistema completo de residuos no nulo módulo b.

Sea entonces $\mathcal{P}$ un conjunto de primos que deja muchos afuera. En virtud del Lema 10, para cada $|a|\leq b/2$, se tiene

$$\sum_{n\leq N}\exp\left(\frac{a}{b}\Omega_{\mathcal{P}}(n)2\pi i\right)\ll N\exp\left(\frac{-a^2}{180b^2}E(N)\right) \tag{5.1}$$

para todo N suficientemente grande. Estamos utilizando el Lema 10, para $r=1$, $\kappa=1$, $z=\exp(a/b)$ y $\theta=a/b$.

Observemos que entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\exp\left(\frac{a}{b}\Omega_{\mathcal{P}}(n)\right)$$

tiende a 0 cuando N tiende a $+\infty$, por lo que cada una de las funciones estudiadas tienen promedio nulo. Y usando Lema 8, se tiene que $\xi_{\mathcal{P},b}$ es simplemente normal en base b.

Más aún, notemos que podemos llegar a una cota superior efectiva. Observemos que, utilizando la notación del Lema 8 y las cotas proporcionadas por la Ecuación 5.1, tenemos que

$$|b_{n,k}-1/b|\ll\exp(-E(N)/(180b^2)),$$

en dónde estamos utilizando el sistema completo de residuos proporcionado previamente y sus cotas.

Por el contrario, supongamos ahora que $\mathcal{P}$ no deja muchos afuera. Basta ver que la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ definida por $n\mapsto\exp(\frac{1}{b}\Omega_{\mathcal{P}}(n)2\pi i)$ no tiene promedio nulo. En efecto,

veamos que f satisface las condiciones del Lema 9. Podemos tomar $A = 1$ siendo que la imagen de f está contenida en el círculo unitario. Además, observemos que se verifica que

$$\sum_{p^\nu,\ \nu\geq 2} \frac{|f(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu}$$

converge, puesto que es igual a

$$\sum_{p^\nu,\ \nu\geq 2} \frac{\log p^\nu}{p^\nu},$$

que, como ya vimos en la Proposición 1, converge.

Además, tenemos que $\sum_p \frac{1-\Re f(p)}{p} = (1-\exp(2\pi i/b))\sum_{p\notin\mathcal{P}} 1/p$ converge, al ser que $\mathcal{P}$ no deja muchos afuera. Por lo tanto, utilizando el Lema 9 con $\varrho = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f(n) = \frac{e^{-\gamma}}{\log N}\left[\prod_p \sum_{p^\nu\leq N} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu} + \mathcal{O}\left(\nu_N^a \exp(Z(N;f)) + \frac{\exp(Z(N;f)}{(\log x)^b}\right)\right].$$

Basta ver que dicha expresión es $\gg 1$, para poder afirmar que no tiende a 0. Es decir, observando que lo que está dentro de $\mathcal{O}$ tiende a 0, solo resta ver que

$$\prod_p \sum_{p^\nu\leq N} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu} \gg \log N.$$

Notemos que $f(p)$ es o bien 1, o bien $\exp(2\pi i/b)$. Afirmamos que $\prod_p \sum_{p^\nu\leq N} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu}$ tiene el orden de crecimiento igual a $\prod_p \sum_{p^\nu\leq N} \frac{1}{p^\nu}$, que es exactamente la serie armónica, que ya vimos tiene orden de crecimiento logarítmico.

Por la suma de una serie geométrica, tenemos que

$$\sum_{\nu\leq n} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu} = \frac{(f(p)/p)^{n+1}-1}{f(p)/p-1}.$$

Y tenemos que

$$|(f(p)/p)^{n+1}-1| \geq |(1/p)^{n+1}-1|,$$

y

$$|f(p)/p-1| \leq |1/p+1| \leq e^{4/p}|1/p-1|.$$

Observemos que el producto de todas las constantes converge a un número, puesto que estamos tomando aquellos $p \notin \mathcal{P}$, cuya serie de inversos converge. Por lo tanto,

$$\sum_{\nu\leq x} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu} \gg \sum_{\nu\leq x} \frac{1}{p^\nu},$$

y podemos concluir que

$$\sum_{\nu\leq x} \frac{f(p)^\nu}{p^\nu} \gg \sum_{\nu\leq x} \frac{1}{p^\nu} \gg \log N,$$

como deseábamos obtener.

□

Si bien no es necesario, la última parte de la demostración puede ser reemplazada por a/b en lugar de $1/b$ y obtener que no solamente f no tiene promedio nulo, sino que ninguna de $f, f^2, \ldots, f^{b-1}$ tiene promedio nulo.

Bibliografía

[1] Christoph Aistleitner, Verónica Becher, and Olivier Carton. Normal numbers with digit dependencies. *Transactions of the American Mathematical Society*, 372(6):4425–4446, 2019.

[2] Verónica Becher, Olivier Carton, and Pablo Ariel Heiber. Finite-state independence. *Theory Comput. Syst.*, 62(7):1555–1572, 2018.

[3] Verónica Becher, Agustín Marchionna, and Gérald Tenenbaum. On simply normal numbers with digit dependencies. *Mathematika*, 69(4):988–991, 2023.

[4] Sarvadaman Chowla. *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*, volume Vol. 4. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1965.

[5] Pierre Dusart. Estimates of some functions over primes without r.h. 2010.

[6] Peter Elliott. *Probabilistic number theory. I*, volume 239 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. Mean-value theorems.

[7] Paul Erdös. Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$. *Mathematica B, Zutphen*, 7:1–2, 1938.

[8] Nikos Frantzikinakis and Bernard Host. Multiple ergodic theorems for arithmetic sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(10):7085–7105, 2017.

[9] Andrew Granville and Kannan Soundararajan. *Multiplicative number theory: The pretentious approach.* 2014.

[10] Konrad Jacobs and Michael Keane. $0-1$-sequences of Toeplitz type. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 13:123–131, 1969.

[11] Kaisa Matomäki, Maksym Radziwiłł, and Terence Tao. Sign patterns of the Liouville and Möbius functions. *Forum Math. Sigma*, 4:44, 2016. Id/No e14.

[12] Franz Mertens. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 78:46–62, 1874.

[13] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, 6:64–94, 1962.

[14] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, volume 163 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 2015.

[15] Gérald Tenenbaum. Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes. *The Ramanujan Journal*, 44(3):641–701, 2017. Correction in: *The Ramanujan Journal* 53:1:243–244, 2020.

[16] Eduard Wirsing. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 18:411–467, 1967.